Решение тригонометрических уравнений и способы отбора корней на заданном промежутке

Обязательный минимум знаний

sin x = a, $-1 \le a \le 1$ ($|a| \le 1$)

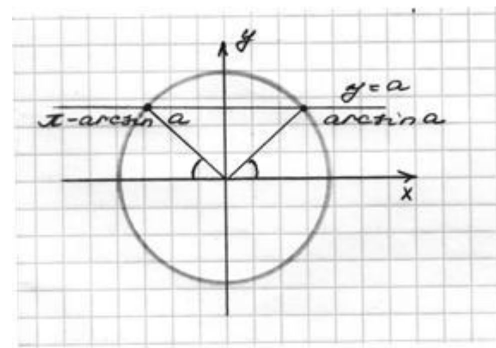
$x = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$

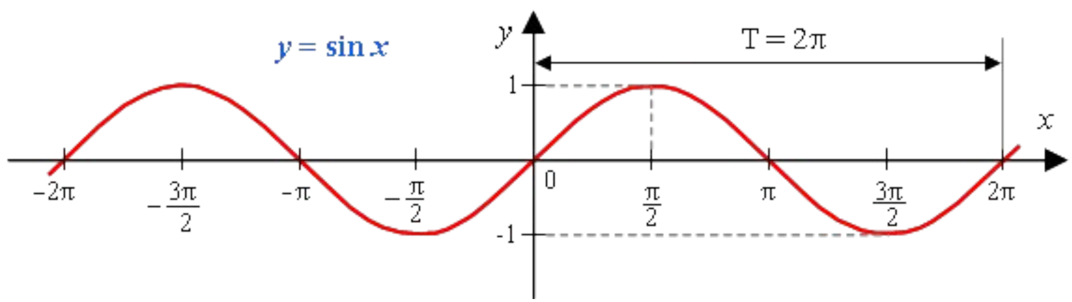
$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z$

или

$\mathbf{x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z}$

arcsin **(- a)** = **-** arcsin **a**





sin x = 1

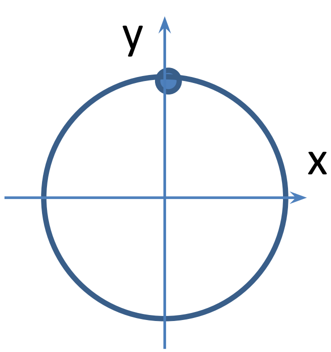
$x = \pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z$

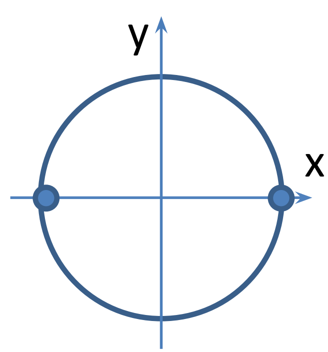
sin x = 0

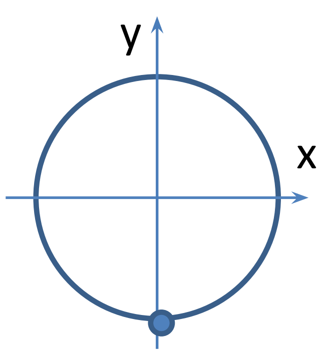
$x = \pi k,\ k \in Z$

sin x = - 1

$x = -\pi/2 + 2\pi k,\ k \in Z$



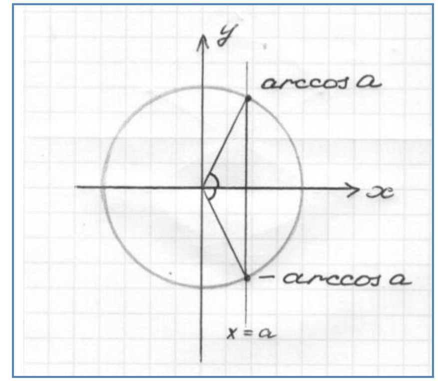




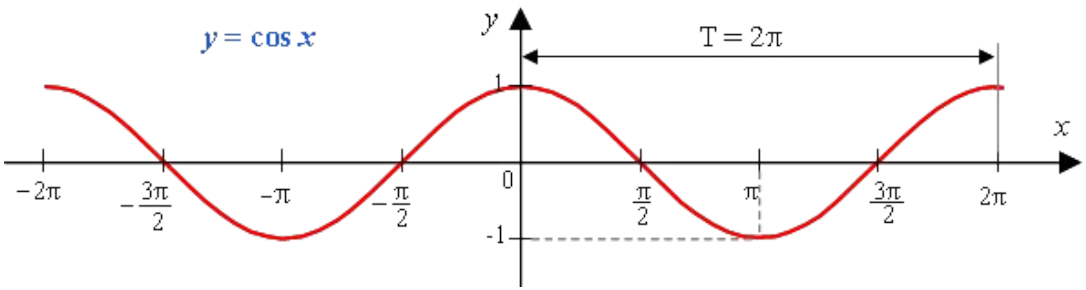
Обязательный минимум знаний

cos x = a, $-1 \leq a \leq 1$ ($|a| \leq 1$)

$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$

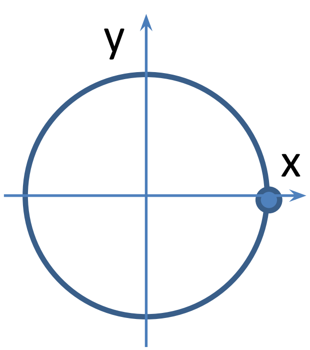


arccos **(- a)** = **π -** arccos **a**



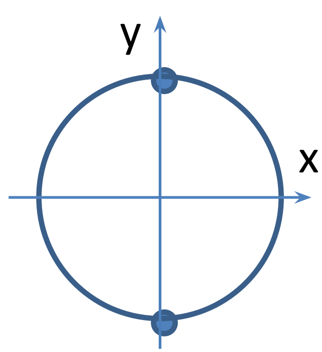
cos x = 1

$x = 2\pi k,\ k \in Z$



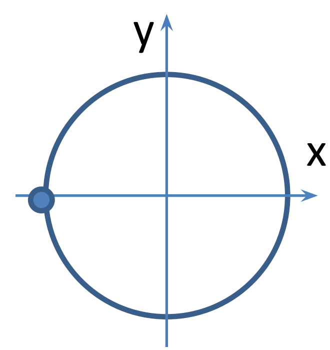
cos x = 0

$x = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z$



cos x = - 1

$x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$



Обязательный минимум знаний

tg x = a, a ∈ R

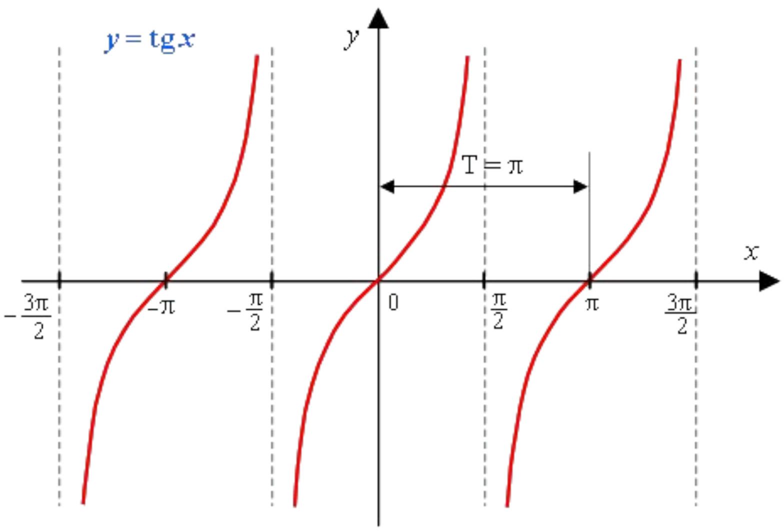
x = arctg a + πn, n ∈ Z

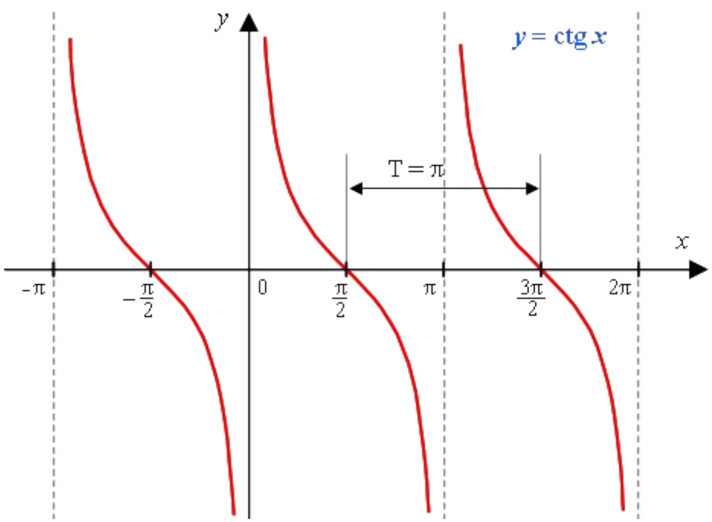
arctg **(- a)** = **-** arctg **a**

ctg x = a, a ∈ R

x = arcctg a + πn, n ∈ Z

arctg **(- a)** = **π -** arctg **a**





Рекомендации по решению тригонометрических уравнений

- Свести уравнение к одной функции
- Свести к одному аргументу

Некоторые методы решения тригонометрических уравнений

- Применение тригонометрических формул
- Использование формул сокращённого умножения
- Разложение на множители
- Сведение к квадратному уравнению относительно *sin x, cos x, tg x*
- Введением вспомогательного аргумента
- Делением обеих частей однородного уравнения первой степени ($a\sin x + b\cos x = 0$) на $\cos x$
- Делением обеих частей однородного уравнения второй степени ($a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$) на $\cos^2 x$

Устные упражнения

Вычислите

$\arcsin \frac{1}{2} = \boldsymbol{\pi/6}$

$\arcsin(-\sqrt{2}/2) = \boldsymbol{-\pi/4}$

$\arccos \sqrt{3}/2 = \boldsymbol{\pi/6}$

$\arccos(-1/2) = \boldsymbol{\pi} \mathbf{-} \arccos \frac{1}{2} = \boldsymbol{\pi - \pi/3 = 2\pi/3}$

$\mathrm{arctg}\, \sqrt{3} = \boldsymbol{\pi/3}$

$\mathrm{arctg}\,(-\sqrt{3}/3) = \boldsymbol{-\pi/6}$

Различные способы отбора корней

Найти корни уравнения, принадлежащие данному промежутку
(с помощью тригонометрической окружности)

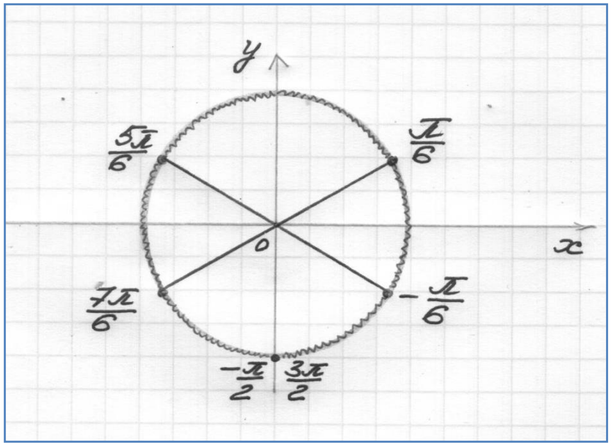
$\cos 2x = \frac{1}{2}$, $x \in [-\pi/2; 3\pi/2]$

$2x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$

$2x = \pm \pi/3 + 2\pi n$, $n \in Z$

$x = \pm \pi/6 + \pi n$, $n \in Z$

Отберём корни с помощью тригонометрической окружности



Ответ: **$-\pi/6$; $\pi/6$; $5\pi/6$; $7\pi/6$**

Различные способы отбора корней

Найти корни уравнения, принадлежащие данному промежутку

$\sin 3x = \sqrt{3}/2$, $x \in [-\pi/2;$
$\pi/2]$

$3x = (-1)^k \pi/3 + \pi k,\ k \in Z$

$x = (-1)^k \pi/9 + \pi k/3,\ k \in Z$

Отберём корни с помощью перебора значений k:

$k = 0$, $x =$ **$\pi/9$** – принадлежит промежутку

$k = 1$, $x = -\pi/9 + \pi/3 =$ **$2\pi/9$** – принадлежит промежутку

$k = 2$, $x = \pi/9 + 2\pi/3 = 7\pi/9$ – не принадлежит промежутку

$k = -1$, $x = -\pi/9 - \pi/3 =$ **$-4\pi/9$** – принадлежит промежутку

$k = -2$, $x = \pi/9 - 2\pi/3 = -5\pi/9$ – не принадлежит промежутку

Ответ: $-4\pi/9$; $\pi/9$; $2\pi/9$

Различные способы отбора корней

Найти корни уравнения, принадлежащие данному промежутку

(с помощью неравенства)

$\mathrm{tg}\, 3x = -1, x \in (-\pi/2; \pi)$

$3x = -\pi/4 + \pi n, n \in Z$

$x = -\pi/12 + \pi n/3, n \in Z$

Отберём корни с помощью неравенства:

$-\pi/2 < -\pi/12 + \pi n/3 < \pi,$

$-1/2 < -1/12 + n/3 < 1,$

$-1/2 + 1/12 < n/3 < 1 + 1/12,$

$-5/12 < n/3 < 13/12,$

$-5/4 < n < 13/4, n \in Z,$

$n = -1; 0; 1; 2; 3$

$n = -1, x = -\pi/12 - \pi/3 = -5\pi/12$

$n = 0, x = -\pi/12$

$n = 1, x = -\pi/12 + \pi/3 = \pi/4$

$n = 2, x = -\pi/12 + 2\pi/3 = 7\pi/12$

$n = 3, x = -\pi/12 + \pi = 11\pi/12$

Ответ: $-5\pi/12; -\pi/12; \pi/4; 7\pi/12; 11\pi/12$

Различные способы отбора корней

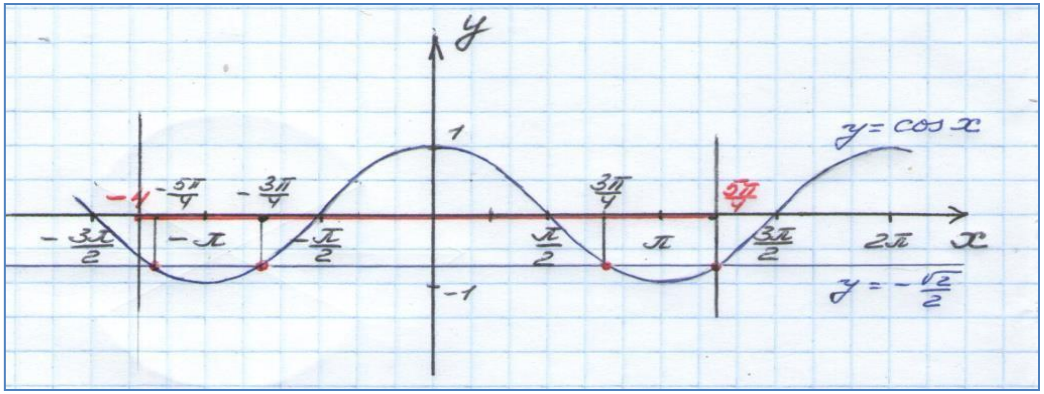
Найти корни уравнения, принадлежащие данному промежутку
(с помощью графика)

$\cos x = -\sqrt{2}/2$, $x \in [-4; 5\pi/4]$

$x = \pm \arccos(-\sqrt{2}/2) + 2\pi n$, $n \in Z$

$x = \pm 3\pi/4 + 2\pi n$, $n \in Z$

Отберём корни с помощью графика:



$x = -\pi/2 - \pi/4 = -3\pi/4$; $x = -\pi - \pi/4 = -5\pi/4$

Ответ: $\pm 5\pi/4$; $\pm 3\pi/4$

1. Решить уравнение $7^{2\cos x} = 49^{\sin 2x}$ и указать его корни на отрезке $[\pi; 5\pi/2]$

Решим уравнение:

$7^{2\cos x} = 49^{\sin 2x},$

$7^{2\cos x} = 7^{2\sin 2x},$

$2\cos x = 2\sin 2x,$

$\cos x - 2\sin x \cos x = 0,$

$\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0,$

$\cos x = 0$,

$x = \pi/2 + \pi k,\ k \in Z$

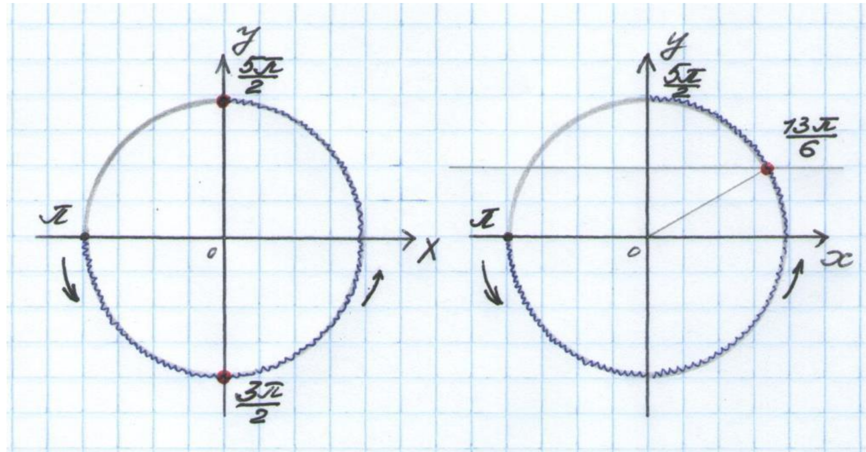
или

$1 - 2\sin x = 0,$

$\sin x = ½,$

$x = (-1)^n \pi/6 + \pi n,\ n \in Z$

Проведём отбор корней с помощью тригонометрической окружности:



$x = 2\pi + \pi/6 = 13\pi/6$

Ответ:

а) $\pi/2 + \pi k,\ k \in Z,\ (-1)^n \pi/6 + \pi n,\ n \in Z$

б) $3\pi/2;\ 5\pi/2;\ 13\pi/6$

2. Решить уравнение $4\cos^2 x + 8\cos(x - 3\pi/2) + 1 = 0$
Найти его корни на отрезке $[3\pi; 9\pi/2]$

$\mathbf{4\cos^2 x + 8\cos(x - 3\pi/2) + 1 = 0}$

$4\cos^2 x + 8\cos(3\pi/2 - x) + 1 = 0,$

$4\cos^2 x - 8\sin x + 1 = 0,$

$4 - 4\sin^2 x - 8\sin x + 1 = 0,$

$\mathbf{4\sin^2 x + 8\sin x - 5 = 0,}$

$D/4 = 16 + 20 = 36,$

$\sin x = -2{,}5$

$\varnothing$

или

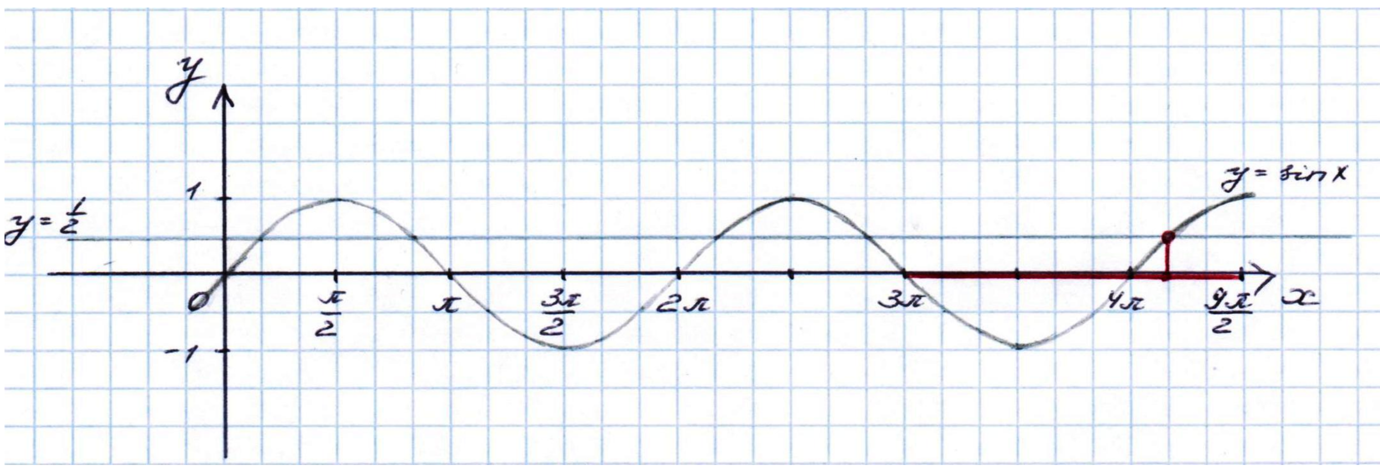
$\sin x = ½$

$\mathbf{x = (-1)^k \pi/6 + \pi k,\ k \in Z}$

Проведем отбор корней на отрезке [3π; 9π/2] (с помощью графиков)

$\sin x = \frac{1}{2}$

Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$



$x = 4\pi + \pi/6 =$ **$25\pi/6$**

Ответ: а) $(-1)^k \pi/6 + \pi k, k \in Z$; б) $25\pi/6$

3. Решить уравнение $4 - \cos^2 2x = 3\sin^2 2x + 2\sin 4x$ Найти его корни на отрезке [0; 1]

$$\mathbf{4 - \cos^2 2x = 3\sin^2 2x + 2\sin 4x}$$

$4(\sin^2 2x + \cos^2 2x) - \cos^2 2x = 3\sin^2 2x + 4\sin 2x\cos 2x$,

$\sin^2 2x + 3\cos^2 2x - 4\sin 2x\cos 2x = 0$

Если $\cos^2 2x = 0$, то $\sin^2 2x = 0$, что невозможно, поэтому $\cos^2 2x \neq 0$ и обе части уравнения можно разделить на $\cos^2 2x$.

$\mathrm{tg}^2 2x + 3 - 4\,\mathrm{tg}\,2x = 0$,

$\mathbf{tg^2 2x - 4\,tg\,2x + 3 = 0}$,

$\mathrm{tg}\,2x = 1$,

$2x = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z$

$\mathbf{x = \pi/8 + \pi n/2,\ n \in Z}$

или

$\mathrm{tg}\,2x = 3$,

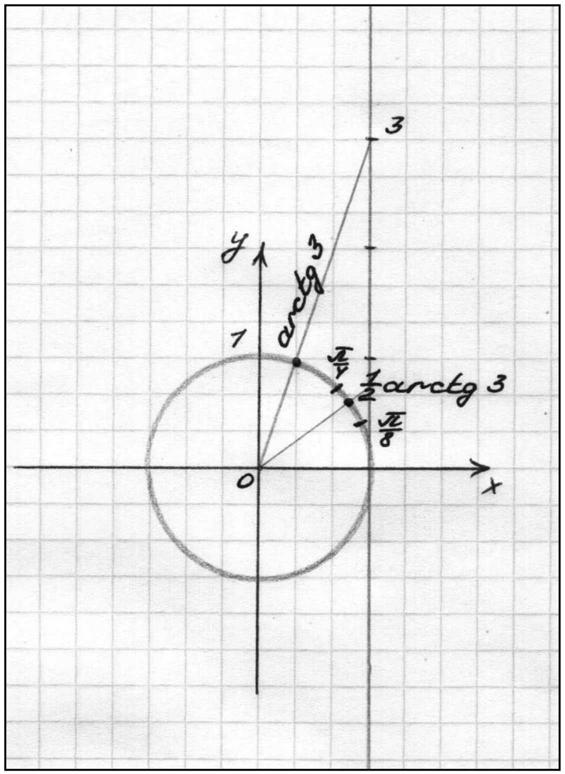
$2x = \mathrm{arctg}\,3 + \pi k,\ k \in Z$

$\mathbf{x = ½\,arctg\,3 + \pi k/2,\ k \in Z}$

Проведём отбор корней на отрезке [0; 1]

$4 - \cos^2 2x = 3\sin^2 2x + 2\sin 4x$

$x = \pi/8 + \pi n/2,\ n \in Z$ *или* **$x = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,3 + \pi k/2,\ k \in Z$**



Так как $0 < \mathrm{arctg}\,3 < \pi/2$, $0 < \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,3 < \pi/4$, то $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,3$ является решением

Так как $0 < \pi/8 < \pi/4 < 1$, значит $\pi/8$ также является решением

Другие решения не попадут в промежуток [0; 1], так как они получаются из чисел $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,3$ и $\pi/8$ прибавлением чисел, кратных $\pi/2$.

Ответ: а) $\pi/8 + \pi n/2,\ n \in Z$; $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,3 + \pi k/2,\ k \in Z$

б) $\pi/8$; $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,3$

4. Решить уравнение $\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2$
Найти его корни на отрезке $[2\pi; 7\pi/2]$

Решим уравнение:

$\mathbf{\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2}$

ОДЗ: $\cos x - \sin 2x + 25 > 0$,

$\cos x - \sin 2x + 25 = 25$, $25 > 0$,

$\cos x - 2\sin x \cos x = 0$,

$\cos x\,(1 - 2\sin x) = 0$,

$\cos x = 0$,

$\mathbf{x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z}$

или

$1 - 2\sin x = 0$,

$\sin x = 1/2$

$\mathbf{x = (-1)^k \pi/6 + \pi k,\ k \in Z}$

Проведём отбор корней на отрезке

Проведём отбор корней на отрезке $[2\pi; 7\pi/2]$:

1) **$x = \pi/2 + \pi n,\ n \in Z$**

$2\pi \le \pi/2 + \pi n \le 7\pi/2,\ n \in Z$

$2 \le 1/2 + n \le 7/2,\ n \in Z$

$2 - ½ \le n \le 7/2 - ½,\ n \in Z$

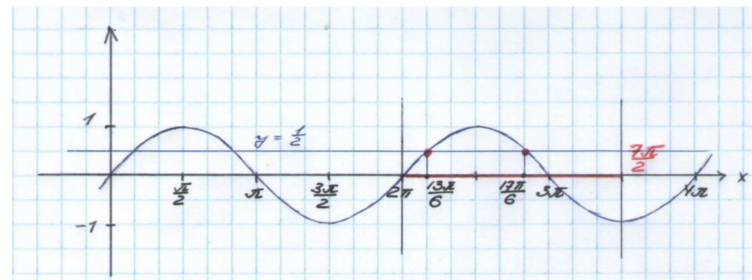
$1{,}5 \le n \le 3,\ n \in Z$

$n = 2;\ 3$

$x = \pi/2 + 2\pi = \mathbf{5\pi/2}$

$x = \pi/2 + 3\pi = \mathbf{7\pi/2}$

2) **$\sin x = 1/2$**



$x = 2\pi + \pi/6 = \mathbf{13\pi/6}$

$x = 3\pi - \pi/6 = \mathbf{17\pi/6}$

Ответ: а) $\pi/2 + \pi n,\ n \in Z$; $(-1)^k \pi/6 + \pi k,\ k \in Z$

б) $13\pi/6$; $5\pi/2$; $7\pi/2$; $17\pi/6$

5. Решить уравнение $1/\sin^2 x + 1/\sin x = 2$
Найти его корни на отрезке $[-5\pi/2; -3\pi/2]$

Решим уравнение:

$\mathbf{1/\sin^2 x + 1/\sin x = 2}$

$x \neq \pi k$

<u>Замена</u> $1/\sin x = t$,

$t^2 + t = 2$,

$t^2 + t - 2 = 0$,

$t_1 = -2$, $t_2 = 1$

$1/\sin x = -2$,

$\sin x = -\frac{1}{2}$,

$\mathbf{x = -\pi/6 + 2\pi n,\ n \in Z}$

или

$\mathbf{x = -5\pi/6 + 2\pi n,}$

$\mathbf{n \in Z}$

$1/\sin x = 1$,

$\sin x = 1$,

$\mathbf{x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z}$

Исключается эта серия корней, т.к. $-150^o + 360^o n$ выходит за пределы заданного промежутка **$[-450^o; -270^o]$**

Продолжим отбор корней на отрезке

Рассмотрим остальные серии корней и проведём отбор корней на отрезке $[-5\pi/2; -3\pi/2]$ *([-450º; -270º])*:

1) $\mathbf{x = -\pi/6 + 2\pi n,\ n \in Z}$

$-5\pi/2 \le -\pi/6 + 2\pi n \le -3\pi/2,\ n \in Z$

$-5/2 \le -1/6 + 2n \le -3/2,\ n \in Z$

$-5/2 + 1/6 \le 2n \le -3/2 + 1/6,$

$n \in Z$

$-7/3 \le 2n \le -4/3,\ n \in Z$

$-7/6 \le n \le -2/3,\ n \in Z$

$n = -1$

$x = -\pi/6 - 2\pi = \mathbf{-13\pi/6}$ *(-390º)*

2) $\mathbf{x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z}$

$-5\pi/2 \le \pi/2 + 2\pi n \le -3\pi/2,\ n \in Z$

$-5/2 \le 1/2 + 2n \le -3/2,\ n \in Z$

$-5/2 - 1/2 \le 2n \le -3/2 - 1/2,\ n \in Z$

$-3 \le 2n \le -2,\ n \in Z$

$-1{,}5 \le n \le -1,\ n \in Z$

$n = -1$

$x = \pi/2 - 2\pi = \mathbf{-3\pi/2}$ *(-270º)*

Ответ: а) $\mathbf{\pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z\ ;\ (-1)^{k+1}\,\pi/6 + \pi k,\ k \in Z}$

б) $\mathbf{-13\pi/6\ ;\ -3\pi/2}$

6. Решить уравнение $|\sin x|/\sin x + 2 = 2\cos x$ Найти его корни на отрезке [-1; 8]

Решим уравнение

$|\sin x|/\sin x + 2 = 2\cos x$

1)Если $\sin x > 0$, то $|\sin x| = \sin x$

Уравнение примет вид:

$2\cos x = 3$,

$\cos x = 1{,}5$ **– не имеет корней**

2) Если $\sin x < 0$, то $|\sin x| = -\sin x$

и уравнение примет вид

$2\cos x = 1$, $\cos x = 1/2$,

$x = \pm\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

Учитывая, что $\sin x < 0$, то остаётся одна серия ответа

$x = -\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

Произведём отбор корней на отрезке [-1; 8]

$k=0$, $x = -\pi/3$, $-\pi < -3$, $-\pi/3 < -1$,

$-\pi/3$ не принадлежит данному отрезку

$k=1$, $x = -\pi/3 + 2\pi = 5\pi/3 < 8$,

$5\pi/3 \in [-1; 8]$

$k=2$, $x = -\pi/3 + 4\pi = 11\pi/3 > 8$,

$11\pi/3$ не принадлежит данному отрезку.

Ответ: а) $-\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

б) $5\pi/3$

7. Решить уравнение $4\sin^3x=3\cos(x-\pi/2)$ Найти его корни на промежутке $[7\pi/2; 9\pi/2)$

Решим уравнение

$\mathbf{4\sin^3x = 3\cos(x-\pi/2)}$

$4\sin^3x = 3\cos(\pi/2-x)$,

$4\sin^3x - 3\cos(\pi/2-x) = 0$,

$4\sin^3x - 3\sin x = 0$,

$\sin x\,(4\sin^2x - 3) = 0$,

$\sin x = 0$

$\mathbf{x = \pi n,\ n\in Z}$

или $4\sin^2x - 3 = 0$,

$\sin x = \sqrt{3}/2$; $\sin x = -\sqrt{3}/2$

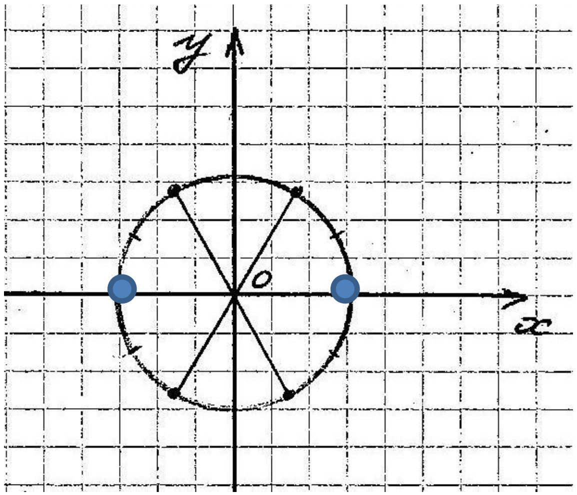
$\sin x = \sqrt{3}/2$,

$\mathbf{x = (-1)^k \pi/3 + \pi k,\ k\in Z}$,

$\sin x = -\sqrt{3}/2$,

$\mathbf{x = (-1)^{k+1} \pi/3 + \pi k,\ k\in Z}$,

Объединим решения (см. рисунок)



или **x = πm/3, m∈Z**

Уравнение можно решить короче, зная формулу

$\mathbf{\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x}$:

$4\sin^3 x - 3\sin x = 0$,

$3\sin x - 4\sin^3 x = 0$,

$\sin 3x = 0$, $\mathbf{x = \pi m/3,\ m \in Z}$

Проведём отбор корней на промежутке [7π/2; 9π/2)

$x = \pi m/3,\ m \in Z.$

$7\pi/2 \le \pi m/3 < 9\pi/2,$

$21/2 \le m < 27/2,\ m \in Z,$

$10{,}5 \le m < 13{,}5,\ m \in Z,$

$m = 10;\ 11;\ 12,$

$x = 10\pi/3,\ x = 11\pi/3,\ x = 12\pi/3$

Ответ : а) $\pi m/3,\ m \in Z;$

б) $10\pi/3;\ 11\pi/3;\ 12\pi/3$

8. Решить уравнение $\sqrt{1-\sin^2 x} = \sin x$
Найти его корни на промежутке $[5\pi/2;\ 4\pi]$

Решим уравнение $\sqrt{1-\sin^2 x} = \sin x$.

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ 1 - \sin^2 x = \sin^2 x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ 2\sin^2 x = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x = \sqrt{2}/2;\ \sin x = -\sqrt{2}/2; \end{cases} \qquad \sin x = \sqrt{2}/2$$

$\sin x = \sqrt{2}/2$

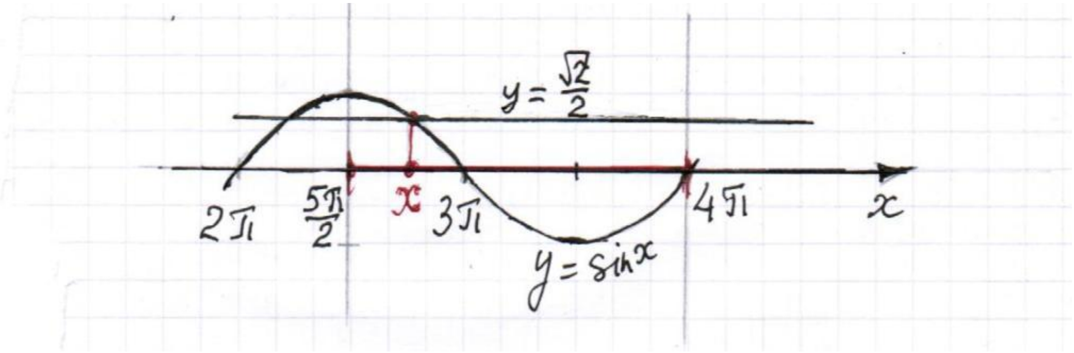
$x = (-1)^k \pi/4 + \pi k,\ k \in Z$

Проведём отбор корней на отрезке [5π/2; 4π]

$x=(-1)^k \pi/4 + \pi k,\ k\in Z$

$\sin x = \sqrt{2}/2$

$y = \sin x$ и $y=\sqrt{2}/2$



$5\pi/2 + \pi/4 = 11\pi/4$

Ответ: а) $(-1)^k \pi/4 + \pi k,\ k\in Z$;б) $11\pi/4$

9. Решить уравнение $(\sin 2x + 2\sin^2 x)/\sqrt{-\cos x} = 0$ Найти его корни на промежутке $[-5\pi; -7\pi/2]$

Решим уравнение

$(\sin 2x + 2\sin^2 x)/\sqrt{-\cos x} = 0.$

1) ОДЗ : $\cos x < 0$,

$\pi/2 + 2\pi n < x < 3\pi/2 + 2\pi n, n \in Z$

2) $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0,$

$2\sin x \cdot \cos x + 2\sin^2 x = 0,$

$\sin x(\cos x + \sin x) = 0,$

$\sin x = 0$, $\mathbf{x = \pi n, n \in Z}$

или

$\cos x + \sin x = 0 \mid : \cos x,$

tg x= -1, $\mathbf{x = -\pi/4 + \pi n, n \in Z}$

С учётом ОДЗ

$\mathbf{x = \pi n, n \in Z}$, $\mathbf{x = \pi + 2\pi n, n \in Z;}$

$\mathbf{x = -\pi/4 + \pi n, n \in Z,}$

$\mathbf{x = 3\pi/4 + 2\pi n, n \in Z}$

Отберём корни на заданном отрезке

Отберём корни на заданном отрезке $[-5\pi; -7\pi/2]$

$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$;

$-5\pi \leq \pi + 2\pi n \leq -7\pi/2$,

$-5-1 \leq 2n \leq -7/2-1$,

$-3 \leq n \leq -9/4,\ n \in Z$

$n = -3$, $x = \pi - 6\pi = -5\pi$

$x = 3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z$

$-5\pi \leq 3\pi/4 + 2\pi n \leq -7\pi/2$

$-23/8 \leq n \leq -17/8$, **нет такого целого n.**

Ответ: а) $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$;

$3\pi/4 + 2\pi n,\ n \in Z$;

б) -5π.

10. Решить уравнение 2sin2x =4cos x –sinx+1 Найти его корни на промежутке [π/2; 3π/2]

Решим уравнение

$2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1$

$2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1$,

$4\sin x \cdot \cos x - 4\cos x + \sin x - 1 = 0$,

$4\cos x(\sin x - 1) + (\sin x - 1) = 0$,

$(\sin x - 1)(4\cos x + 1) = 0$,

$\sin x - 1 = 0$, $\sin x = 1$, $\mathbf{x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in Z}$

или

$4\cos x + 1 = 0$, $\cos x = -0{,}25$

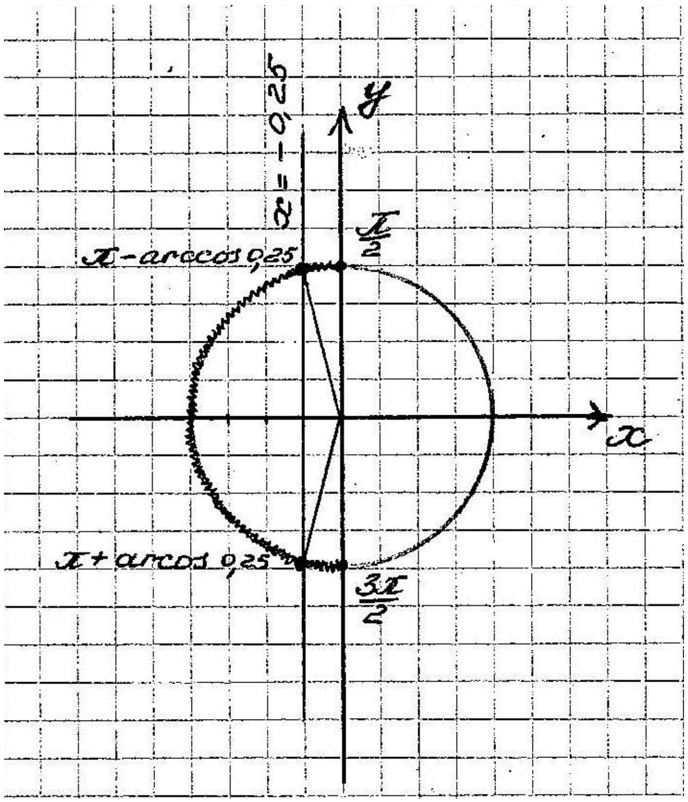
$x = \pm(\pi - \arccos(0{,}25)) + 2\pi n,\ n \in Z$

Запишем корни этого уравнения иначе

$x = \pi - \arccos(0{,}25) + 2\pi n,$

$x = -(\pi - \arccos(0{,}25)) + 2\pi n,\ n \in Z$

Отберём корни с помощью окружности



$x = \pi/2+2\pi n$, $n \in Z$, $x = \pi/2$;

$x = \pi$-arccos(0,25)+2 πn,

x=-(π-arccos(0,25)) +2 πn,
$n \in Z$,

$x = \pi$ - arccos(0,25),

$x = \pi$ + arccos(0,25)

Ответ: а) $\pi/2+2\pi n$,

π-arccos(0,25)+2 πn,

-(π-arccos(0,25)) +2 πn, $n \in Z$;

б) $\pi/2$;

π-arccos(0,25);π+arccos(0,25)