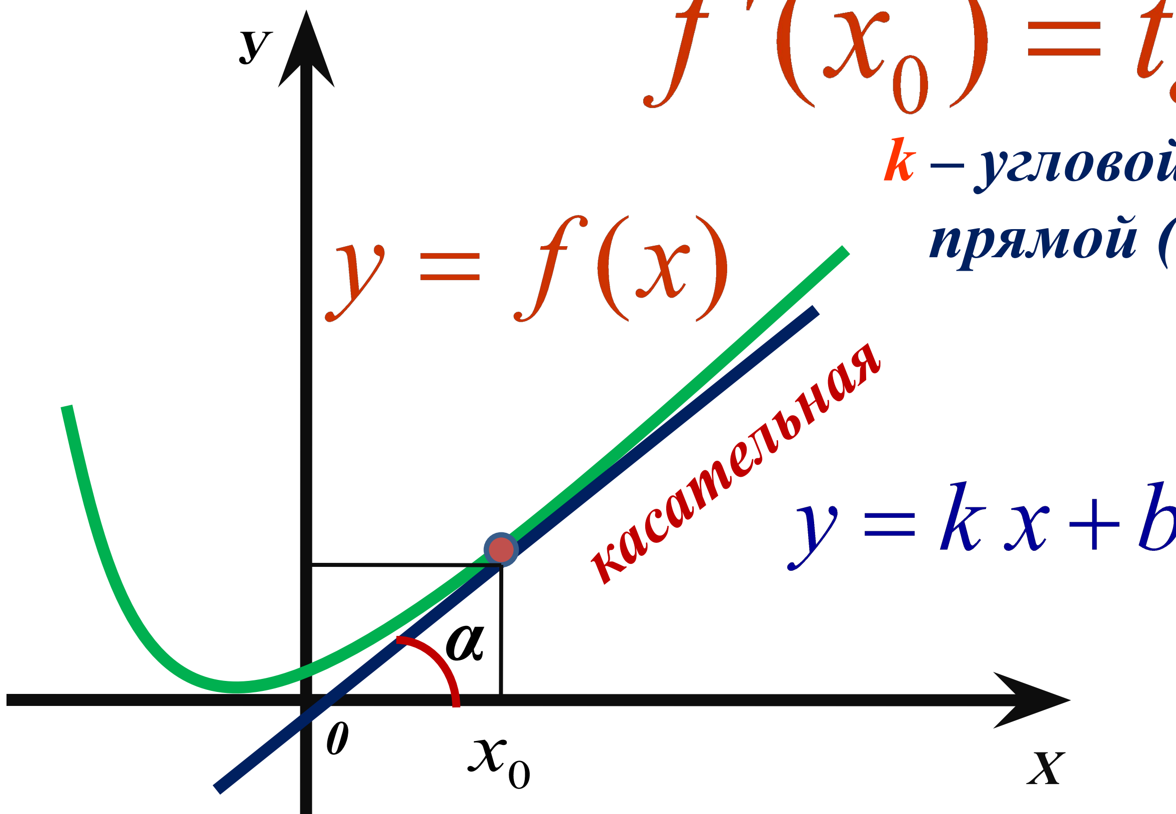
ГБПОУ ВО «Воронежский политехнический техникум»

Применение производной для исследования функции на монотонность и экстремумы

Воронеж, 2022 г.

$$f'(x_0) = tg\alpha = k$$

k **– угловой коэффициент прямой (касательной)**

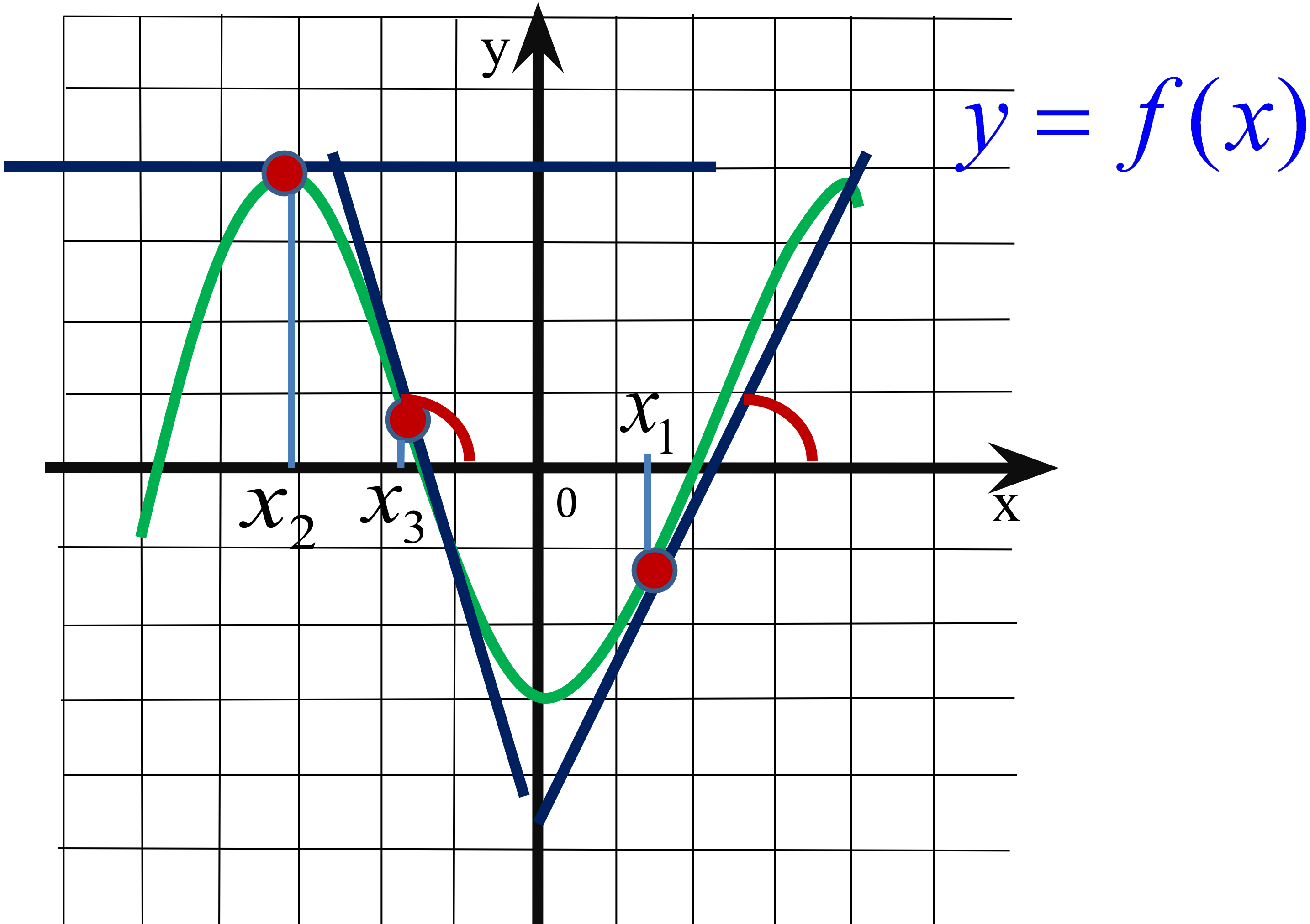


Геометрический смысл производной: ***если к графику функции y = f(x) в точке с абсциссой*** x_0 ***можно провести касательную, непараллельную оси y, то*** $f'(x_0)$ ***выражает угловой коэффициент касательной, т.е.***

$$f'(x_0) = k$$

Поскольку $k = tg\alpha$ ***, то верно равенство*** $f'(x_0) = tg\alpha$

Если α < 90°, то k > 0. ***Если α > 90°, то k < 0.***



Если α = 0°, то k = 0.

Касательная параллельна оси ОХ.

Теорема 1. ***Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем равенство $f'(x)=0$ выполняется лишь в изолированных точках), то функция $y= f(x)$ возрастает на промежутке X.***

Теорема 2. ***Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ (причем равенство $f'(x)=0$ выполняется лишь в изолированных точках), то функция $y= f(x)$ убывает на промежутке X.***

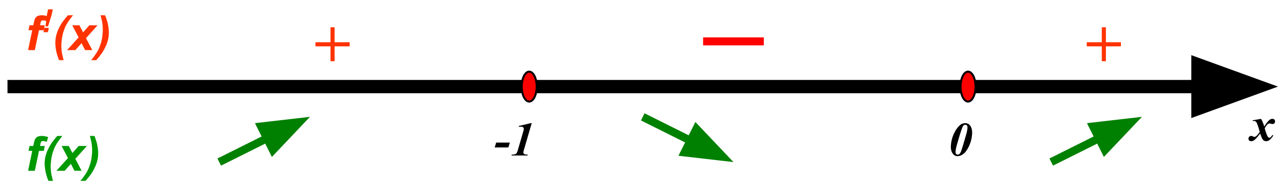
Теорема 3. ***Если во всех точках открытого промежутка X выполняется равенство $f'(x)=0$, то функция $y= f(x)$ постоянна на промежутке X.***

Пример: Исследовать на монотонность функцию $y=2x^3+3x^2-1$.

Исследовать функцию на монотонность – это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, а на каких – убывает. Согласно теоремам 1 и 2, это связано со знаком производной.

Найдем производную данной функции:

$$f'(x)=6x^2+6x=6x\,(x+1)$$

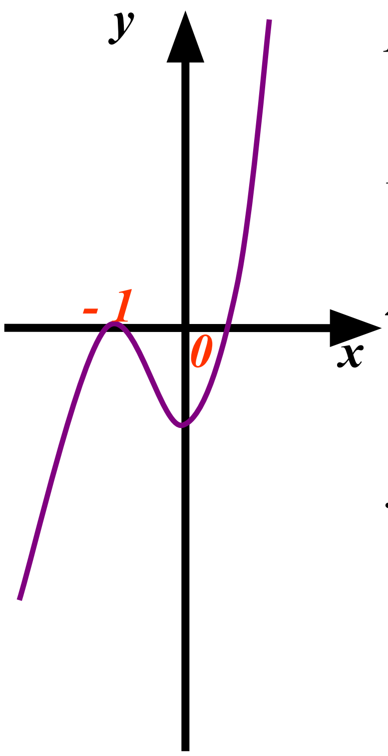


Если функция непрерывна не только на открытом промежутке, но и в его концевых точках (именно так обстоит дело для заданной функции), эти концевые точки включают в промежуток монотонности функции.

<u>Ответ:</u> функция возрастает $x \in (-\infty; -1]$, $[0;+\infty)$, функция убывает $x \in [-1; 0]$

Точки экстремума функции и их нахождение

Рассмотрим график функции $y=2x^3+3x^2-1$



На графике две уникальные точки: (-1;0) и (0;-1). В этих точках:

1) происходит изменение характера монотонности функции;

2) касательная к графику функции параллельна оси X (или совпадает с осью X), т.е. производная функции в каждой из указанных точек равна нулю;

3) f(-1) – наибольшее значение функции, но не во всей области определения, а по сравнению со значениями функции из некоторой окрестности точки $x = -1$. Также f(0) – наименьшее значение функции в окрестности точки $x=0$

Определение 1. ***Точку $x=x_0$ называют точкой минимума функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x=x_0$) выполняется неравенство***

$$f(x)>f(x_0).$$

Определение 2. ***Точку $x=x_0$ называют точкой максимума функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x=x_0$) выполняется неравенство***

$$f(x)<f(x_0).$$

Значение максимума и минимума обозначаются:

y_{max}, y_{min} *соответственно.*

ВНИМАНИЕ!!!

Только не путать с наибольшим (или наименьшим) значением функции во всей рассматриваемой области определения, эти значения в окрестности некоторой точки Х, являются наибольшими (или наименьшими).

Точки минимума и максимума функции называют – точки экстремума (от латинского слова extremum – «крайний»)

Теорема 4. ***Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x=x_0$, то этой точке производная либо равна нулю, либо не существует.***

Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называют стационарными, а внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует – критическими.

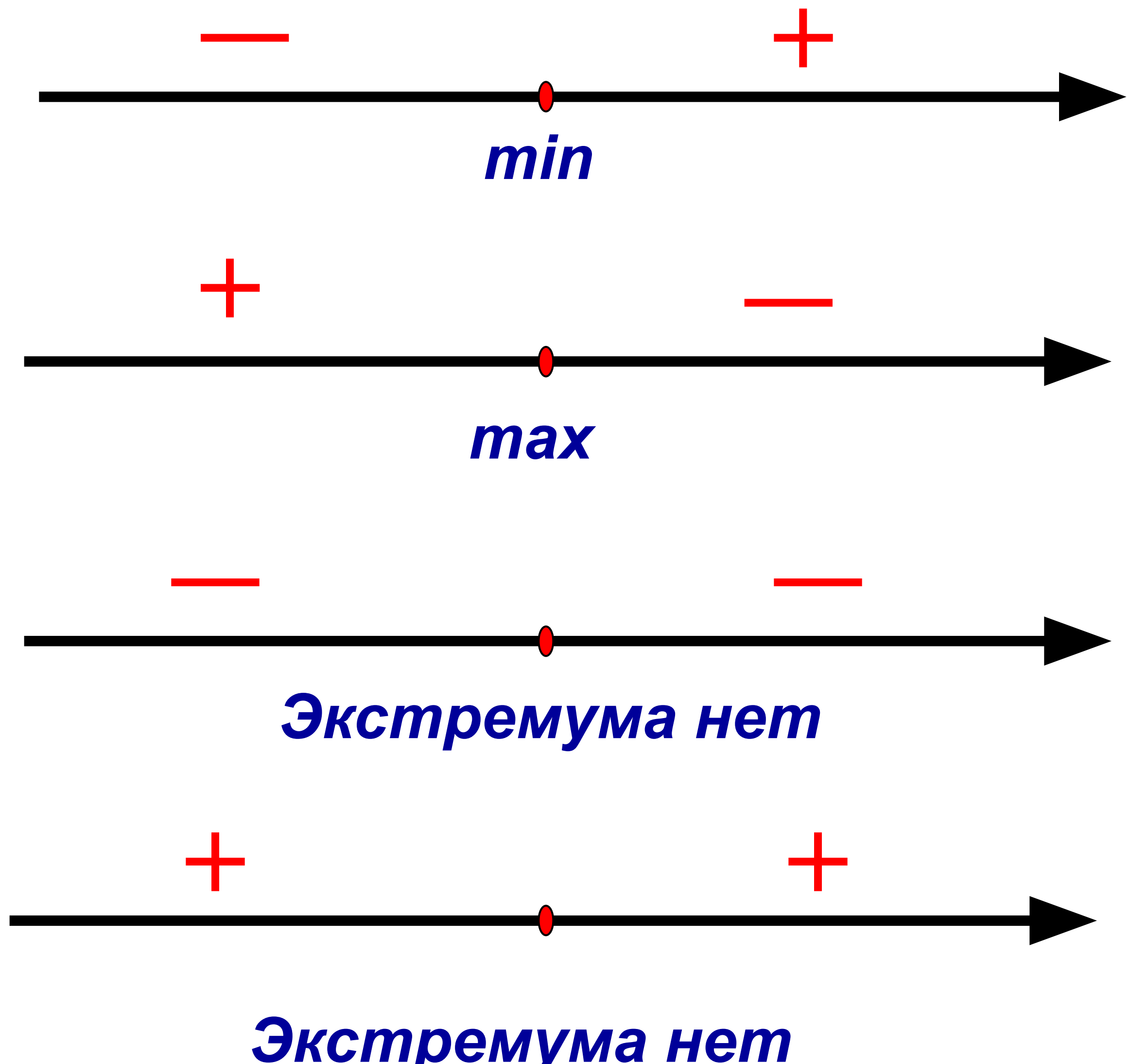
Теорема 5 (достаточные условия экстремума). **Пусть функция y = f(x) непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x=x_0$. Тогда:**

1) **Если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$, выполняется неравенство** ***$f^1(x)<0$, при $x>x_0$ – неравенство $f^1(x)>0$, то $x=x_0$ – точка минимума функции $y=f(x)$;***

2) ***Если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x<x_0$ выполняется неравенство $f^1(x)>0$, а при $x>x_0$ – неравенство $f^1(x)<0$, то $x=x_0$ – точка максимума функции $y=f(x)$;***

3) ***Если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.***

Для запоминания!!!



Пример: Найти точки экстремума функции $y=3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$.

Решение: ***найдем производную данной функции:*** $y^1=12x^3 - 48x^2 + 48x$.

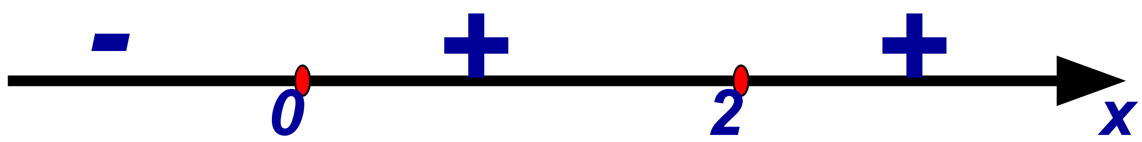
Найдем стационарные точки:

$$12x^3 - 48x^2 + 48x=0$$

$$12x(x^2 - 4x + 4)=0$$

$$12x(x - 2)^2=0$$

Производная обращается в нуль в точках $x=0$ и $x=2$



Значит, $x=0$ – точка минимума.

Ответ: $y_{min}= - 11$.

- ***Алгоритм исследования непрерывной функции $y=f(x)$ на монотонность и экстремумы:***

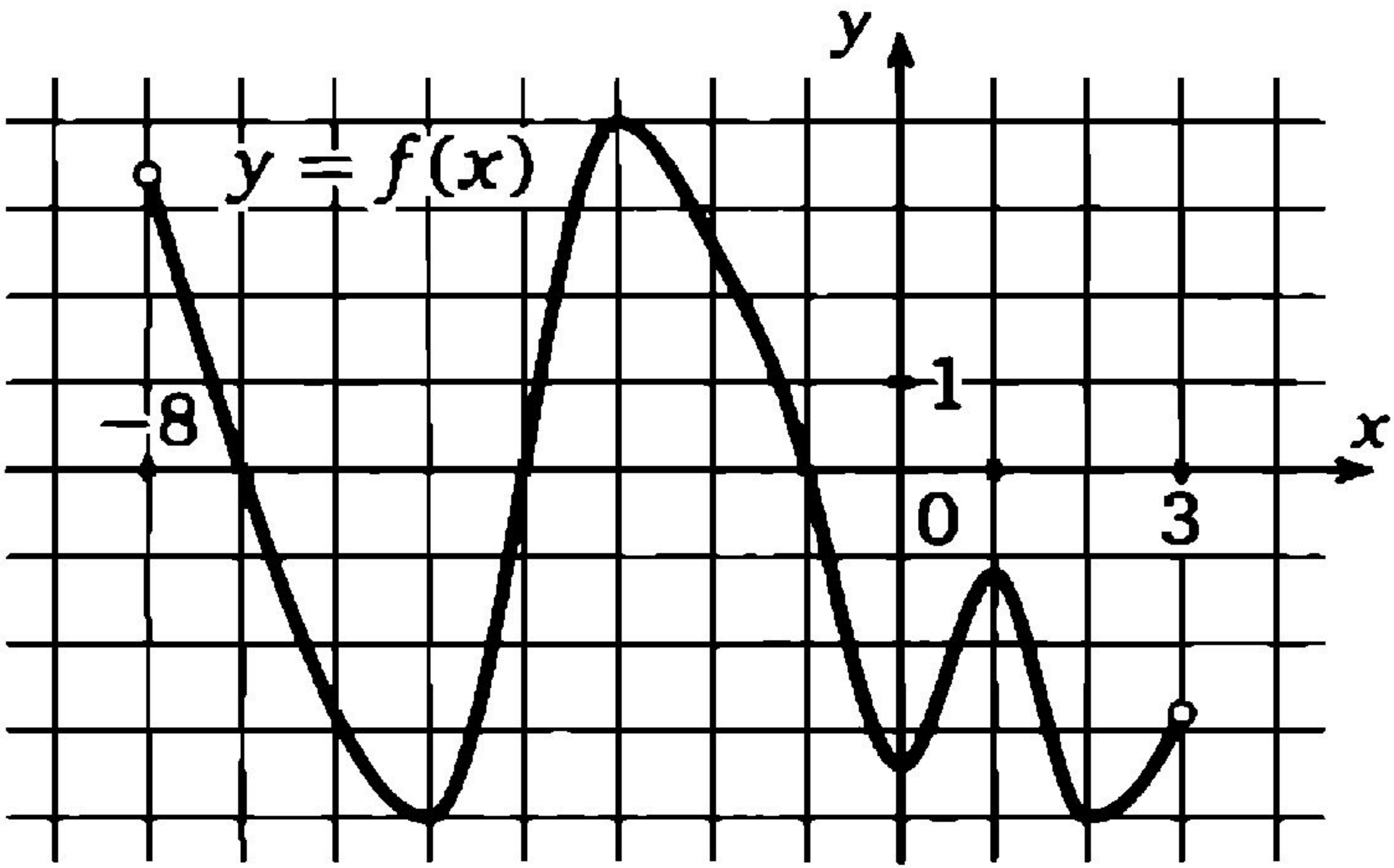
1. ***Найти производную $f^1(x)$.***
2. ***Найти стационарные ($f^1(x)=0$) и критические ($f^1(x)$ не существует) точки функции $y=f(x)$.***
3. ***Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.***
4. ***На основании теорем 1, 2, и 5 сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.***

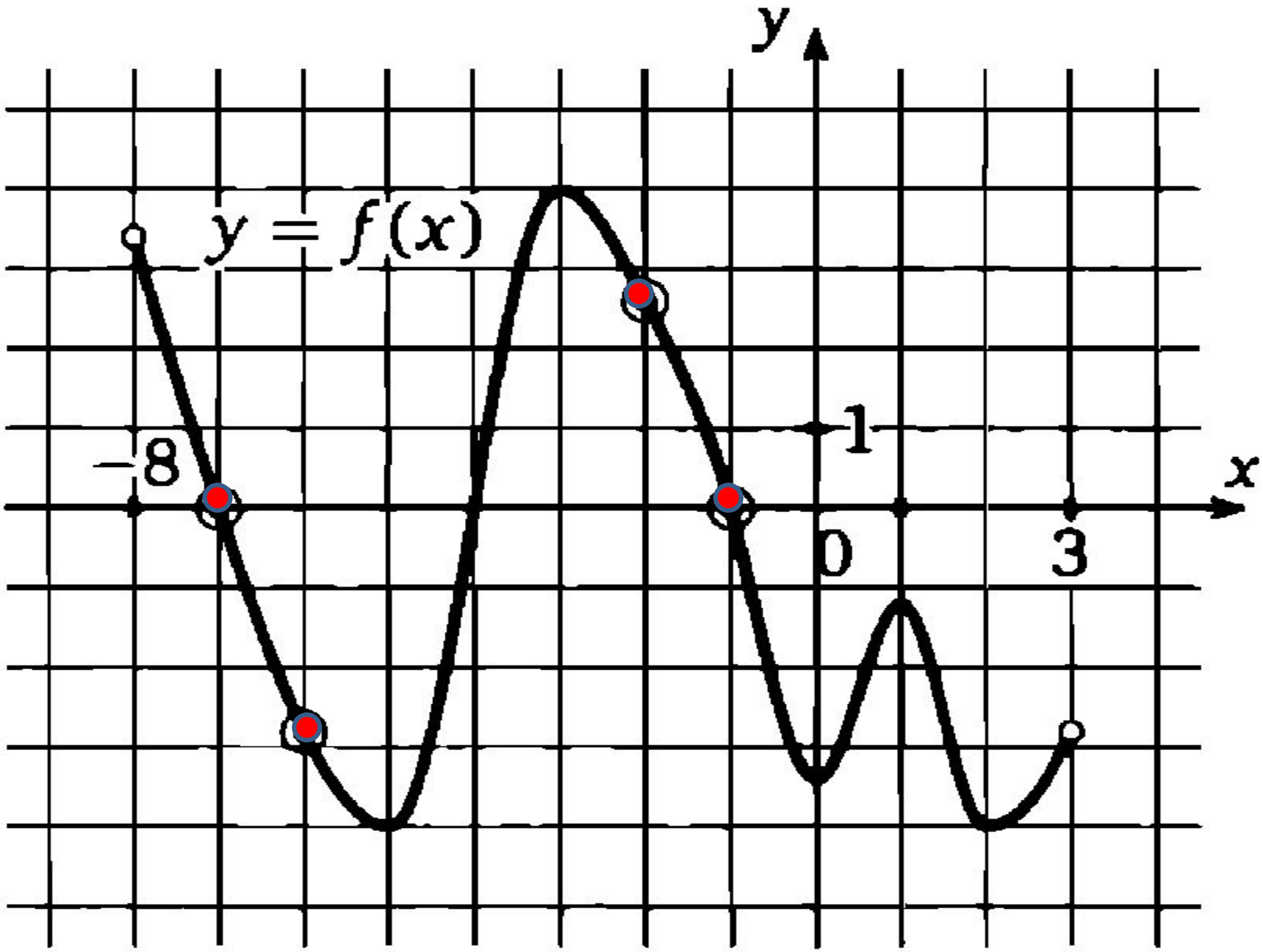
Пример: **Исследовать функцию**

$$y = \frac{x^4 + 16}{x^2}$$

на монотонность и экстремумы

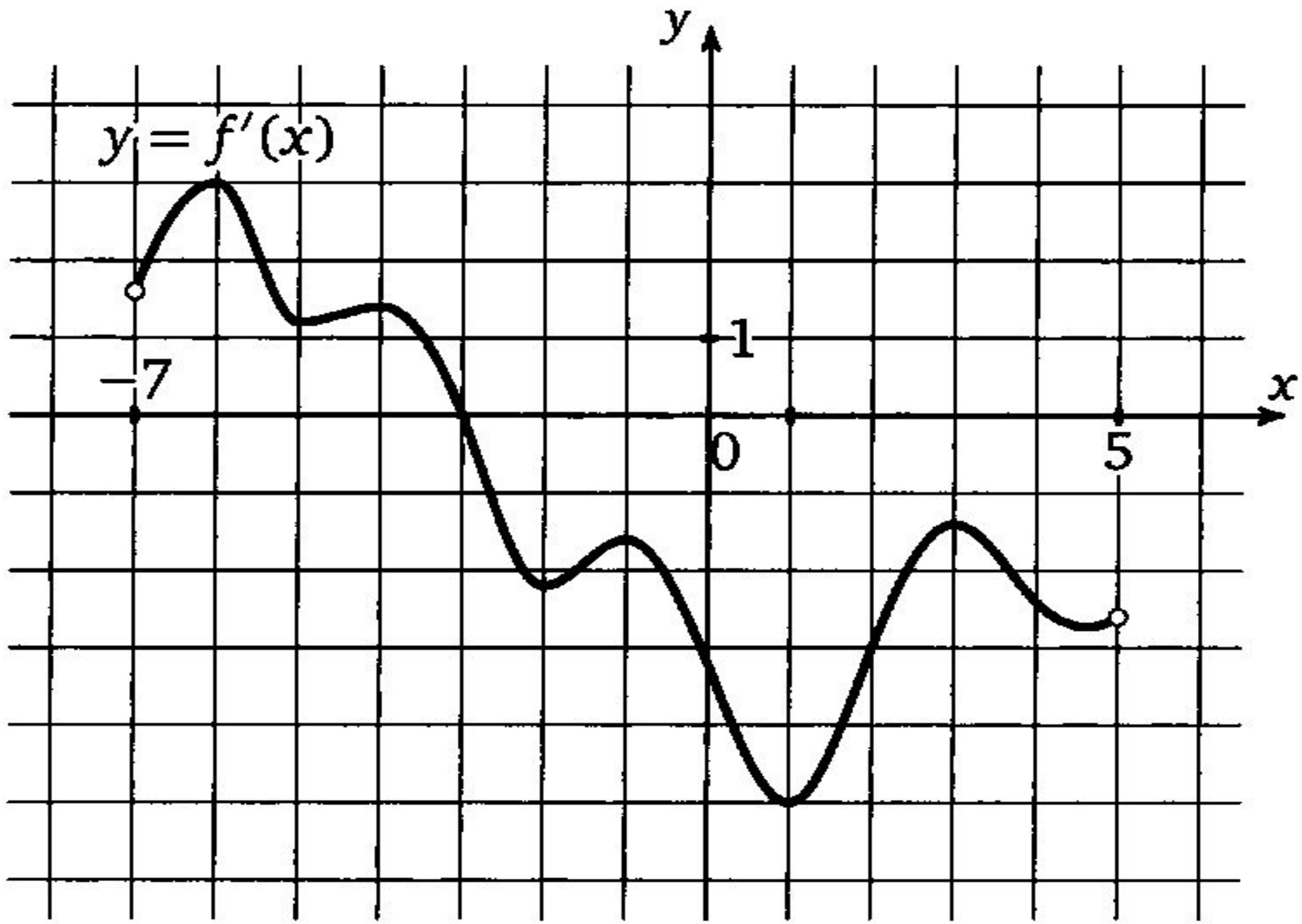
На рисунке изображен график функции y=f(x), определенной на интервале (- 8; 3). Определить количество целых точек, в которых производная функции отрицательна

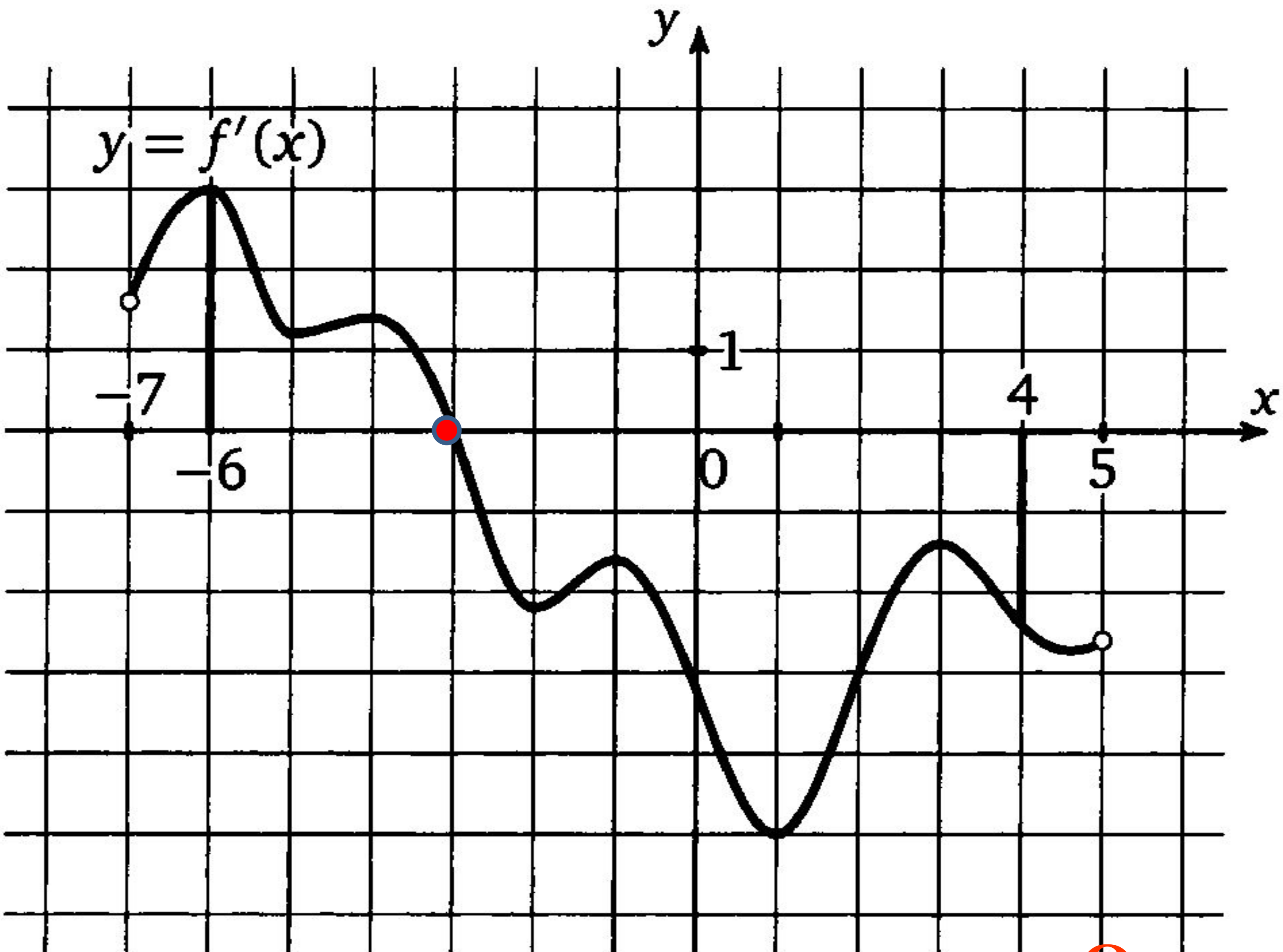




Ответ: 4

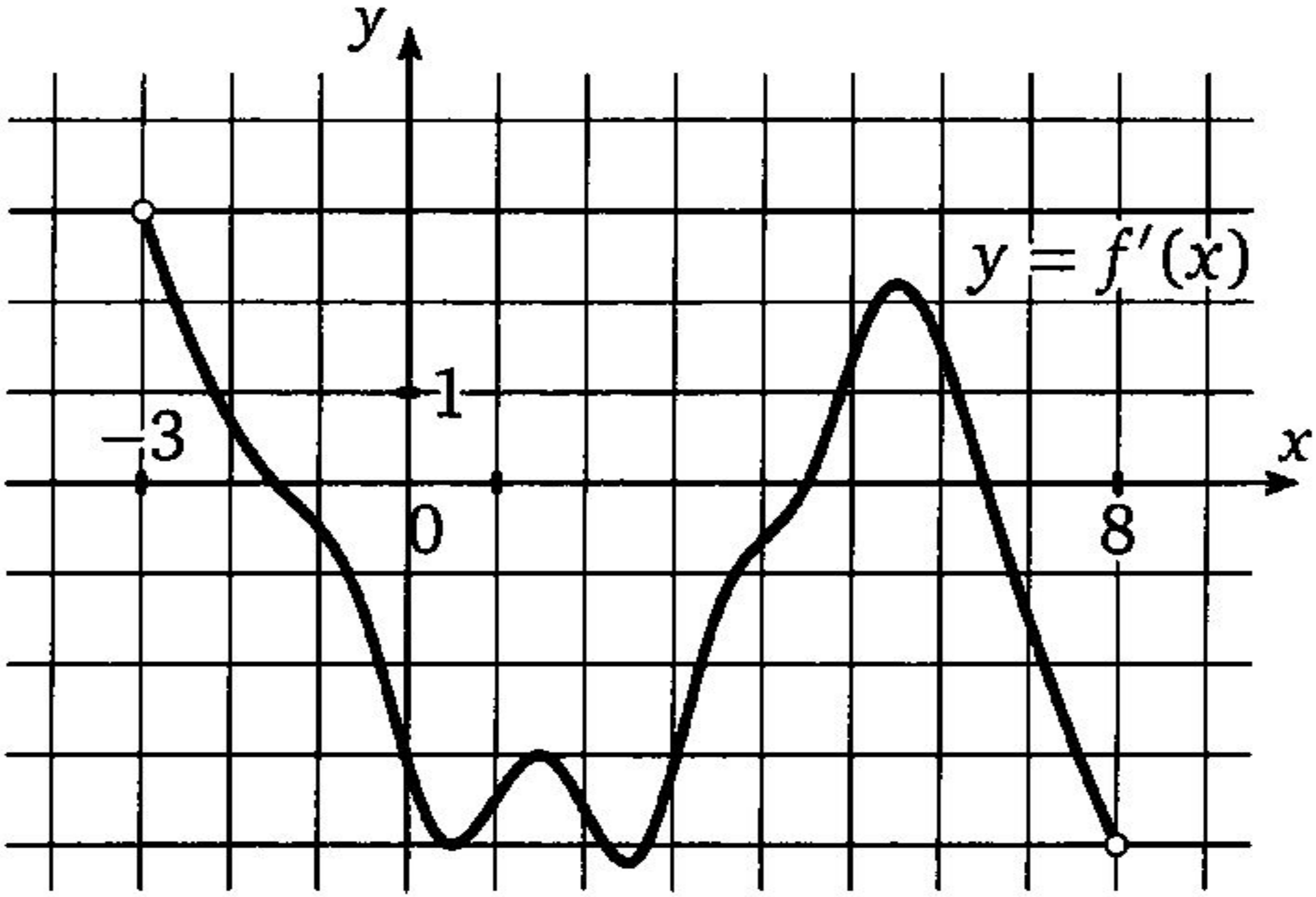
На рисунке изображен график производной функции y=f(x), определенной на интервале (- 7; 5). Найти точку экстремума функции на отрезке [-6; 4]

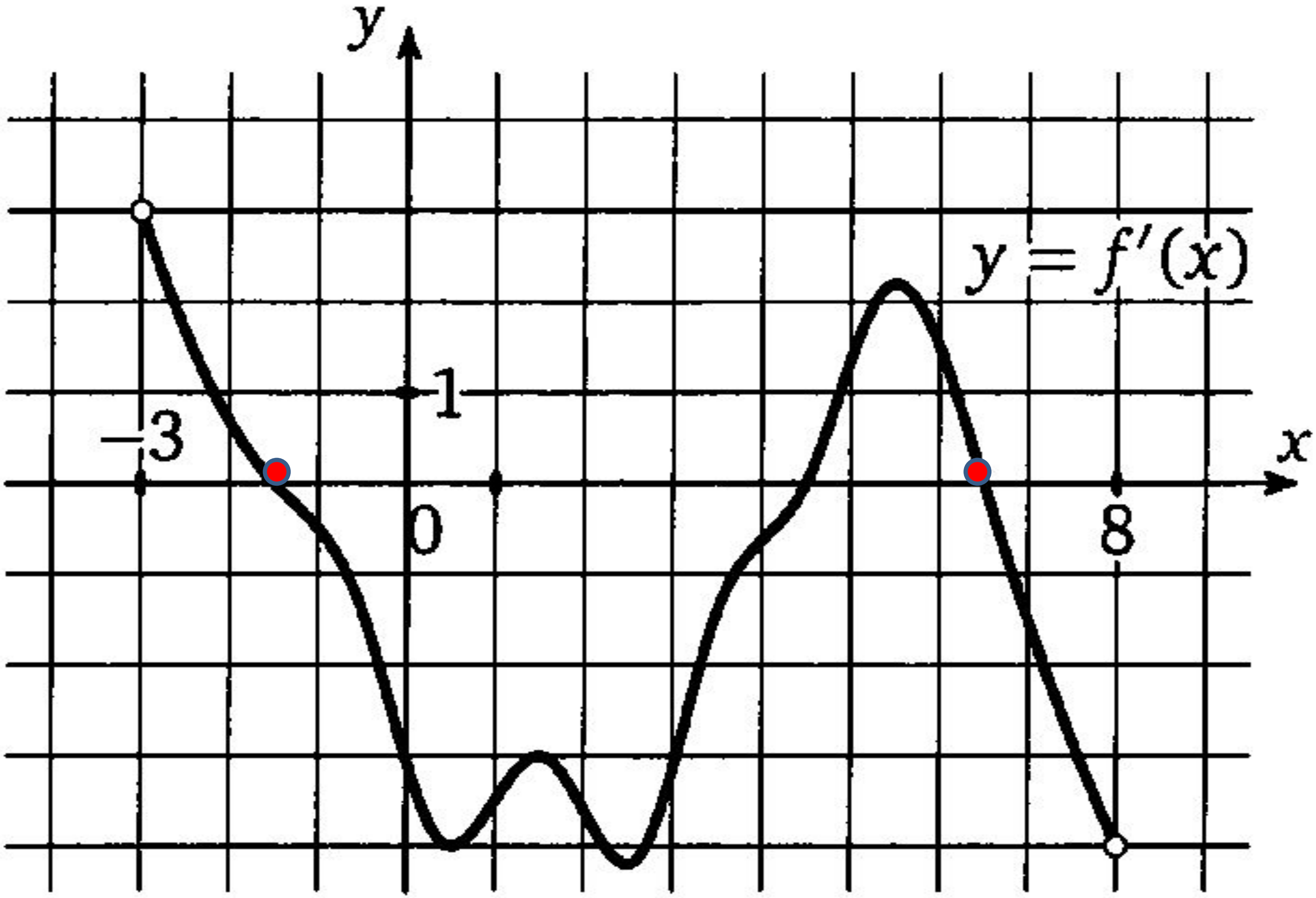




Ответ: - 3

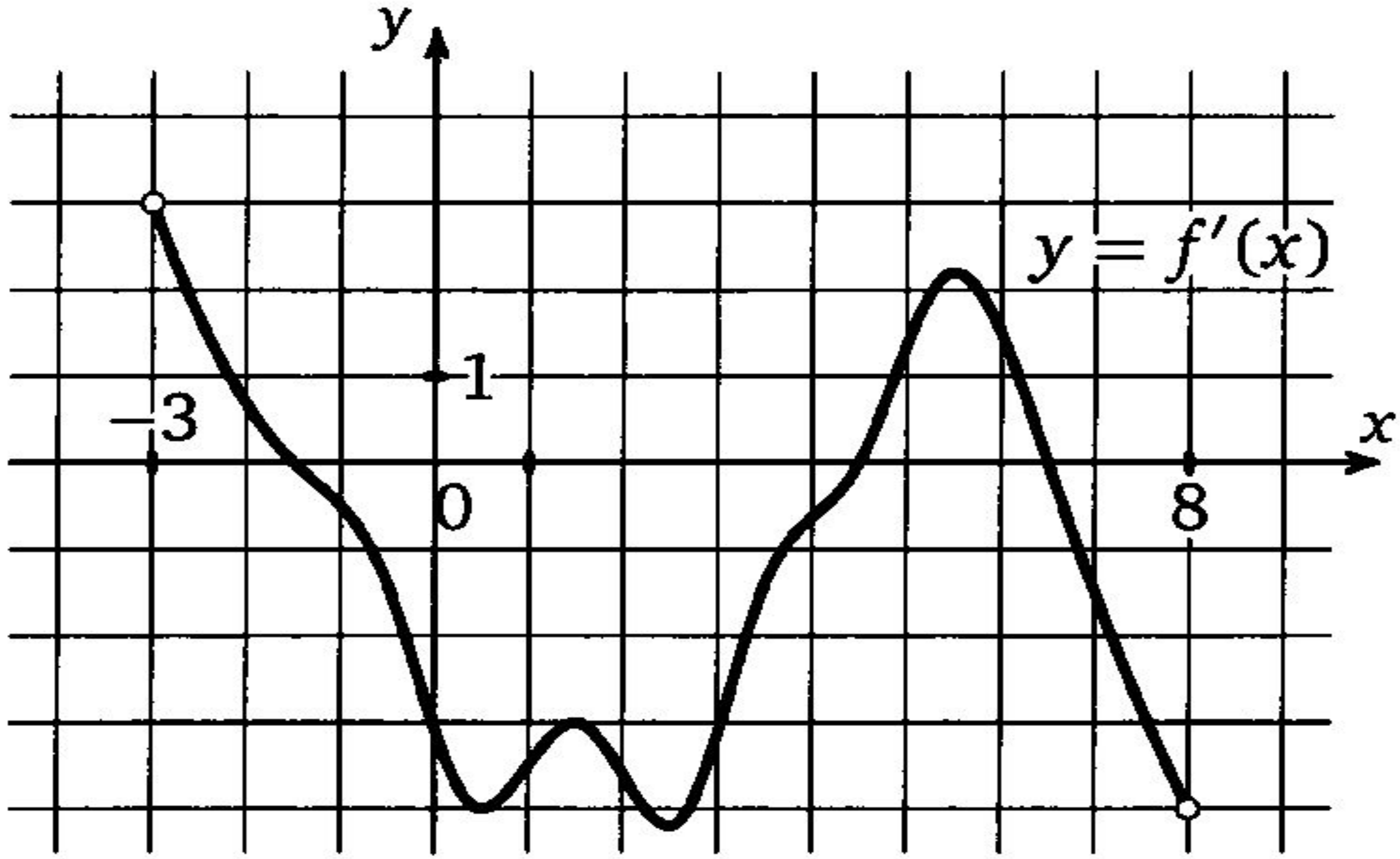
На рисунке изображен график производной функции y=f(x), определенной на интервале (- 3; 8). Найти количество точек максимума функции на отрезке [- 2; 7]

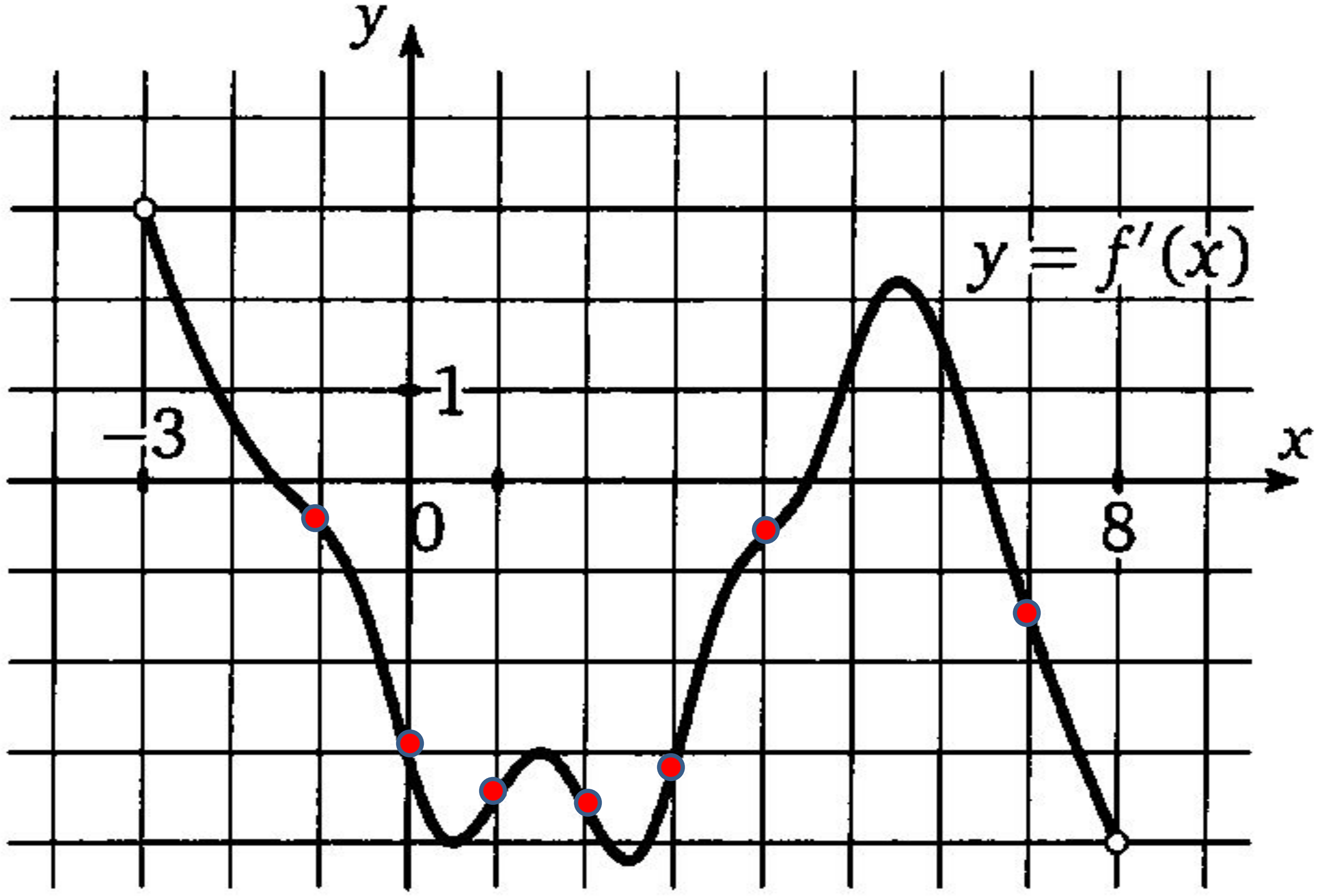




Ответ: 2

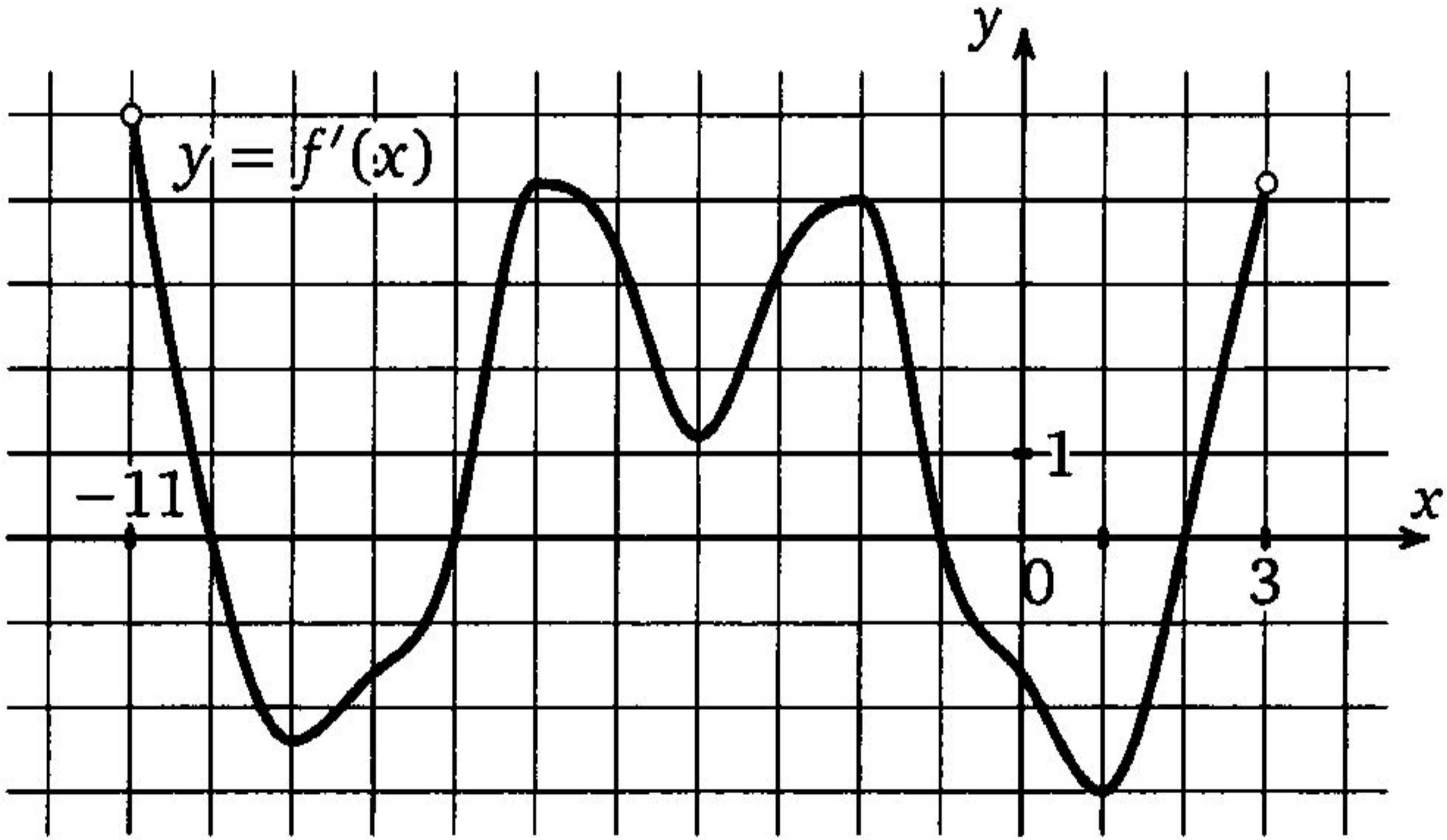
На рисунке изображен график производной функции y=f(x), определенной на интервале (- 3; 8). Найти промежутки убывания функции. В ответе указать сумму целых точек, входящих в эти промежутки

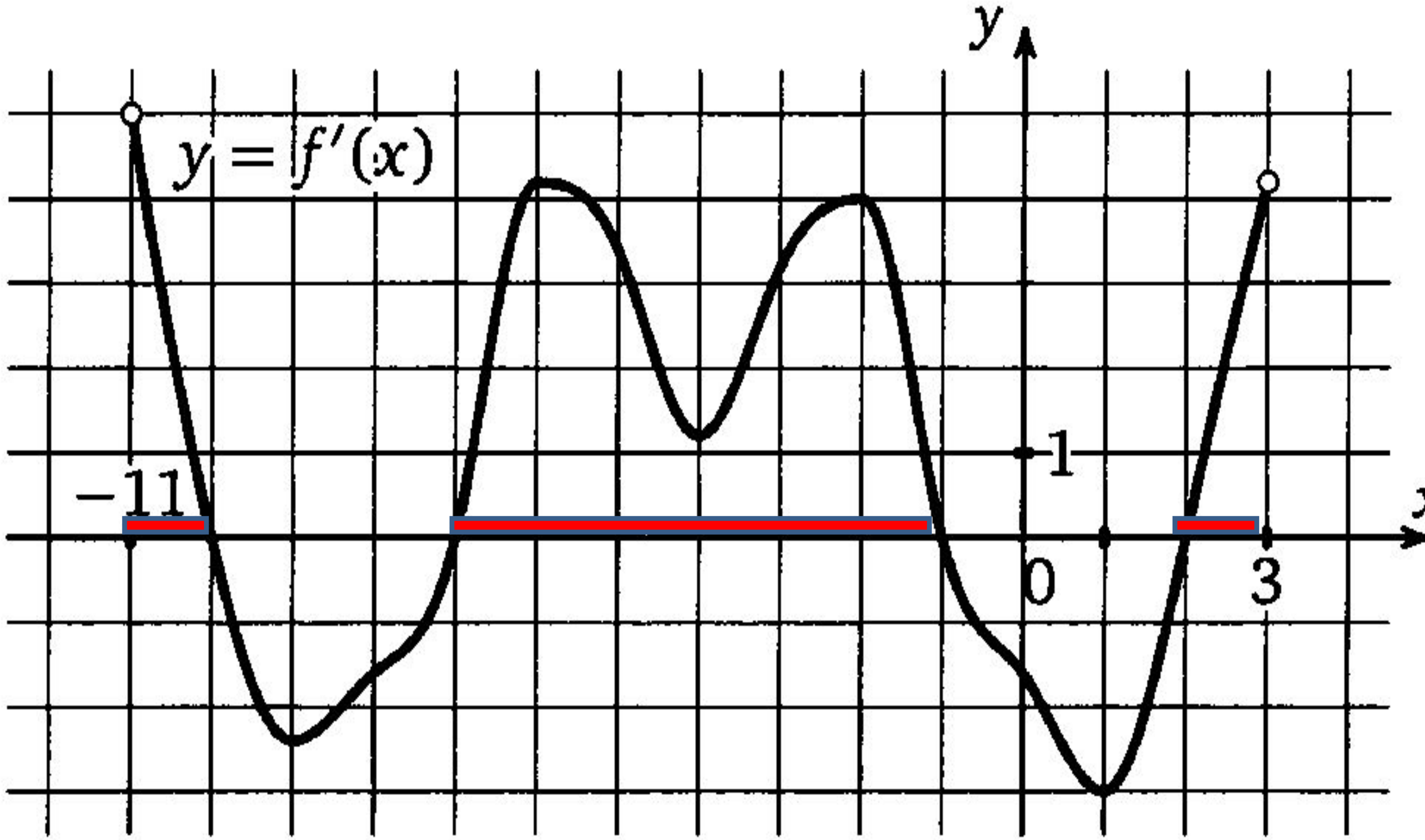




Ответ: 16

На рисунке изображен график производной функции y=f(x), определенной на интервале (- 11; 3). Найти промежутки возрастания функции. В ответе указать длину наибольшего из них





Ответ: 6

Литература :

1. Мордкович, А. Г., Семенов, П. В., Алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10 класс, часть 1, учебник - Москва, изд. «Мнемозина», 2020г.–455с.
2. 2. Мордкович, А. Г., Семенов, П. В., Алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10 класс, часть 2, задачник - Москва, изд. «Мнемозина», 2020г.–351с.