

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Меню

1. [Определение](#)
2. [Первый вид](#)
3. [Второй вид](#)
4. [Третий вид](#)
5. [Четвертый вид](#)
6. [Примеры для самостоятельного решения](#)
7. [Ответы](#)

Иррациональными
называются уравнения
вида:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$

**и уравнения, сводящиеся к
этому виду**

1 ВИД

$$\sqrt{f(x)} = a$$



Если $a < 0$, то решений нет

Если $a \geq 0$, то $\begin{cases} f(x) = a^2 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ и $f(x) \geq 0$
лишнее условие

Следовательно:

$$f(x) = a^2$$

Далее...

Пример

Menu

Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 3} = 1$$

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат.

$$x^2 - 3 = 1$$

Перенесем -3 из левой части уравнения в правую и выполним приведение подобных слагаемых.

$$x^2 = 4$$

Полученное неполное квадратное уравнение имеет два корня -2 и 2.

Далее...

Ответ: $x = 2$ и -2

2 ВИД

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$



Если $g(x) \geq 0$ и $f(x) \geq 0$, то

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

лишнее условие

Следовательно:

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Далее...

Пример

Menu

Решить уравнение
Решение.

$$x+1=\sqrt{1-x}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат.

$$\begin{cases} (x+1)^2=1-x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

Запишем условие

Раскроем скобки, перенесем $1-x$ из правой части уравнения в левую и выполним приведение подобных слагаемых.

$$\begin{cases} x^2+2x+1-1+x=0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+3)=0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Получим следующие значения x

$$\begin{cases} x=0 \\ x=-3 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Ответ: $x = 0$

Далее...

3 ВИД



$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$$



Если $g(x) \geq 0$ и $f(x) \geq 0$, то

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

лишнее

одно из ЭТИХ УСЛОВИЙ

Следовательно:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Далее...

Пример



Решить уравнение

$$\sqrt{6x^2 - 3} = \sqrt{5x - 2}$$

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат.

$$\begin{cases} 6x^2 - 3 = 5x - 2 \\ 5x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Запишем условие

Раскроем скобки, перенесем $5x - 2$ из правой части уравнения в левую и выполним приведение подобных слагаемых.

$$\begin{cases} 6x^2 - 5x - 1 = 0 \\ 5x \geq 2 \end{cases}$$

Решив квадратное уравнение, получим следующие значения x

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{6} \\ x = 1 \\ x \geq 0,4 \end{cases}$$

Ответ: $x = 1$

Далее...

4 ВИД



$$\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{\varphi(x)}\right)$$

\uparrow^2

Учитывая что

$$\sqrt{f(x)}$$

имеет смысл при

$$f(x) \geq 0$$

Находим ОДЗ и решаем систему неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$$

записываем условие равносильности и

решаем уравнение

$$\begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$$

Далее...

Пример первый

Menu

Решить уравнение $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}$

Решение.

Запишем ОДЗ

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 0.5 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3} \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат.

$$(\sqrt{x+3})^2 = (\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2})^2$$

$$x+3 = 2x-1+3x-2 + 2\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{3x-2}$$

$$x+3 = 5x-3 + 2\sqrt{2x-1} \sqrt{3x-2}$$

$$3-2x = \sqrt{(2x-1)(3x-2)}$$

записываем условие равносильности и решаем уравнение

$$\begin{cases} \sqrt{(2x-1)(3x-2)} = (3-2x)^2 \\ 3-2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 7 &= 0 \\ x_1 &= 1 \quad x_2 = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$x \geq \frac{2}{3}$$

Далее...

Составляем систему из ОДЗ и условия равносильности и решаем ее

$$\begin{cases} 2x^2 + 5x - 7 = 0 \\ x \leq 1,5 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = -3,5 \\ \frac{2}{3} \leq x \leq 1,5 \end{cases}$$

Ответ: $x = 1$

Далее...



Пример второй

Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$$

Решение способом замены переменной

$$\sqrt{x-2} = y^2 \quad \uparrow^2$$

$$y \geq 0$$

$$x-2 = y^2$$

Тогда

$$x = y^2 + 2 \Rightarrow \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 2 + 1} = \sqrt{y^2 + 3}$$

Подставляем замены в исходное уравнение

$$\sqrt{y^2 + 3} + y = 3$$

$$\sqrt{y^2 + 3} = 3 - y \quad \uparrow^2$$

Далее...

Возведем в квадрат

$$\sqrt{y^2+3} = 3-y \quad |^2$$

$$y^2+3=9-2\cdot 3y+y^2$$

$$6y=9-3$$

$$6y=6$$

$$y=1$$

$$\sqrt{x-2} = 1 \quad |^2$$

$$x-2=1$$

$$x=3$$

Ответ : $x=3$

Далее...

Примеры для самостоятельного решения.

1) $\sqrt{x-20}=4$



2) $\frac{1}{7}\sqrt{200+344}+15=47$



3) $x=\sqrt{x+1}$



4) $\sqrt{7x-3}=x+1$



5) $\sqrt{2-x}=\sqrt{x-3}$



Далее...

№ 1

$$\sqrt{x-20}=4$$

Menu

Решение:

Возведем в квадрат

$$x^2 - 20 = 16$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

Ответ: $x = \pm 6$

Далее...

№ 2

$$\sqrt[3]{200x+344} + 15 = 47$$

$$\sqrt[3]{200x+344} = 32$$

$$\sqrt{200x+344} = 32 \cdot \frac{7}{2}$$

$$\sqrt{200x+344} = 112 \uparrow^2$$

$$200x + 344 = 12544$$

$$200x = 12544 - 344$$

$$200x = 12200$$

$$x = 61$$

ОТВЕТ: $x = 61$

Далее...

№ 3

$$x = \sqrt{x+1}$$

Menu

Возводим в квадрат

$$\begin{cases} x^2 = x+1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Решаем квадратное уравнение

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 3}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Далее...

№ 4

$$\sqrt{7x-3} = x+1 \uparrow^2$$

Menu

Решение:

$$\begin{cases} 7x-3=(x+1)^2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x-3=x^2+2x+1 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+2x-7x+1+3=0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5x+4=0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Находим корни квадратного уравнения

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 1$$

Ответ : $x_1 = 4$ $x_2 = 1$

Далее...

№ 5

$$\sqrt{2-x} = \sqrt{x-3}$$

Menu

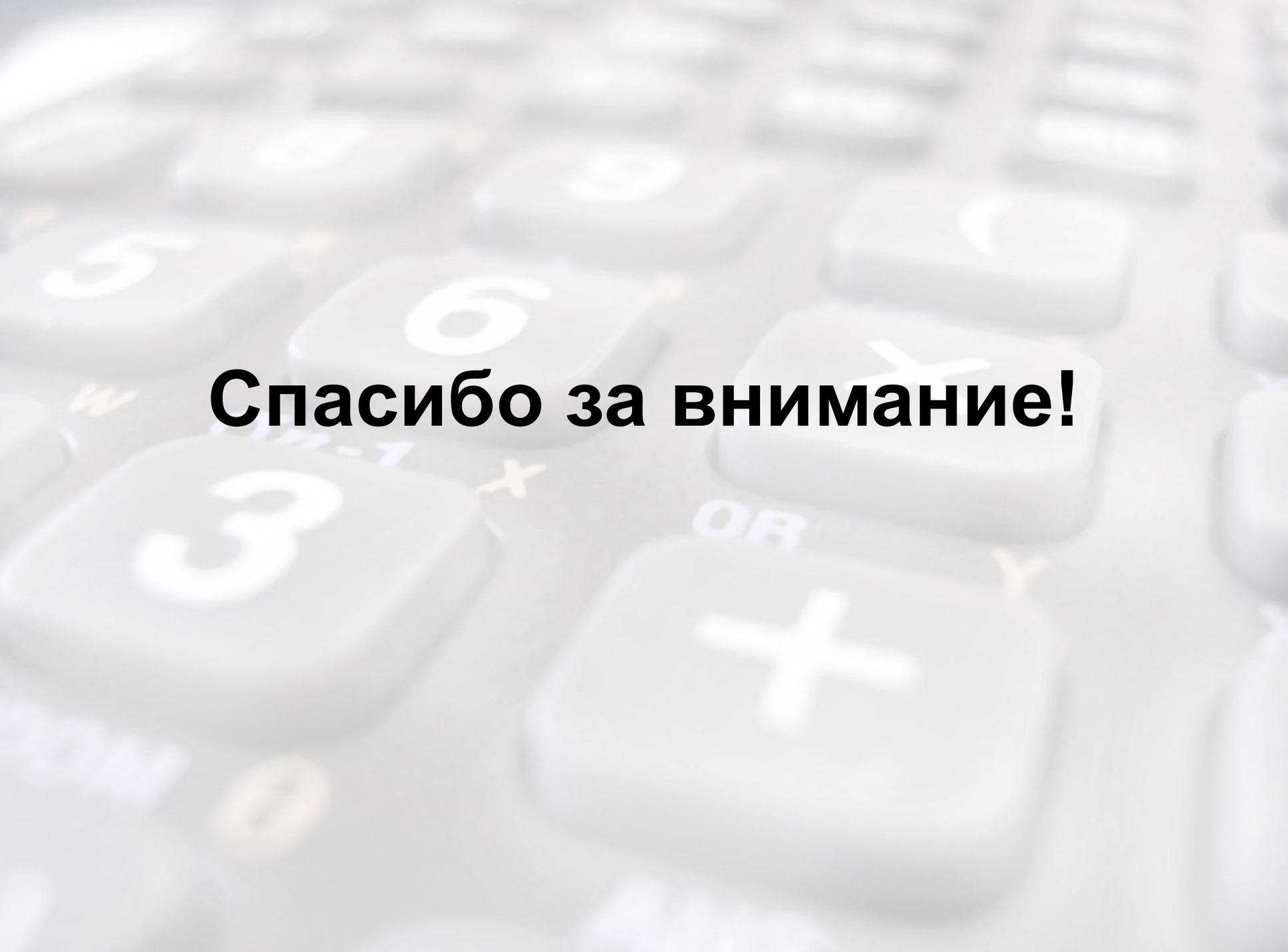
$$\begin{cases} \sqrt{2x} = x-3 \\ x-3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+3 = 2x \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2.5 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Ответ: нет решений

Далее...



Спасибо за внимание!