«Системы счисления»

Система счисления – это способ записи чисел с помощью специальных знаков (цифр).

{0, 1, 2, …, 9} – 10 цифр (десятичная система счисления)

{0, 1, 2, …, 9,A,B,C,D,E,F} – 16 цифр шестнацатеричная система счисл.

Основание с.с.(q) это число цифр используемых для записи числа.

В информатике используют с.с. с основанием k=2,8,10,16

Пример 1: 56 – 5 десятков, 6 единиц,

65 - 6 десятков, 5 единиц.

Пример 2: Разложение числа 35748

$35748=3*10000+5*1000+7*100+4*10+8=$
$=3*10^4+5*10^3+7*10^2+4*10^1+8*10^0$

Виды систем счисления

позиционная

значение каждой цифры (ее вес) изменяется в зависимости от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающих число (56_{10})

непозиционная

римская
алфавит: I, V, X, L, C, D, M

Например,
MMIV=1000+1000+(5-1)

I=1; V=5; X=10, L=50; C=100; D=500; M=100.

1988=MCMXXCVIII

1958=MCMLVIII

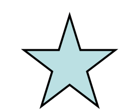
Существует ли какая-либо другая позиционная система счисления, отличная от десятичной?

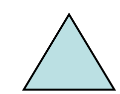
Примеры:

Троичная. Ее алфавит: 0, 1, 2

Пятиричная. Ее алфавит: 0, 1, 2, 3, 4

Одиннадцатиричная: 0, 1, 2, …, 9, A

или 0, 1, 2, …, 9, 

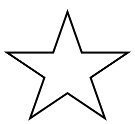
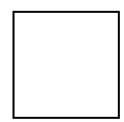
или 0, 1, 2, …, 9, 

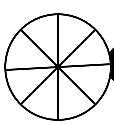
Будем рассматривать позиционные системы счисления (с.с.) в которых вес цифры зависит от ее позиции в числе.

$$n; n-1; \ldots 2; 1; 0 \downarrow -1; -2; \ldots. -m$$

Место *q*-ичной запятой

В старину на Руси широко применялась система счисления отдаленно напоминающая римскую. С ее помощью сборщики податей заполняли квитанции об уплате податей. Для записи чисел употреблялись следующие знаки:

 - тысяча рублей,  - десять рублей,

 сто рублей, X – один рубль,

IIIIIIIII – десять копеек, I – одна копейка.

А какая система счисления лучше?

Какие системы счисления используют специалисты для общения с компьютером?

Почему люди пользуются десятичной системой, а компьютеры – двоичной?

Почему в компьютерах используются также восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления?

- **двоичная** (используются цифры 0, 1)

- **восьмеричная** (используются цифры 0, 1, …, 7)

- **шестнадцатеричная**

  (для первых целых чисел от 0 до 9 используются цифры 0, 1, …, 9, а для следующих чисел – от десяти до пятнадцати – в качестве цифр используются символы A, B, C, D, E, F)

(10)	(16)	(8)	(2)	(10)	(16)	(8)	(2)
0	0	0	0	9	9	11	1001
1	1	1	1	10	A	12	1010
2	2	2	10	11	B	13	1011
3	3	3	11	12	C	14	1100
4	4	4	100	13	D	15	1101
5	5	5	101	14	E	16	1110
6	6	6	110	15	F	17	1111
7	7	7	111	16	10	20	10000
8	8	10	1000				

$$537,1_8 = \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{011}_{3}\ \underbrace{111}_{7},\underbrace{001}_{1}{}_2\ ;\quad 1A3,F_{16} = \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{0011}_{3},\ \underbrace{1111}_{F}{}_2$$

$$10101001,10111_2 = \underbrace{10}_{2}\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{001}_{1},\ \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{110}_{6}{}_2 = 251,56_8$$

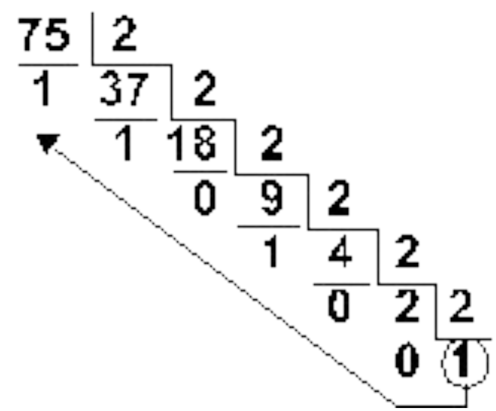
$$10101001,10111_2 = \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{1001}_{9},\ \underbrace{1011}_{B}\ \underbrace{1000}_{8}{}_2 = A9,B8_{16}\,.$$

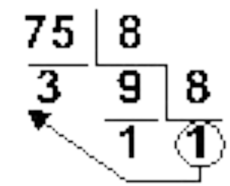
Цифры числа записывались, начиная с больших значений и заканчивая меньшими, слева направо. Если какого-либо разряда не было, то его пропускали. Интереснее всего записывались числа второго десятка: **ДІ - 14**. Дословно «четырнадцать» - «четыре на десять», т.е. не 10+4, а 4+10. И так для всех чисел от 11 до 19.

Как перевести целое число из десятичной системы в любую другую позиционную систему счисления?

При переводе целого *десятичного* числа в систему с основанием *q* его необходимо последовательно *делить* на *q* до тех пор, пока не останется остаток, меньший или равный *q–1*.

Число в системе с основанием *q* записывается как последовательность остатков от деления, записанных в обратном порядке, начиная с последнего.

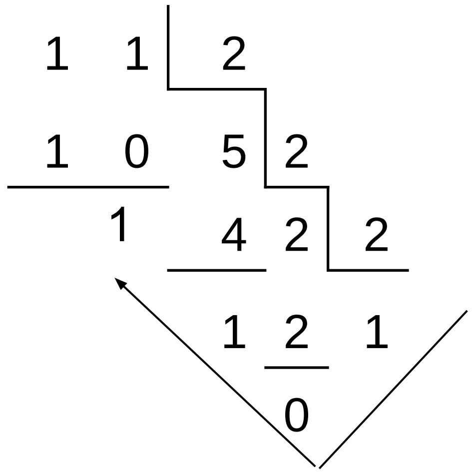




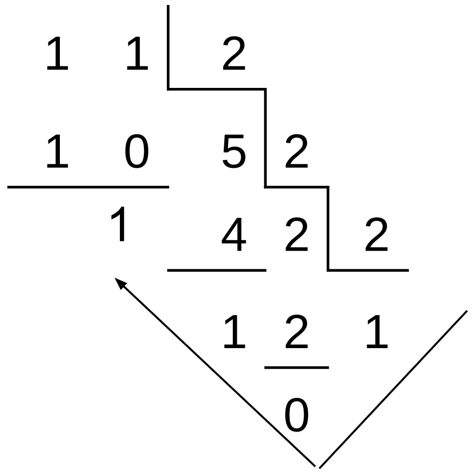
$75_{10} = 1\ 001\ 011_2 = 113_8$

Задачи

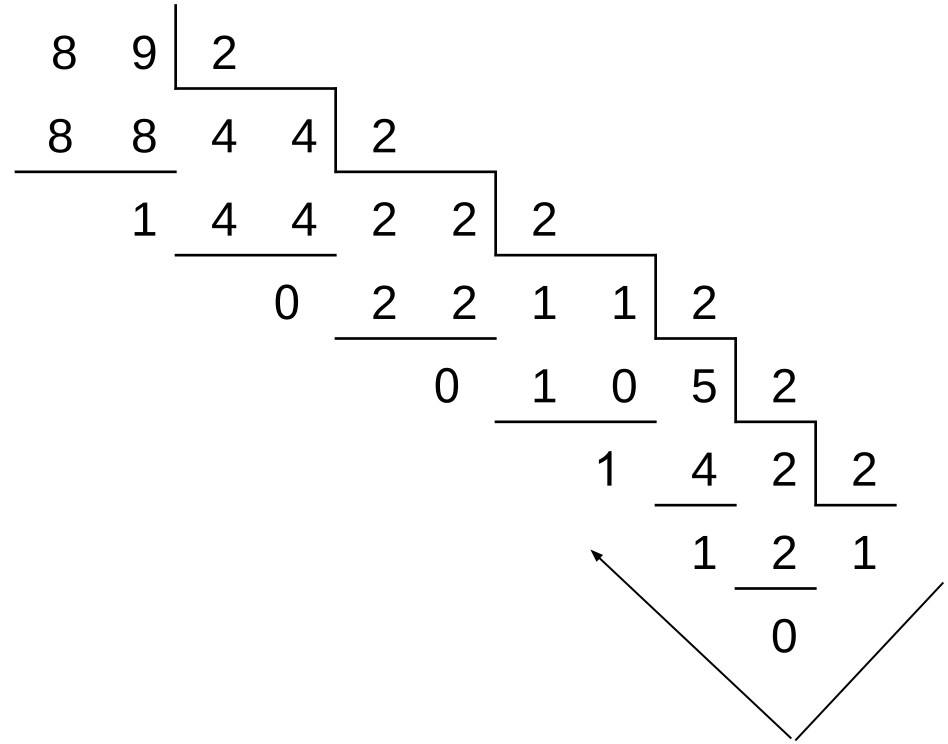
Перевести числа 11, 89, 75 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную (в восьмеричную и шестнадцатеричную - дома).



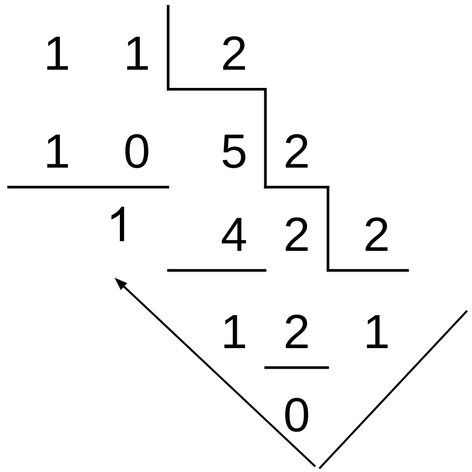
$11_{10}=1011_2$



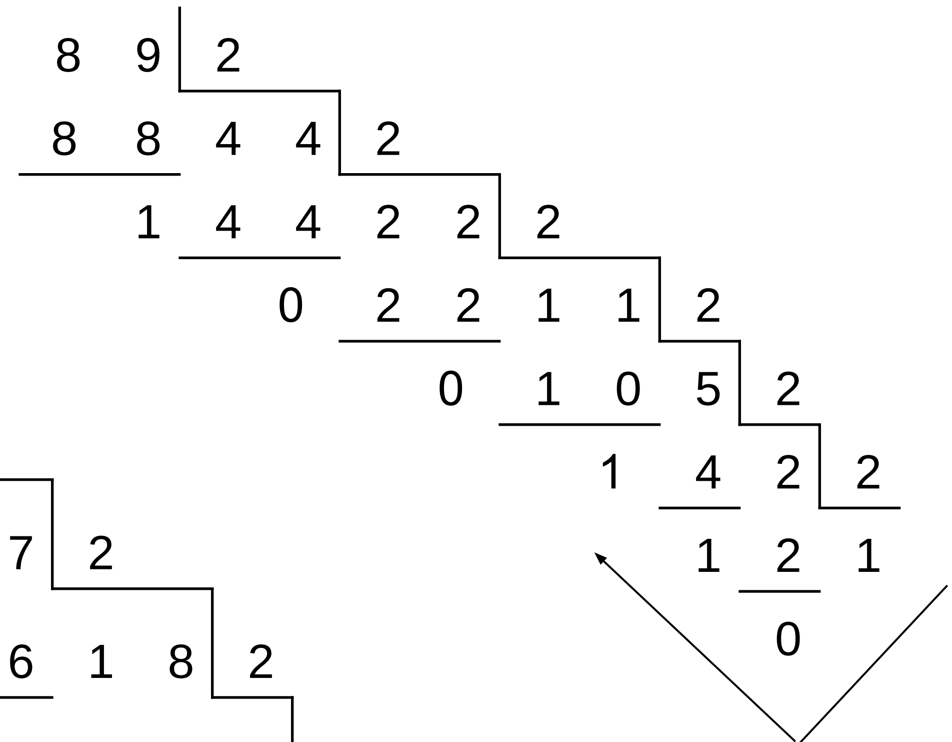
$11_{10}=1011_2$



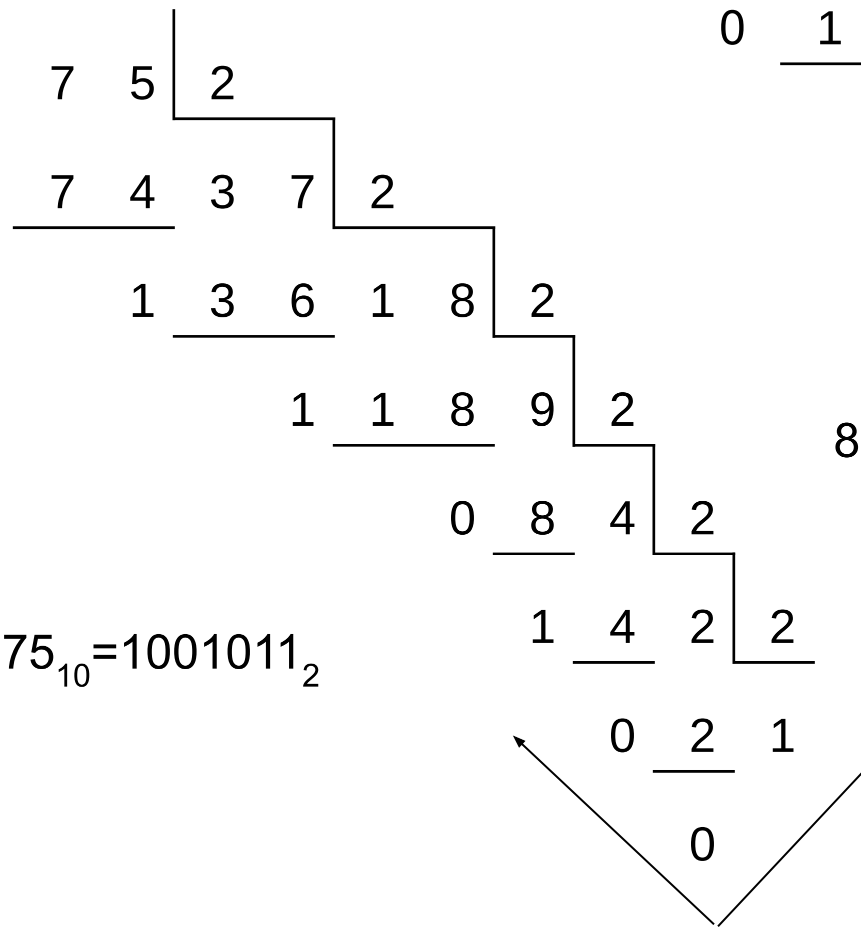
$89_{10}=1011001_2$



$11_{10}=1011_2$



$89_{10}=1011001_2$



$75_{10}=1001011_2$

11 | 8
8   1
3

$11_{10}=13_8$

89 | 8
88   11 | 8
1   8   1
3

$89_{10}=131_8$

75 | 8
72   9 | 8
3   8   1
1

$75_{10}=113_8$

89 | 16
80   5
9

$89_{10}=59_{16}$

75 | 16
64   4
11

$75_{10}=4B_{16}$

Арифметические операции в позиционных системах счисления

Рассмотрим основные арифметические операции: *сложение, умножение*. Правила выполнения этих операций в десятичной системе хорошо известны — это *сложение и умножение столбиком*. Эти правила применимы и ко всем другим позиционным системам счисления. Только *таблицами сложения и умножения надо пользоваться* ***особыми*** *для каждой системы*.

Сложение

Таблицы сложения легко составить, используя Правило Счета.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Сложение в двоичной системе счисления

Задание. Сложить в двоичной системе счисления числа: 15 и 6.

Решение.

Решение

$$
\begin{array}{r}
1 \\
15 \\
+\;\;6 \\
\hline
21
\end{array}
$$

$5+6=11=10+1$

$1+1=2$

$$
\begin{array}{r}
1\,1\,1 \\
1\,1\,1\,1 \\
+\;\;0\,1\,1\,0 \\
\hline
1\,0\,1\,0\,1
\end{array}
$$

$1+0=1$

$1+1=2=2+0$

$1+1+1=3=2+1$

$1+1=2=2+0$

Сложение в восьмеричной системе счисления

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Задание. Сложить в восьмеричной системе счисления числа: 15 и 6.

Решение.

Решение

$$\begin{array}{rr} & 1 \\ & 15 \\ + & 6 \\ \hline & 21 \end{array}$$

5+6=11=10+1

1+1=2

$$\begin{array}{rr} & 1 \\ & 17 \\ + & 6 \\ \hline & 25 \end{array}$$

7+6=13=8+5

1+1=2

Умножение

Выполняя умножение многозначных чисел в различных позиционных системах счисления, можно использовать обычный алгоритм перемножения чисел в столбик, но при этом результаты перемножения и сложения однозначных чисел необходимо заимствовать из соответствующих рассматриваемой системе таблиц умножения и сложения.

Ввиду чрезвычайной простоты таблицы умножения в двоичной системе, умножение сводится лишь к сдвигам множимого и сложениям.

Умножение в двоичной и восьмеричной системах счисления

*	0	1
0	0	0
1	0	1

*	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Задание. Перемножить числа 5 и 6.

Решение.

Решение

Десятичная: $5_{10} \bullet 6_{10}$ Двоичная: $101_2 \bullet 110_2$ Восьмеричная: $5_8 \bullet 6_8$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times\ 6 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times\ 110 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 11110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times\ 6 \\ \hline 36 \end{array}$$

Ответ: $5*6 = 30_{10} = 11110_2 = 36_8$.

Проверка. Преобразуем полученные произведения к десятичному виду:

$11110_2 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 30$;

$36_8 = 3 \bullet 8^1 + 6 \bullet 8^0 = 30$.

Итоги

1. Определение системы счисления.
2. Виды систем счисления.
3. Удобство позиционной системы счисления.
4. Алфавит и основание позиционной системы счисления.
5. Разложение чисел в позиционной системе счисления.

Итоги

6. Системы счисления используемые специалистами для общения с компьютером.

7. Причины использования двоичной, восьмеричной, шестнадцатеричной систем счисления в компьютерах.

8. История систем счисления.

9. Правило перевода целого числа из десятичной системы в любую другую позиционную систему счисления.

Домашнее задание

§ 45

1. Перевести числа 11, 89, 75 из десятичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную.

2. Сложить и умножить двоичные числа:

1110_2 и 101_2 (проверить правильность своих действий).