Глава 4. Системы случайных величин

§4.1. Системы случайных величин

Часто результат опыта описывается не одной случайной величиной X, а несколькими случайными величинами: $X_1, X_2, \ldots, X_n$. В этом случае принято говорить, что указанные случайные величины образуют систему $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Систему двух случайных величин (X, Y) можно изобразить случайной точкой на плоскости.

Событие, состоящее в попадании случайной точки (X, Y) в область D, принято обозначать в виде $(X, Y) \in D$.

Закон распределения системы двух дискретных случайных величин может быть задан с помощью таблицы:

X Y	y_1	y_2	…	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2n}
…	…	…	…	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения *n*-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения *n* неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,

т.е.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n).$$

Примечание. Функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называют также совместной функцией распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

В двумерном случае для случайной величины (X, Y) функция распределения $F(x, y)$ определяется равенством

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Геометрически функция распределения $F(x, y)$ означает вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрант, лежащий левее и ниже точки $M(x, y)$. Правая и верхняя границы области в квадрант не включаются – это означает, что функция распределения непрерывна слева по каждому из аргументов.

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения *n*-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения *n* неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$, Отметим свойства функции распределения двумерной случайной величины, аналогичные свойствам функции распределения одномерной случайной величины.

1. Функция распределения $F(x, y)$ есть неотрицательная функция, заключённая между нулём и единицей, т.е.

$$0 \le F(x, y) \le 1.$$

2. Функция распределения $F(x, y)$ есть неубывающая функция по каждому из аргументов, т.е.

$$\text{при } x_2 > x_1 \; F(x_2 , y) \ge F(x_1, y),$$

$$\text{при } y_2 > y_1 \; F(x, y_2) \ge F(x, y_1).$$

3. Если хотя бы один из аргументов обращается в $-\infty$, то функция распределения $F(x, y)$ равна нулю, т.е. $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$.

4. Если один из аргументов обращается в $+\infty$, то функция распределения $F(x, y)$ становится равной функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x, +\infty) = F_1(x),$$

$$F(+\infty, y) = F_2(y),$$

где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ – функции распределения случайных величин X и Y, т.е.

$$F_1(x) = P(X < x), F_2(y) = P(Y < y).$$

5. Если оба аргумента равны $+\infty$, то функция распределения равна единице: $F(+\infty,+\infty) = 1$.

Закон распределения системы непрерывных случайных величин (X, Y) будем задавать с помощью функции плотности вероятности $f(x, y)$.

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения n неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения n неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,

где $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, $y_1 < y_2 < \dots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения n неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения *n*-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения *n* неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,

Математические ожидания m_x и m_y можно найти и проще, если случайные величины X и Y независимы. В этом случае из законов распределения этих случайных величин можно определить математические ожидания m_x и m_y по формулам, приведенным в §3.2.1, для дискретных и непрерывных случайных.

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения *n*-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения *n* неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения n неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, $\ldots$, $X_n < x_n$, Корреляционным (ковариационным) моментом СВ X и Y называется число

K(x,y)=M{(X-M[X])(Y-M[Y])}=M[XY]-M[X]M[Y].

Для дискретных СВ: K(x,y)= $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - m_x)(y_j - m_y)p_{ij}$

Для непрерывных СВ: K(x,y)=

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)p(xy)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)dF(xy)$$

Случайные величины X и Y называются независимыми, если вероятность одной из них принять значение, лежащее в любом промежутке области её значений, не зависит от того, какое значение приняла другая величина. В этом случае

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

Ковариация двух случайных величин характеризует как степень зависимости случайных величин, так и их рассеяние вокруг точки (m_x, m_y).

где $x_1 < x_2 < ... < x_m$, $y_1 < y_2 < … < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения *n*-мерной случайной величины $(X_1, X_2, …, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, …, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения *n* неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,

- где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения *n*-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения *n* неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,

Свойства коэффициента корреляции:

1. Коэффициент корреляции удовлетворяет условию: $-1 \le r_{xy} \le 1$.

2. Если случайные величины X и Y независимы, то $r_{xy} = 0$.

3. Если случайные величины X и Y связаны точной линейной зависимостью

$Y=aX+b$, то $r_{xy} = 1$ при $a > 0$ и

$r_{xy} = -1$ при $a < 0$.

Пример. В двух ящиках находятся по шесть шаров; в первом ящике: 1 шар с №1, 2 шара с №2, 3 шара с №3; во втором ящике: 2 шара с №1, 3 шара с №2, 1 шар с №3. Пусть X – номер шара, вынутого из первого ящика, Y – номер шара, вынутого из второго ящика. Из каждого ящика вынули по шару. Составить таблицу закона распределения системы случайных величин (X, Y). Найти математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y. Определить коэффициент корреляции.

Решение.

Случайная точка (1, 1) имеет кратность $1 \times 2 = 2$;

– // –	(1, 2)	– // –	$1 \times 3 = 3$;
– // –	(1, 3)	– // –	$1 \times 1 = 1$;
– // –	(2, 1)	– // –	$2 \times 2 = 4$;
– // –	(2, 2)	– // –	$2 \times 3 = 6$;
– // –	(2, 3)	– // –	$2 \times 1 = 2$;
– // –	(3, 1)	– // –	$3 \times 2 = 6$;
– // –	(3, 2)	– // –	$3 \times 3 = 9$;
– // –	(3, 3)	– // –	$3 \times 1 = 3$.

Всего случайных точек $6 \times 6 = 36$ (n-кратную точку принимаем за n точек). Так как отношение кратности точки ко всему количеству точек равно вероятности появления этой точки, то таблица закона распределения системы случайных величин имеет вид

X Y	1	2	3
1	1/18	1/12	1/36
2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1/12

Сумма всех вероятностей, указанных в таблице, равна единице.

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения n неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,

Точка (7/3; 11/6) является центром рассеивания для заданной системы (X, Y). Так как случайные величины X и Y независимы, то математические ожидания m_x и m_y можно подсчитать проще, используя ряды распределения:

x_i	1	2	3
p_i	1/6	1/3	1/2

- где $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, $y_1 < y_2 < \dots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

y_i	1	2	3
p_i	1/3	1/2	1/6

Функцией распределения *n*-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения *n* неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,

- где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

$\tilde{X}$ \ $\tilde{Y}$	–5/6	1/6	7/6
–4/3	1/18	1/12	1/36
–1/3	1/9	1/6	1/18
2/3	1/6	1/4	1/12

Функцией распределения *n*-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения *n* неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения *n*-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения *n* неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения *n*-мерной случайной величины $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения *n* неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,

- где $x_1 < x_2 < ... < x_m$, $y_1 < y_2 < … < y_n$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$.

Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Функцией распределения n-мерной случайной величины $(X_1, X_2, …, X_n)$ называется функция $F(x_1, x_2, …, x_n)$, выражающая вероятность совместного выполнения n неравенств $X_1 < x_1$, $X_2 < x_2$, …, $X_n < x_n$,