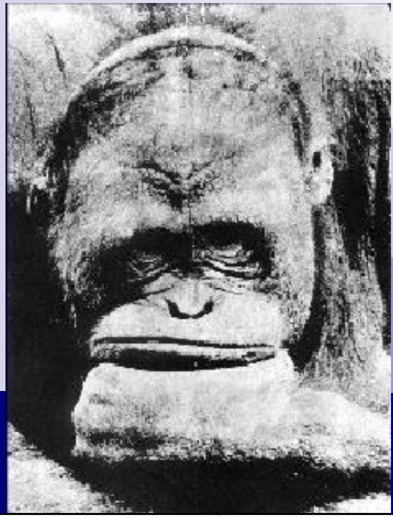
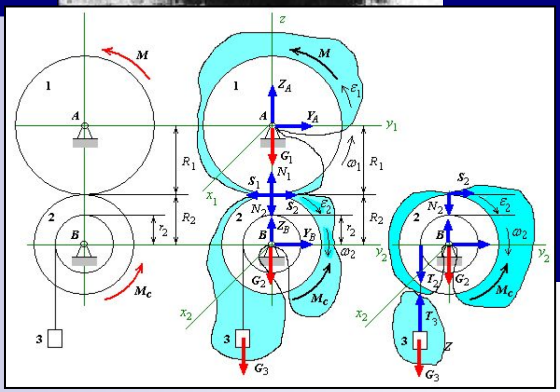
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
Кафедра теоретической механики
Научно-технический центр транспортных технологий

Бондаренко А.Н.



Курс лекций по теоретической механике



Динамика (I часть)

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СЖД, ПГС и СДМ в НИИЖТе и МИИТе (1974-2006 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме трех семестров.

Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional.

Замечания и предложения можно послать по e-mail: bond@miit.ru .

Москва - 2007

Содержание

- **Лекция 1**. Введение в динамику. Законы и аксиомы динамики материальной точки. Основное уравнение динамики. Дифференциальные и естественные уравнения движения. Две основные задачи динамики. Примеры решения прямой задачи динамики
- **Лекция 2**. Решение обратной задачи динамики. Общие указания к решению обратной задачи динамики. Примеры решения обратной задачи динамики. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, без учета сопротивления воздуха.
- **Лекция 3.** Динамика механической системы. Механическая система. Внешние и внутренние силы. Центр масс системы. Теорема о движении центра масс. Законы сохранения. Пример решения задачи на использование теоремы о движении центра масс.
- **Лекция 4.** Импульс силы. Количество движения. Теорема об изменении количества движения. Законы сохранения. Теорема Эйлера. Пример решения задачи на использование теоремы об изменении количества движения. Момент количества движения. Теорема об изменении момента количества движения.. Законы сохранения. Элементы теории моментов инерции. Кинетический момент твердого тела. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела. Пример решения задачи на использование теоремы об изменении момента количества движения системы.

Рекомендуемая литература

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.2. М.: Высшая школа. 1977 г. 368 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука. 1986 г. 416 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ /Под ред. А.А. Яблонского. М.:Высшая школа. 1985 г. 366 с.
4. Бондаренко А.Н. “Теоретическая механика в примерах и задачах. Динамика” (электронное пособие www.miit.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm), 2004 г.

Лекция 1

Динамика

Динамика материальной точки | Динамика механической системы

Аналитическая механика

- **Динамика** – раздел теоретической механики, изучающий механическое движение с самой общей точки зрения. Движение рассматривается в связи с действующими на объект силами.

Раздел состоит из трех отделов:

- **Динамика точки** – изучает движение материальной точки с учетом сил, вызывающих это движение.

Основной объект - **материальная точка** – **материальное тело, обладающей массой, размерами которого можно пренебречь.**

- **Динамика механической системы** – изучает движение совокупности материальных точек и твердых тел, объединяемых общими законами взаимодействия, с учетом сил, вызывающих это движение.
- **Аналитическая механика** – изучает движение несвободных механических систем с использованием общих аналитических методов.

Основные допущения:

– существует **абсолютное пространство** (обладает чисто геометрическими свойствами, не зависящими от материи и ее движения .
– существует **абсолютное время** (не зависит от материи и ее движения).
Отсюда вытекает:
– **существует абсолютно неподвижная система отсчета**.
– **время не зависит от движения системы отсчета**.
– **массы движущихся точек не зависят от движения системы отсчета.**

Эти допущения используются в классической механике, созданной Галилеем и Ньютоном. Она имеет до сих пор достаточно широкую область применения, поскольку рассматриваемые в прикладных науках механические системы не обладают такими большими массами и скоростями движения, для которых необходим учет их влияния на геометрию пространства, время, движение, как это делается в релятивистской механике (теории относительности).

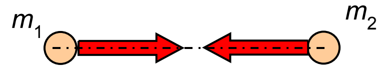
- **Основные законы динамики** – впервые открытые Галилеем и сформулированные Ньютоном составляют основу всех методов описания и анализа движения механических систем и их динамического взаимодействия под действием различных сил.
- **Закон инерции (закон Галилея-Ньютона)** – **Изолированная материальная точка тело сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, приложенные силы не заставят ее изменить это состояние**. Отсюда следует эквивалентность состояния покоя и движения по инерции (закон относительности Галилея). Система отсчета, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется **инерциальной**. Свойство материальной точки стремиться сохранить неизменной скорость своего движения (свое кинематическое состояние) называется **инертностью**.
- **Закон пропорциональности силы и ускорения (Основное уравнение динамики - II закон Ньютона)** – **Ускорение, сообщаемое материальной точке силой, прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе этой точки**: или

Здесь *m* – масса точки (мера инертности), измеряется в кг,
численно равна весу, деленному на ускорение свободного падения:

F – действующая сила, измеряется в Н (1 Н сообщает точке массой 1 кг ускорение 1 м/с^2, 1 Н = 1/9.81 кг-с).

Лекция 1 (продолжение – 1.2)

- **Закон равенства действия и противодействия (III закон Ньютона)** – **Всякому действию соответствует равное по величине и противоположно направленное противодействие**:



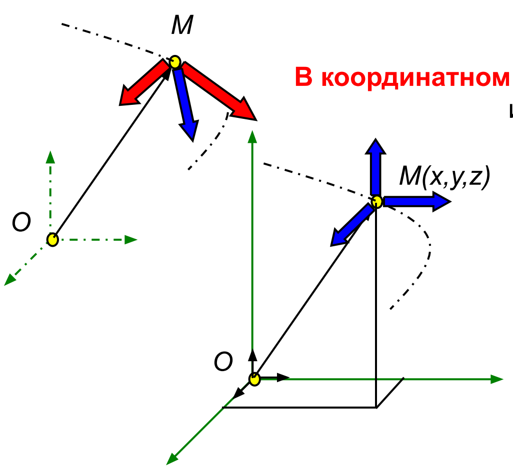
Закон справедлив для любого кинематического состояния тел. Силы взаимодействия, будучи приложенные к разным точкам (телам)
не уравновешиваются.

- **Закон независимости действия сил** – **Ускорение материальной точки под действием нескольких сил равно геометрической сумме ускорений точки от действия каждой из сил в отдельности:** или

- **Основное уравнение динамики** : - соответствует **векторному** способу задания движения точки.

- **Дифференциальные уравнения движения материальной точки:**

Подставим ускорение точки при векторном задании движения в основное уравнение динамики:



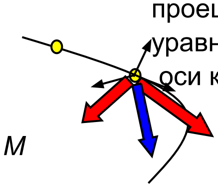
- **дифференциальное уравнение движения точки в векторном виде.**

В координатном виде: Используем связь радиуса-вектора с координатами и вектора силы с проекциями:

После группировки векторное соотношение распадается на три скалярных уравнения: или: **- дифференциальные уравнения движения точки в координатном виде.**

Этот результат может быть получен формальным проецированием векторного дифференциального уравнения (1).

- **Естественные уравнения движения материальной точки** – получаются проецированием векторного дифференциального уравнения движения на естественные (подвижные) оси координат: или:



- естественные уравнения движения точки.

Лекция 1 (продолжение – 1.3)

- **Две основные задачи динамики:**

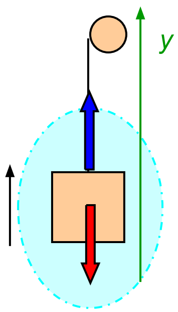
1. Прямая задача: Задано движение (уравнения движения, траектория). Требуется определить силы, под действием которых происходит заданное движение.

2. Обратная задача: Заданы силы, под действием которых происходит движение. Требуется найти параметры движения (уравнения движения, траекторию движения).

Обе задачи решаются с помощью **основного уравнения динамики** и проекции его на координатные оси. Если рассматривается движение несвободной точки, то как и в статике, используется **принцип освобождаемости от связей**. В результате реакции связей включаются в состав сил, действующих на материальную точку. Решение первой задачи связано с операциями дифференцирования. Решение обратной задачи требует интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений и это значительно сложнее, чем дифференцирование. Обратная задача сложнее прямой задачи.

- **Решение прямой задачи динамики** - рассмотрим на примерах:

Пример 1. Кабина весом ***G*** лифта поднимается тросом с ускорением ***a*** . Определить натяжение троса.



1. Выбираем объект (кабина лифта движется поступательно и ее можно рассматривать как материальную точку).

2. Отбрасываем связь (трос) и заменяем реакцией ***R***.

3. Составляем основное уравнение динамики:

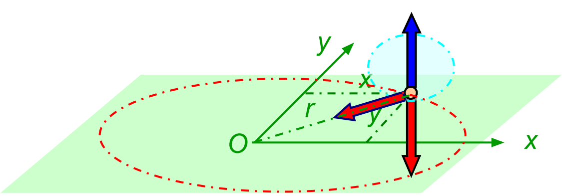
4. Проецируем основное уравнение динамики на ось *y*:

Определяем реакцию троса:

Определяем натяжение троса:

При равномерном движении кабины $a_y = 0$ и натяжение троса равно весу: $T = G$.
При обрыве троса $T = 0$ и ускорение кабины равно ускорению свободного падения: $a_y = -g$.

Пример 2. Точка массой *m* движется по горизонтальной поверхности (плоскости Oxy) согласно уравнениям: $x = a \cdot \cos kt$, $y = b \cdot \cos kt$. Определить силу, действующую на точку.



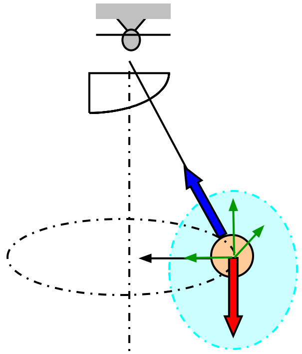
Таким образом, величина силы пропорциональна расстоянию точки до центра координат и направлена к центру по линии, соединяющей точку с центром.
Траектория движения точки представляет собой эллипс с центром в начале координат:

Определяем проекции силы:

Модуль силы:

Направляющие косинусы:

Лекция 1 (продолжение 1.4)



Пример 3: Груз весом ***G*** подвешен на тросе длиной l и движется по круговой траектории в горизонтальной плоскости с некоторой скоростью. Угол отклонения троса от вертикали равен α. Определить натяжение троса и скорость груза.

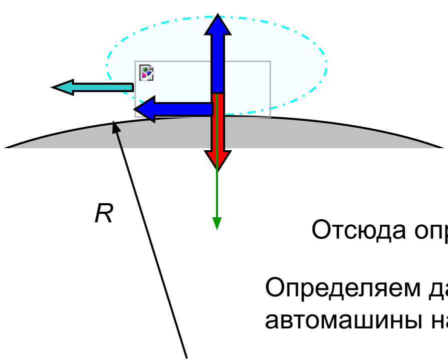
1. Выбираем объект (груз).
2. Отбрасываем связь (трос) и заменяем реакцией ***R***.
3. Составляем основное уравнение динамики:
4. Проецируем основное уравнение динамики на оси τ, n, b:

Из третьего уравнения определяем реакцию троса:

Определяем натяжение троса:

Подставляем значение реакции троса, нормального ускорения во второе уравнение и определяем скорость груза:

Пример 4: *Автомашина весом G движется по выпуклому мосту (радиус кривизны равен R) со скоростью V*. Определить давление автомашины на мост.



1. Выбираем объект (автомашина, размерами пренебрегаем и рассматриваем как точку).
2. Отбрасываем связь (шероховатую поверхность) и заменяем реакциями ***N*** и силой трения ***F***$_{тр}$.
3. Составляем основное уравнение динамики:
4. Проецируем основное уравнение динамики на ось n:

Отсюда определяем нормальную реакцию:

Определяем давление автомашины на мост:

Отсюда можно определить скорость, соответствующую нулевому давлению на мост (Q = 0):

- **Решение обратной задачи динамики** – В общем случае движения точки силы, действующие на точку, являются переменными, зависящими от времени, координат и скорости. Движение точки описывается системой трех дифференциальных уравнений второго порядка:

После интегрирования каждого из них будет **шесть постоянных** $C_1, C_2, \ldots, C_6$:

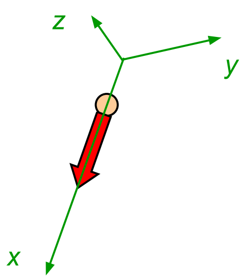
Значения постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_6$ находятся из шести начальных условий при $t = 0$:

После подстановки найденных значений постоянных получаем:

Таким образом, **под действием одной и той же системы сил материальная точка может совершать целый класс движений, определяемых начальными условиями**.

Начальные координаты учитывают исходное положение точки. Начальная скорость, задаваемая проекциями, учитывает влияние на ее движение по рассматриваемому участку траектории сил, действовавших на точку до прихода на этот участок, т.е. начальное кинематическое состояние.

Пример 1 решения обратной задачи: Свободная материальная точка массы *m* движется по действием силы ***F***, **постоянной по модулю и величине.** . В начальный момент скорость точки составляла v_0 и совпадала по направлению с силой. Определить уравнение движение точки.



1. Составляем основное уравнение динамики:

2. Выберем декартову систему отсчета, направляя ось x вдоль направления силы и спроецируем основное уравнение динамики на эту ось: или

3. Понижаем порядок производной:

4. Разделяем переменные:

5. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения:

6. Представим проекцию скорости как производную координаты по времени:

7. Разделяем переменные:

8. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения:

9. Для определения значений постоянных C1 и C2 используем начальные условия $t = 0$, $v_x = v_0$, $x = x_0$:

В итоге получаем уравнение равнопеременного движения (по оси *x*):

Лекция 2 (продолжение 2.2)

- **Общие указания к решению прямой и обратной задачи. Порядок решения:**

1. Составление дифференциального уравнения движения:

1.1. **Выбрать систему координат** – прямоугольную (неподвижную) при неизвестной траектории движения, естественную (подвижную) при известной траектории, например, окружность или прямая линия. В последнем случае можно использовать одну прямолинейную координату. Начало отсчета совместить с начальным положением точки (при t = 0) или с равновесным положением точки, если оно существует, например, при колебаниях точки.

1.2. **Изобразить точку** в положении, соответствующем произвольному моменту времени (при $t > 0$) так, чтобы координаты были положительными (s > 0, x > 0). При этом считаем также, что проекция скорости в этом положении также положительна. В случае колебаний проекция скорости меняет знак, например, при возвращении к положению равновесия. Здесь следует принять, что в рассматриваемый момент времени точка удаляется от положения равновесия. Выполнение этой рекомендации важно в дальнейшем при работе с силами сопротивления, зависящими от скорости.

1.3. **Освободить материальную точку от связей**, **заменить** их действие реакциями, **добавить** активные силы.

1.4. **Записать основной закон динамики** в векторном виде, **спроецировать** на выбранные оси, **выразить** задаваемые или реактивные силы через переменные время, координаты или скорости, если они от них зависят.

2. Решение дифференциальных уравнений:

2.1. **Понизить производную**, если уравнение не приводится к каноническому (стандартному) виду. например: или

2.2. **Разделить переменные**, например: или

2.3. Если в уравнении три переменных, то **сделать замену переменных**, например: и затем разделить переменные.

2.4. **Вычислить неопределенные интегралы** в левой и правой частях уравнения, например:

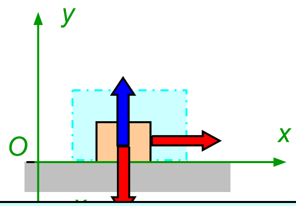
Используя начальные условия, например, $t = 0$, $v_x = v_{x0}$, **определить постоянную интегрирования**:

Замечание. Вместо вычисления неопределенных интегралов можно **вычислить определенные интегралы с переменным верхним пределом.** Нижние пределы представляют начальные значения переменных (начальные условия) .Тогда не требуется отдельного нахождения постоянной, которая автоматически включается в решение, например:

2.5. **Выразить скорость** через производную координаты по времени, например, и **повторить пункты 2.2 -2.4**

Замечание. Если уравнение приводится к каноническому виду, имеющему стандартное решение, то это готовое решение и используется. Постоянные интегрирования по прежнему находятся из начальных условий. См., например, колебания (лекция 4, стр.8).

Пример 2 решения обратной задачи: **Сила зависит от времени.** Груз весом ***P*** начинает двигаться по гладкой горизонтальной поверхности под действием силы ***F***, величина которой пропорциональна времени (*F* = *kt*). Определить пройденное расстояние грузом за время *t*.



1. Выбираем систему отсчета (декартовые координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:

2. Принимаем объект движения за материальную точку (тело движется поступательно), освобождаем от связи (опорной плоскости) и заменяем реакцией (нормальной реакцией гладкой поверхности):

3. Составляем основное уравнение динамики:

4. Проецируем основное уравнение динамики на ось *x* : или

6. Разделяем переменные:

Максимальная высота полета → ∞ при обращении знаменателя в нуль:

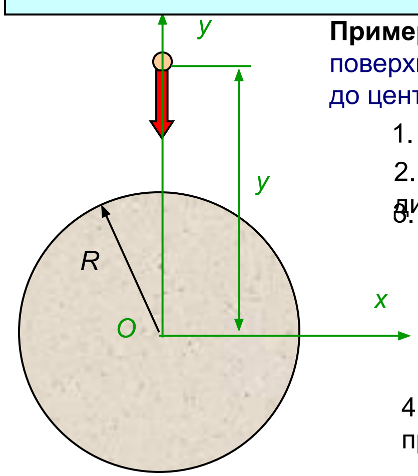
7. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения:

8. Подставляем пределы:

В итоге получаем выражение для скорости в функции от координаты *y* :

Отсюда при постановке радиуса Земли и ускорения свободного падения получается II космическая скорость:

Максимальную высоту полета можно найти приравнивая скорость нулю:



Пример 3 решения обратной задачи: **Сила зависит от координаты.** Материальная точка массой *m* брошена вверх с поверхности Земли со скоростью v_0. Сила притяжения Земли обратно пропорциональна квадрату расстояния от точки до центра тяготения (центра Земли). Определить зависимость скорости от расстояния *y* до центра Земли.

1. Выбираем систему отсчета (декартовые координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:

2. Составляем основное уравнение динамики:

3. Проецируем основное уравнение динамики на ось *y* : или

Коэффициент пропорциональности можно найти, используя вес точки на поверхности Земли:

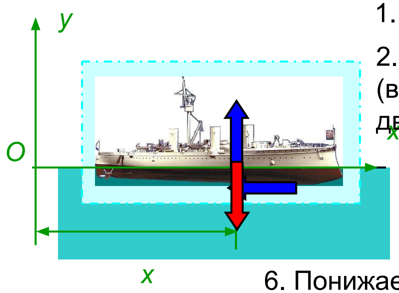
Отсюда дифференциальное уравнение имеет вид: или

4. Понижаем порядок производной:

5. Делаем замену переменной:

Лекция 2 (продолжение 2.4)

Пример 2 решения обратной задачи: **Сила зависит от скорости**. Судно массы *m* имело скорость *v*0. Сопротивление воды движению судна пропорционально скорости. Определить время, за которое скорость судна упадет вдвое после выключения двигателя, а также пройденное расстояние судном до полной остановки.



1. Выбираем систему отсчета (декартовые координаты) так, чтобы тело имело положительную координату:

2. Принимаем объект движения за материальную точку (судно движется поступательно), освобождаем от связей (воды) и заменяем реакцией (выталкивающей силой – силой Архимеда), а также силой сопротивления движению.

3. Добавляем активную силу (силу тяжести).

4. Составляем основное уравнение динамики:

5. Проецируем основное уравнение динамики на ось *x* : или

6. Понижаем порядок производной:

7. Разделяем переменные:

8. Вычисляем интегралы от обоих частей уравнения:

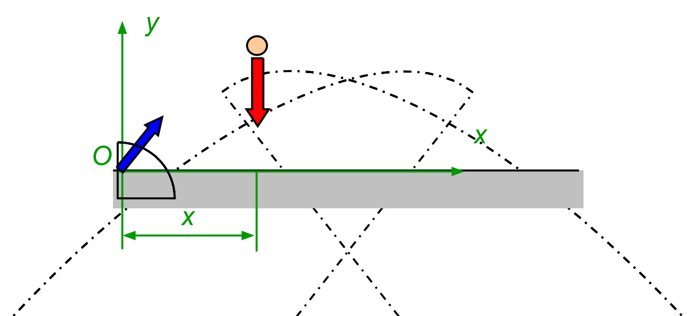
9. Подставляем пределы:

Исключив время из уравнений движения получаем уравнение траектории:

Время полета определяем приравниванием координаты *y* нулю:

Дальность полета определяем подстановкой времени полета:

- **Движение точки, брошенной под углом к горизонту, в однородном поле силы тяжести без учета сопротивления воздуха**



Лекция 3

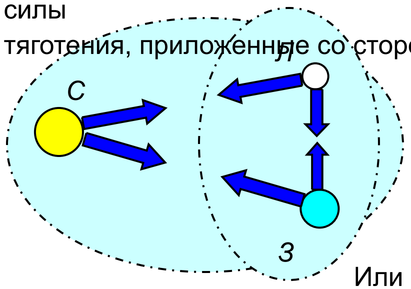
- **Динамика механической системы.**
- **Система материальных точек или механическая система** – Совокупность материальных точек или материальных тех, объединяемых общими законами взаимодействия (положение или движение каждой из точек или тела зависит от положения и движения всех остальных)
- **Система свободных точек** - движение которых не ограничивается никакими связями (например, планетная система, в которой планеты рассматриваются как материальные точки).
- **Система несвободных точек или несвободная механическая система** – движение материальных точек или тел ограничиваются наложенными на систему связями (например, механизм, машина и т.п.).

- **Силы, действующие на систему**. В дополнение к ранее существовавшей классификации сил (активные и реактивные силы) вводится новая классификация сил:

1. **Внешние силы (e)** – действующие на точки и тела системы со стороны точек или тел, не входящих в состав данной системы.
2. **Внутренние силы (i)** – силы взаимодействия между материальными точками или телами, входящими в данную систему.

Одна и та же сила может являться как внешней, так и внутренней силой. Все зависит от того, какая механическая система рассматривается.

Например: В системе Солнце, Земля и Луна все силы тяготения между ними являются внутренними. При рассмотрении системы Земля и Луна силы
тяготения, приложенные со стороны Солнца – внешние.



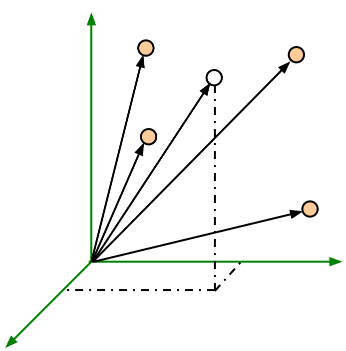
На основании закона действия и противодействия каждой внутренней силе Fk соответствует другая внутренняя сила Fk', равная по модулю и противоположная по направлению.

Из этого следуют **два замечательных свойства внутренних сил**:

1. **Главный вектор всех внутренних сил системы равен нулю**:
2. **Главный момент всех внутренних сил системы относительно любого центра равен нулю**:

Или в проекциях на координатные оси:

Замечание. Хотя эти уравнения похожи на уравнения равновесия, они таковыми не являются, поскольку внутренние силы приложены к различным точкам или телам системы и могут вызывать движение этих точек (тел) относительно друг друга. Из этих уравнений следует, что внутренние силы не влияют на движение системы, рассматриваемой как одно целое.



- **Центр масс системы материальных точек**. Для описания движения системы в целом вводится геометрическая точка, называемой **центром масс**, радиус-вектор которой определяется выражением , где *M* – масса всей системы:

Или в проекциях на координатные оси:

Формулы для центра масс аналогичны формулам для центра тяжести. Однако, понятие центра масс более общее, поскольку оно не связано с силами тяготения или силами тяжести.

Лекция 3 (продолжение 3.2)

- **Теорема о движении центра масс системы** – Рассмотрим систему *n* материальных точек. Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие равнодействующие F_k^e и F_k^i. Запишем для каждой точки основное уравнение динамики: или

Просуммируем эти уравнения по всем точкам:

В левой части уравнения внесем массы под знак производной и заменим сумму производных на производную суммы:

Из определения центра масс:

Подставим в полученное уравнение:

После вынесения массы системы за знак производной получаем или:

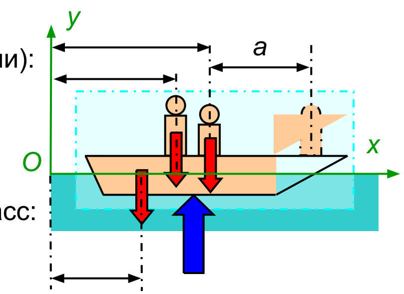
Произведение массы системы на ускорение ее центра массе равно главному вектору внешних сил.

В проекциях на координатные оси:

Центр масс системы движется как материальная точка массой, равной массе всей системы, к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Пример: Два человека массами m_1 и m_2 находятся в лодке массой m_3. В начальный момент времени лодка с людьми находилась в покое. Определить перемещение лодки, если человек массой m_2 пересел к носу лодки на расстояние *a*.

1. Объект движения (лодка с людьми):
2. Отбрасываем связи (воду):
3. Заменяем связь реакцией:
4. Добавляем активные силы:
5. Записываем теорему о центре масс:



Проецируем на ось *x* :

Лодка переместится на расстояние l в противоположную сторону.

Следствия из теоремы о движении центра масс системы (законы сохранения):

1. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ главный вектор внешних сил системы равен нулю, $\boldsymbol{R}^e = 0$, то скорость центра масс постоянна, $\boldsymbol{v}_C$ = **const** (центр масс движется равномерно прямолинейно – **закон сохранения движения центра масс**).

2. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ проекция главного вектора внешних сил системы на ось *x* равна нулю, $R_x^e = 0$, то скорость центра масс по оси *x* постоянна, v_{Cx} = const (центр масс движется по оси равномерно).

Аналогичные утверждения справедливы для осей y и z.

3. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ главный вектор внешних сил системы равен нулю, $\boldsymbol{R}^e = 0$, и в начальный момент скорость центра масс равна нулю,

Определим на какое расстояние надо пересесть человеку массы m_1, чтобы лодка осталась на месте:

Аналогичные утверждения справедливы для осей y и z.

Лекция 4

- **Импульс силы** – **мера механического взаимодействия**, характеризующая передачу механического движения со стороны действующих на точку сил за данный промежуток времени:

  В проекциях
  на координатные оси:

  В случае постоянной силы:

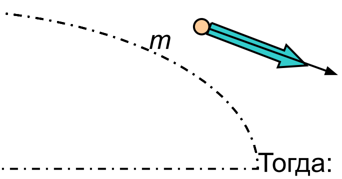
  В проекциях на координатные оси:

- **Импульс равнодействующей** – **равен геометрической сумме импульсов приложенных к точке сил за один и тот же промежуток времени**:

  Умножим на *dt*:

  Проинтегрируем на данном промежутке
  времени:

- **Количество движения точки** – мера механического движения, определяемая вектором, **равным произведению массы точки на вектор ее скорости:**



- **Количество движения системы материальных точек** – **геометрическая сумма количеств движения материальных точек:**

  По определению центра масс:

  Тогда:

  Вектор количества движения системы равен произведению массы всей системы на вектор скорости центра масс системы.

  В проекциях на координатные оси:

- **Теорема об изменении количества движения системы** – Рассмотрим систему *n* материальных точек. Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие равнодействующие $\boldsymbol{F}_k^e$ и $\boldsymbol{F}_k^i$. Запишем для каждой точки основное уравнение динамики: или

  Просуммируем эти уравнения
  по всем точкам:

  В левой части уравнения внесем массы под знак производной
  и заменим сумму производных на производную суммы:

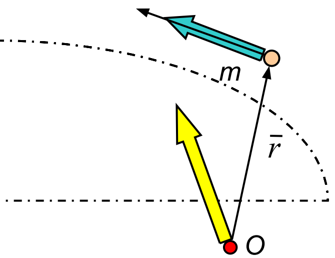
  Из определения количества движения системы:

  Производная вектора количества движения системы по времени равна главному вектору внешних сил системы.

  В проекциях
  на координатные оси:

- **Момент количества движения точки или кинетический момент движения относительно некоторого центра** – мера механического движения, определяемая вектором, **равным векторному произведению радиуса-вектора материальной точки на вектор ее количества движения:**

В проекциях на оси:



- **Кинетический момент системы материальных точек относительно некоторого центра – геометрическая сумма моментов количеств движений всех материальных точек относительно этого же центра:**

В проекциях на оси:

- **Теорема об изменении момента количества движения системы** – Рассмотрим систему *n* материальных точек. Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие равнодействующие $\boldsymbol{F}_k^e$ и $\boldsymbol{F}_k^i$. Запишем для каждой точки основное уравнение динамики: или

Умножим векторно каждое из равенств на радиус-вектор слева:

Просуммируем эти уравнения по всем точкам:

Посмотрим, можно ли вынести знак производной
за пределы векторного произведения:

Таким образом, получили:

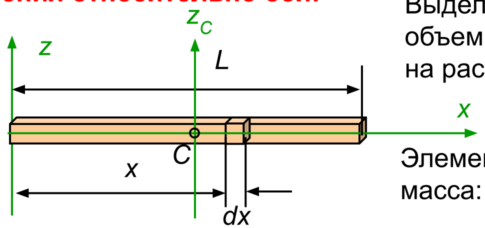
Заменим сумму производных
на производную суммы:

Выражение в скобках есть момент количества движения системы.
Отсюда:
В проекциях
на координатные оси:

Производная вектора момента количества движения системы относительно некоторого центра по времени равна главному моменту внешних сил системы относительно этого же центра.

Производная момента количества движения системы относительно некоторой оси по времени равна главному моменту внешних сил системы относительно этой же оси.

4. Момент инерции однородного стержня постоянного сечения относительно оси:

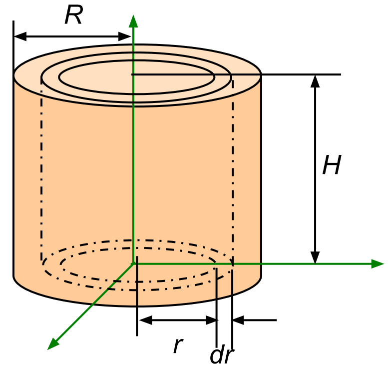


Выделим элементарный объем $dV = Adx$ на расстоянии x:

Элементарная масса:

Для вычисления момента инерции относительно центральной оси (проходящей через центр тяжести) достаточно изменить расположение оси и задать пределы интегрирования ($-L/2$, $L/2$). Здесь продемонстрируем формулу перехода к параллельным осям:

5. Момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно оси симметрии:

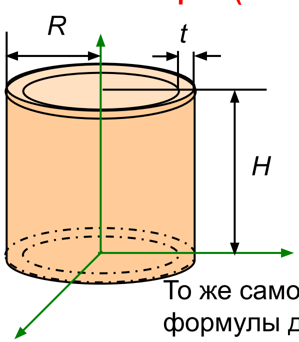


Выделим элементарный объем $dV = 2\pi r dr H$ (тонкий цилиндр радиуса r) :

Элементарная масса:

Здесь использована формула объема цилиндра $V=\pi R^2 H$. Для вычисления момента инерции пустотелого (толстого) цилиндра достаточно задать пределы интегрирования от R_1 до R_2 ($R_2 > R_1$):

6. Момент инерции тонкого цилиндра относительно оси симметрии ($t \ll R$):

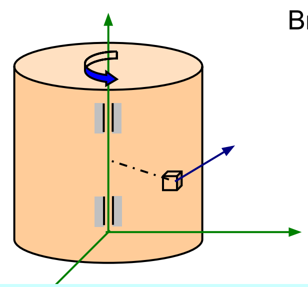


В силу малости толщины цилиндра считаем, что все точки находятся на одинаковом расстоянии R до оси и интегрирования не требуется. Объем $V = 2\pi R t H$. (тонкий цилиндр радиуса R с толщиной стенки t).

То же самое можно получить с использованием формулы для толстостенного цилиндра, учитывая малость t:

Поскольку высота цилиндров в результате не входит в формулы моментов инерции, то они остаются справедливыми для тонкого сплошного диска и обода колеса (тонкого кольца).

- **Кинетический момент твердого тела**



Выделим дискретный малый объем массы Δm_i:

Или переходя к бесконечно малым:

Кинетический момент вращающегося тела равен произведению угловой скорости на момент инерции относительно оси вращения.