

Лекция № 6

ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

- 1. Динамика вращательного движения относительно точки.**
- 2. Динамика вращательного движения относительно неподвижной оси.**
- 3. Расчет моментов инерции некоторых простых тел. Теорема Гюйгенса-Штейнера.**
- 4. Закон сохранения момента импульса.**
- 5. Кинетическая энергия твердого тела**
- 6. Произвольное движение твердого тела.**
- 7. Скатывание цилиндра с наклонной плоскости.**
- 8. Сходство и различие линейных и угловых характеристик движения.**

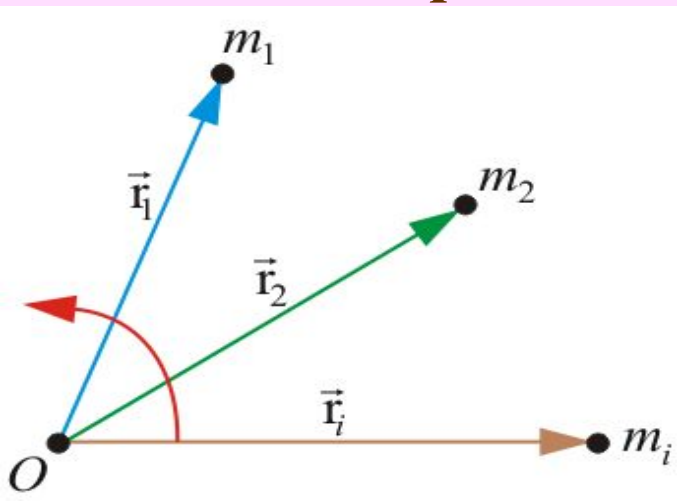
1. Динамика вращательного движения

твёрдого тела относительно точки
Абсолютно твёрдое тело – это система

материальных точек, расстояния между которыми сохраняются независимо от внешних воздействий. Иными словами в твёрдом теле отсутствует относительное движение этих точек.

Рассмотрим твёрдое тело, как некую систему, состоящую из n точек ($m_1 m_2 \dots m_n$); r_i – радиус-вектор i -ой точки, проведенный из точки O –

вращения.



$\vec{F}_i$ – внешняя сила, действующая на i -ю точку,

$\vec{F}_{ik}$ – сила, действующая со стороны k -ой точки на i -ую

Запишем основное уравнение динамики для точки:

$$\frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_i.$$

Умножим обе части векторно на $\mathbf{r}_i$

$$\left[\mathbf{r}_i, \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) \right] = \left[\mathbf{r}_i, \sum_k \mathbf{F}_{ik} \right] + \left[\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i \right].$$

Знак производной в данном случае можно вынести за знак векторного произведения (и знак суммы тоже), тогда:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{v}_i] = \sum_k [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_{ik}] + [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i].$$

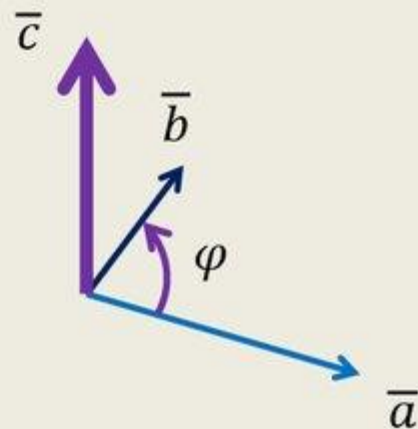
ВЕКТОРНОЕ произведение векторов

ВЕКТОРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **ВЕКТОР** $\vec{c}$, который :

1. ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;
2. имеет длину (модуль), равную числу $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, где $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют **ПРАВУЮ** тройку.

Обозначение векторного произведения :

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$



Векторное произведение $\vec{r}_i$ точки на её импульс называется моментом импульса этой точки относительно точки O:

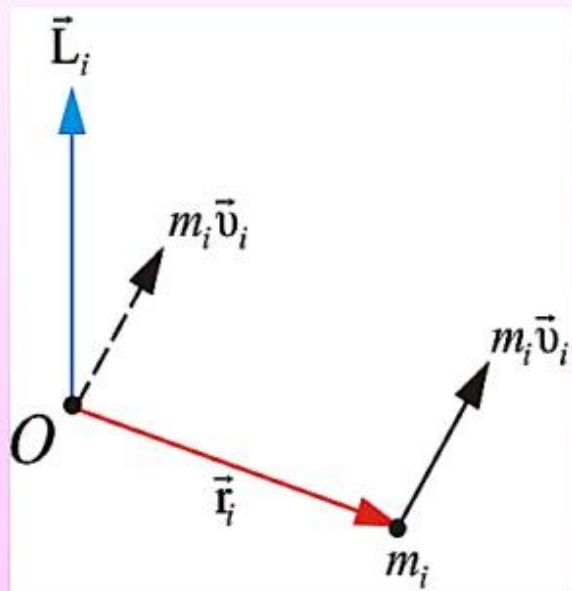
$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i].$$

Эти три вектора образуют правую тройку векторов, связанных «правилом буравчика»:

$$\vec{L} \perp \vec{r}_i$$

$$\vec{L}_i \perp m_i \vec{v}_i$$

при вкручивании буравчика в результате поворота шляпки буравчика от вектора $\vec{r}_i$ к вектору $m_i \vec{v}_i$ направление движения винта указывает направление вектора $\vec{L}_i$



У нас вектора $\vec{r}_i$ и $m_i \vec{v}_i$ перпендикулярны. В этом случае модуль вектора $\vec{L}_i$ равен $r_i \cdot m_i v_i$

Векторное произведение **вект.** $\vec{r}_i$ проведенного в точку приложения силы, на эту силу называется моментом силы :

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

По определению, модуль векторного произведения равен:

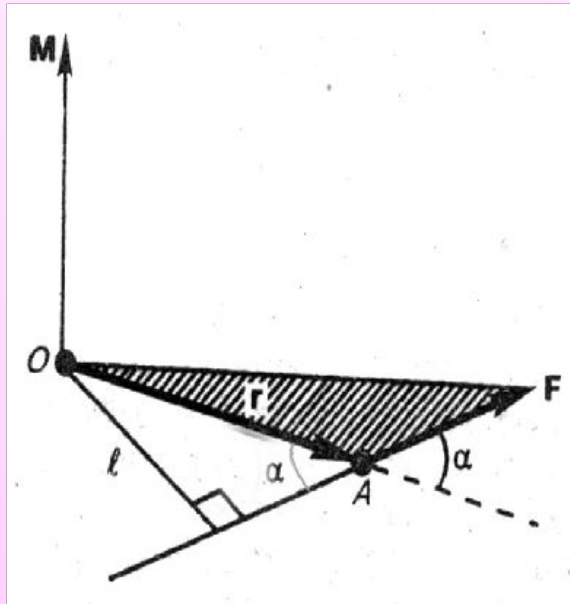
$$|\vec{M}_i| = F_i r_i \sin \alpha$$

Обозначим $r_i \sin \alpha = l_i$

l_i – плечо силы (перпендикуляр, опущенный из неподвижной точки O на линию действия силы). Тогда:

$$|\vec{M}_i| = F_i r_i \sin \alpha = F_i l_i$$

(произведение силы на плечо)



С учетом новых обозначений наше уравнение:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \sum_k [\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}] + [\vec{r}_i, \vec{F}_i].$$

примет вид

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i$$

Запишем систему n уравнений для всех точек системы и сложим, левые и правые части уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ik} + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i.$$

Так как $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ *, то*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \vec{M}_{ik} = 0.$$

Вынесем знак производной за знак суммы

$$\sum_{i=1}^n \frac{dL_i}{dt} = \frac{d \sum L_i}{dt} = \frac{dL}{dt}$$

здесь $\vec{L} = \sum \vec{L}_i$ - суммарный момент импульса
твёрдого тела.

Обозначим $\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \vec{M}$ - результирующий
момент всех внешних
сил относительно неподвижной точки O .

Окончательно получим:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}$$

*Уравнение моментов
относительно неподвижной
точки*

*Это основной закон динамики движения твердого
тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.*

*Имеет внешнее сходство с уравнением
динамики для поступательного движения:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}$$

*Векторное уравнение можно представить в
скалярном виде, если спроецировать $\vec{L}$ и $\vec{M}$ на
оси координат x, y, z :*

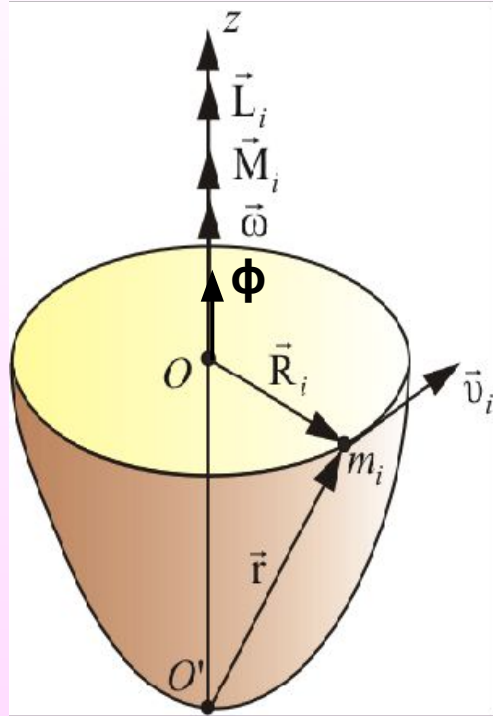
$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^{\text{внеш}}$$

$$\frac{dL_y}{dt} = M_y^{\text{внеш}}$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{\text{внеш}}$$

*Написанные уравнения – уравнения моментов
относительно неподвижных осей.*

2. Динамика вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси



При вращении твёрдого тела относительно неподвижной оси, все точки тела движутся по плоским круговым траекториям. Выделим частицу m_i тела, вращающегося вокруг оси z .

Положение частицы зададим радиус-вектором относительно произвольного центра O , лежащего на оси вращения. R_i - радиус окружности, по которой движется рассматриваемая точка.

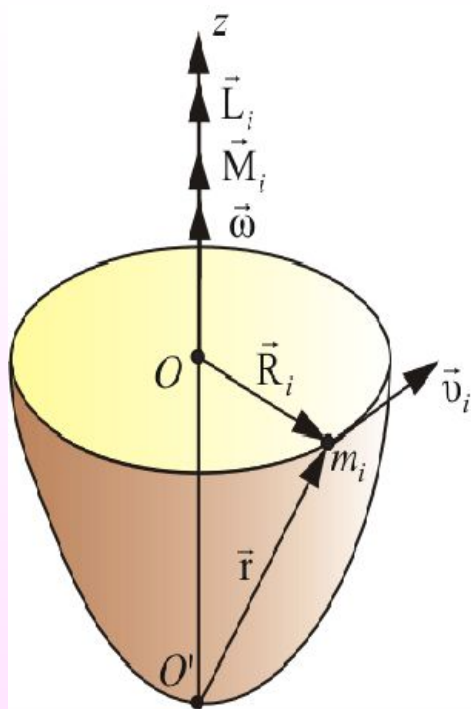
Будем рассматривать ☐ угол поворота ϕ нашей точки как вектор Φ , имеющий модуль ϕ и направленный вдоль оси вращения.

Направление вектора связано с направлением вращения правилом буравчика. ☐ Аналогично введем вектор ☐ угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$

вектор угловой скорости и вектор углового ускорения будут выражаться

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

Будем рассматривать проекцию момента импульса L_{iz} на ось вращения z и проекцию момента силы M_{iz} на ось вращения z . Назовем их моментом импульса относительно оси z и моментом силы относительно оси z .



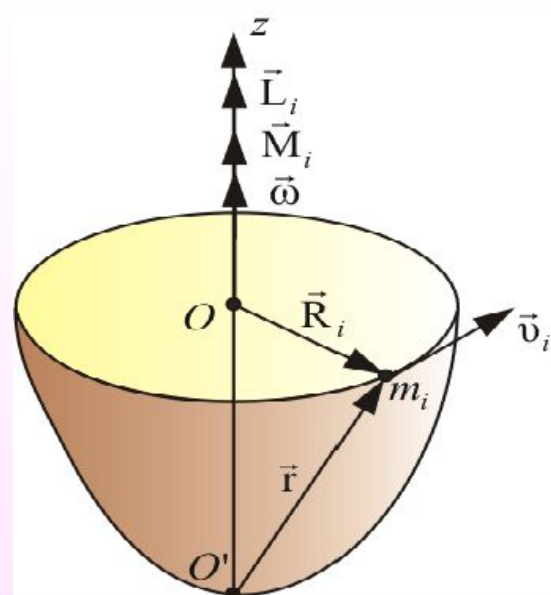
У всех точек $\mathcal{V}_i$ разная, а угловая скорость ω одинаковая, причем их модули связаны соотношением: $v_i = R_i \omega$. Тогда $L_{iz} = R_i m_i v_i = m_i R_i^2 \omega$

и уравнение моментов относительно оси z имеет вид: $\frac{d}{dt}(m_i R_i^2 \omega) = M_i$

Так как тело абсолютно твердое, то в процессе вращения m_i и R_i остаются неизменными.

Вынося эти константы за знак производной, получим уравнение моментов в виде:

$$m_i R_i^2 \frac{d\omega}{dt} = M_i.$$



Обозначим $I = m_i R_i^2$.

– момент инерции точки,
находящейся на расстоянии R от
оси вращения:

Так как тело состоит из огромного
количества точек и все они находятся

на разных расстояниях от оси вращения, то
момент инерции тела равен:

$$I = \sum m_i R_i^2$$

Для непрерывного тела сумма переходит в интеграл

$$I = \int_0^m R^2 dm,$$

где R – расстояние от оси z до элемента dm .

Как видно, момент инерции I – величина скалярная
и аддитивная.

Просуммируем полученные для всех i -тых точек уравнения моментов $\sum m_i R_i^2 \frac{d\omega}{dt} = \sum M_i$

Учтем, что $I = \sum m_i R_i^2$
 получим $I \frac{d\omega}{dt} = M$

$$I \varepsilon = M$$

Это основное уравнение динамики тела
вращающегося вокруг неподвижной оси.

(Сравним: $ma = F$ – основное уравнение динамики поступательного движения тела). Из сопоставления видно, что I отображает инерционные свойства тела (по отношению к данной оси вращения)

Момент импульса L_i любой точки равен

$$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega r_i = m_i r_i^2 \omega$$

Момент импульса L твердого тела – это сумма моментов импульсов всех его материальных точек

$$L = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_i m_i r_i^2$$

Ранее мы получили, что $\sum_i m_i r_i^2$, поэтому окончательно

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

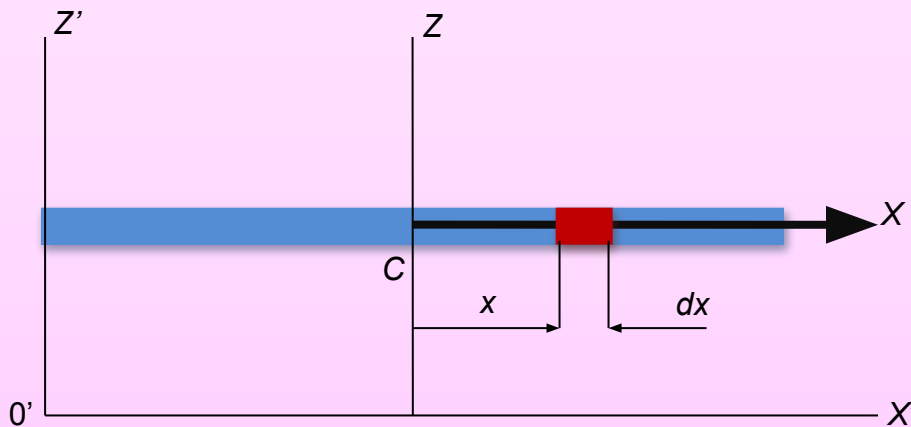
Для сравнения, в случае поступательного движения

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

3. Расчет моментов инерции некоторых простых тел.

В качестве примера вычислим момент инерции тонкого однородного стержня относительно оси z , проходящей через его центр масс — точку C . Длина стержня — l , его масса — M .

На расстоянии x от оси вращения выделим элемент dx , масса которого

$$dm = \frac{M}{l} dx$$


Момент инерции этой частицы стержня равен:

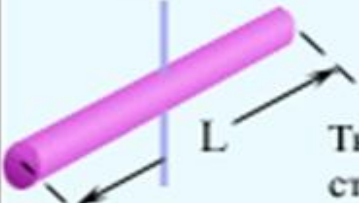
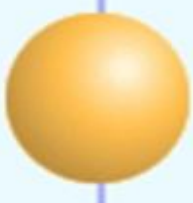
$$dI_z = \frac{M}{l} dx \cdot x^2$$

Вычислив подобным образом, моменты инерции всех элементов стержня, сложим их, взяв интеграл:

$$I_z = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{M}{l} x^2 dx = \frac{M}{l} \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{M}{l} \frac{x^3}{3} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \frac{M}{3l} \left[\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right] = \frac{Ml^2}{12}$$

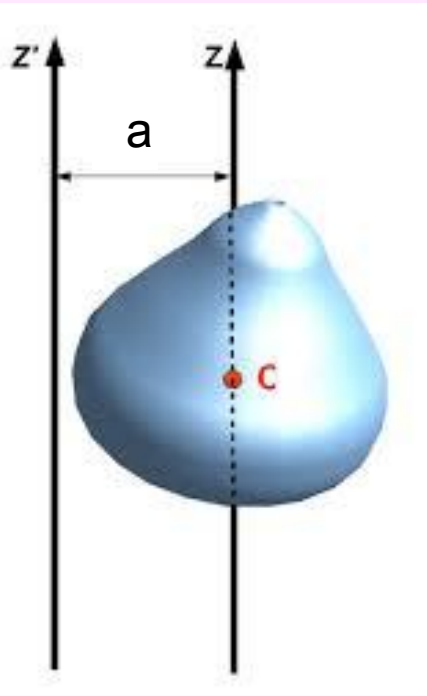
получаем
$$I_z = \frac{Ml^2}{12}$$

Моменты инерции некоторых тел

$I_c = \frac{1}{12} ML^2$  Твердый стержень	$I_c = \frac{2}{5} MR^2$  Шар	$I_c = \frac{2}{3} MR^2$  Тонкостенная сферическая оболочка
$I_c = MR^2$  Тонкостенный цилиндр	$I_c = \frac{1}{2} MR^2$  Диск	$I_c = \frac{1}{4} MR^2$  Диск

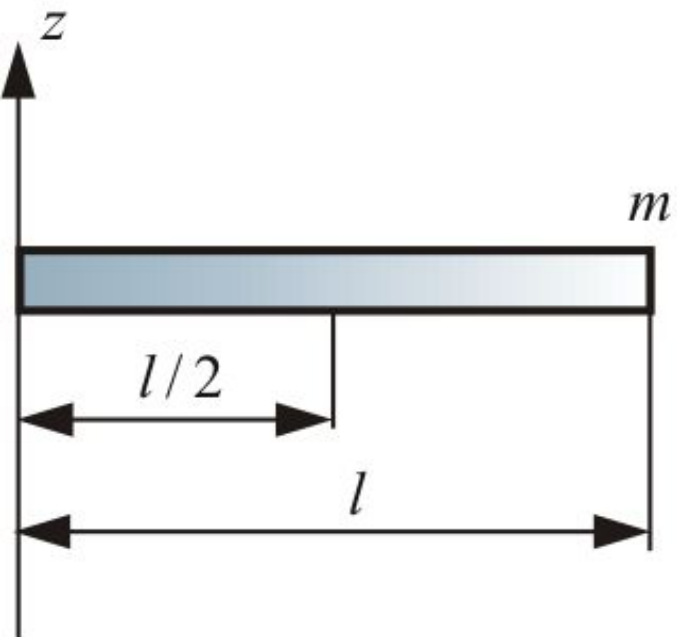
Теорема Гюйгенса-Штейнера

При вычислении момента инерции тела, вращающегося вокруг оси, не проходящей через центр инерции, следует пользоваться теоремой о параллельном переносе осей или теоремой Гюйгенса - Штейнера :



Момент инерции тела относительно произвольной оси (I) равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела M на квадрат расстояния между осями:

$$I = I_c + Ma^2$$



Пример: стержень массой m , длиной l , вращается вокруг оси, проходящей через конец стержня (рис).

$$I_c = \frac{1}{12} ml^2$$

$$I_z = I_c + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ml + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

4. Закон сохранения момента импульса

Вернемся ещё раз к уравнению моментов в виде:

$$M_z = \frac{d}{dt} (I_z \omega_z) = \frac{dL_z}{dt}$$

Оно в равной степени справедливо как для твердого тела, так и для системы тел. Если момент внешних сил относительно оси z равен нулю, то момент импульса системы относительно этой же оси будет оставаться постоянным.

$$M_z = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{L_z = I_z \omega_z = \text{const}}$$

Это закон сохранения момента импульса — аналог закона сохранения импульса.

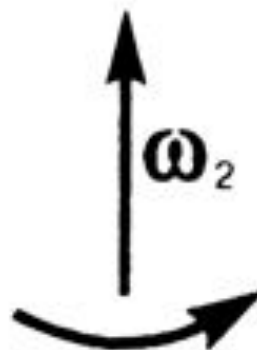
$$L_z = I_z \omega_z = \text{const}$$

Если не меняется момент импульса тела (L_z), то это не означает постоянства угловой скорости: если момент инерции вращающегося тела меняется, то будет меняться его угловая скорость даже в случае отсутствия внешних вращающих моментов. При этом сохранится неизменным произведение

$I_z \cdot \omega = \text{const}$, то есть угловая скорость окажется обратно пропорциональной моменту инерции тела (системы):

$$\omega = \frac{\text{const}}{I_z}$$

Известно много примеров, иллюстрирующих эту особенность закона сохранения момента импульса: вращение фигуристов и балерин, опыты на скамье Жуковского и т.п.



$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$$



$$J_1 > J_2$$
$$\omega_1 < \omega_2$$



5. Кинетическая энергия твердого тела

Вычислим кинетическую энергию K тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω , суммируя кинетические энергии бесконечно малых элементов тела

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2 = \frac{J \omega^2}{2}$$

где J – момент инерции тела относительно оси вращения тела, $v_i = r_i \omega$ – линейная скорость элемента тела с массой m_i .

Сравним с формулой для кинетической энергии поступательного движения

$$K = mv^2/2$$

Произвольное движение твердого тела.

Рассмотрим одно из простых движений абсолютно твердого тела – плоское движение. Это движение, при котором все точки тела остаются в параллельных плоскостях. Примером такого движения является качение цилиндра по горизонтальной или наклонной плоскостям. Пусть тело движется под действием некоторой системы внешних сил. Эту систему внешних сил можно всегда привести к центру масс тела O и заменить результирующей силой $F^{\text{внеш}}$, приложенной в точке O , и суммарным моментом внешних сил относительно этой же точки $M_o^{\text{внеш}}$

В результате полная система уравнений, описывающая произвольное движение абсолютно твердого тела, принимает вид:

$$\begin{cases} m \frac{d\vec{v}_0}{dt} = \vec{F}^{\text{внешн}} \\ \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0^{\text{внешн}} \end{cases}$$

где m - масса тела

$\vec{v}_0$ - скорость движения центра масс тела и

$\vec{L}_0$ - момент импульса тела относительно его центра масс.

Кинетическая энергия твердого тела,
совершающего поступательное ∇ движение со
скоростью движения центра масс V_0 и вращательное
движение с угловой скоростью ω описывается
выражением:

$$K_{\text{полн.}} = \frac{mv_o^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}$$

Здесь I_0 – момент инерции относительно
мгновенной оси вращения, проходящей через
центр инерции.

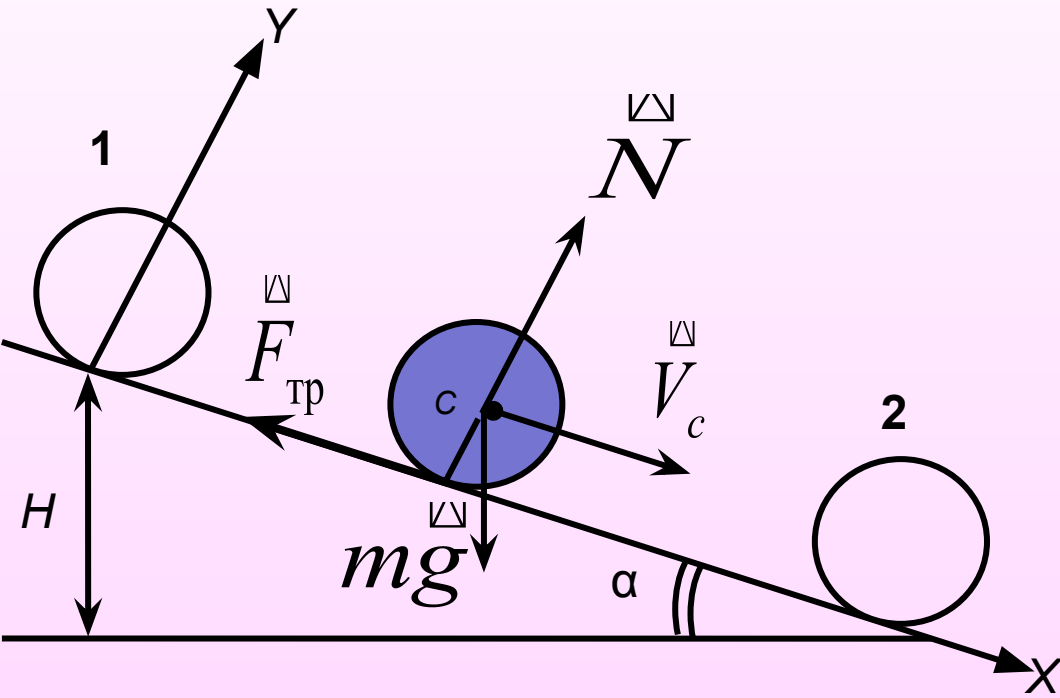
Условия равновесия абсолютно твердого тела
включают два динамических условия

$$\begin{cases} \vec{F}^{\text{внешн.}} = 0 \\ \vec{M}_0^{\text{внешн.}} = 0 \end{cases}$$

которые вытекают из уравнений движения, и два
кинематических условия

$$\begin{cases} \vec{v}_0 = 0 \\ \vec{L}_0 = 0 \end{cases}$$

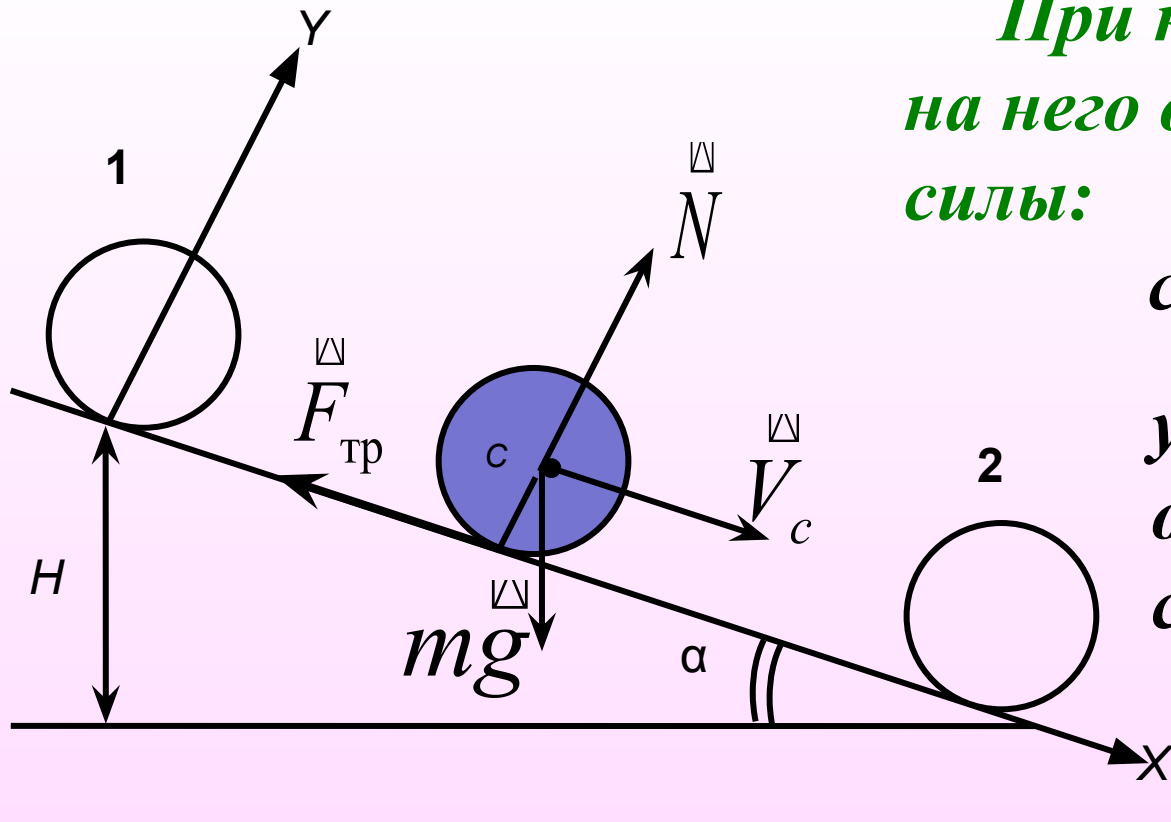
Скатывании цилиндра с наклонной плоскости.



Сплошной цилиндр массы m и радиуса R скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости. Угол наклона плоскости — α , а высота H

($H \gg R$). Начальная скорость цилиндра равна нулю. Определим скорость центра масс цилиндра у основания наклонной плоскости.

*При качении цилиндра
на него действуют три
силы:*



*сила тяжести mg
упругая сила реакции
опоры N и
сила трения покоя
 $F_{\text{тр}}$, т.к. качение
без проскальзывания*

*Представим это движение суммой двух движений:
поступательного со скоростью V_c , с которой
движется ось цилиндра, и вращательного вокруг оси
цилиндра с угловой скоростью ω .*

Эту задачу можно решить, воспользовавшись законом сохранения механической энергии.

В системе, правда, присутствует сила трения, но её работа равна нулю, поскольку точка приложения этой силы в процессе спуска остаётся неподвижной: ведь движение происходит без проскальзывания. Раз нет работы силы трения, механическая энергия системы не меняется.

Рассмотрим энергию цилиндра в начальный момент — на высоте H и в конце спуска. Полная энергия цилиндра в этих положениях одинакова:

$$mgh = \frac{1}{2} mV_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

Так как $I_C = \frac{1}{2} mR^2$, а $\omega = \frac{V_C}{R}$, получаем:

$$mgh = \frac{1}{2} mV_C^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \frac{V_C^2}{R^2} = \frac{3}{4} mV_C^2$$

Отсюда легко найдем конечную скорость цилиндра

.

$$V_C = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

Если стоит задача нахождения времени скатывания цилиндра, то для решения нужно воспользоваться уравнением моментов

*Из условия «**движение без проскальзывания**» имеем связь между угловой скоростью и скоростью центра масс:*

$$\omega = \frac{V_c}{R}$$

Продифференцировав это уравнение по времени, получим соотношение для ускорений:

$$\omega = \frac{V_c}{R} \quad \varepsilon = \frac{a_c}{R}$$

Воспользовавшись теоремой о движении центра масс, опишем поступательное движение цилиндра:

$$\sum F_{\text{внешн}} = mg + N + F_{\text{тр}} = ma_c$$

Спроецировав уравнение на направления осей x и y , получим два скалярных уравнения:

$$x: \quad mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = ma_c \quad (1)$$

$$y: \quad N - mg\cos\alpha = 0 \quad (2)$$

Для описания вращения воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения:

$$M_c = I_c \cdot \varepsilon \quad \left(I_c = \frac{1}{2} mR^2 \right)$$

Из трёх названных сил момент относительно оси цилиндра создаёт только сила трения:

$$M_c = M(\overset{\sqcap}{F}_{\text{тр}}) = F_{\text{тр}} \cdot R$$

Учитывая всё это, уравнение моментов перепишем так:

$$F_{\text{тр}} R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} m R \frac{a_c}{R} = \frac{1}{2} m R \cdot a_c$$

Решая совместно уравнения движения (1), (2), и (3) получим следующие значения неизвестных величин:

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{3} m g \sin \alpha \quad a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

Из выражения для $F_{\text{тр}}$ следует, что с увеличением угла наклона α должна возрастать и сила трения покоя $F_{\text{тр}}$.

Но, как известно, её рост ограничен предельным значением:

$$F_{\text{тр ск}} = \mu \cdot N = \mu mg \cos \alpha$$

Следовательно, должно выполняться неравенство:

$$\frac{1}{3}mg \sin \alpha \leq \mu mg \cos \alpha.$$

*Отсюда следует, что скатывание будет происходить **без проскальзывания** до тех пор, пока угол α не превзойдёт значения $\alpha_{\text{пред}}$:*

$$\alpha_{\text{пред}} = \arctg 3\mu.$$

Здесь μ — коэффициент трения цилиндра по плоскости.

Линейное ускорение цилиндра величина неизменная, следовательно, поступательное движение цилиндра равноускоренное. При таком движении без начальной скорости цилиндр достигнет основания наклонной плоскости за время:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}}, \text{ где } l = \frac{h}{\sin \alpha} \quad \begin{array}{l} \text{длина наклонной} \\ \text{плоскости} \end{array}$$

Так как $a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$, то время скатывания:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot 3}{\sin \alpha \cdot 2g \sin \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{3h}{g}}$$

Вычислим конечную скорость поступательного движения оси цилиндра:

$$V_c = a_c t = \frac{2}{3} g \sin \alpha \cdot \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{3h}{g}} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

Она совпадает с результатом, полученным выше более простым путем, исходя из закона сохранения энергии.

Сходство и различие линейных и угловых характеристик движения

Формулы кинематики и динамики вращательного движения легко запоминаются, если **сопоставить их с формулами поступательного движения.**

Отмечу, что в приведенной ниже таблице рассмотрены случаи движения с постоянными ускорениями:

$$a = \text{const} \quad \varepsilon = \text{const}$$

Поступательное движение

$$v = \frac{dS}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$v = v_0 \pm at$$

$$S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$

$$S = \int_0^t v dt$$

Вращательное движение

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

$$\varphi = \int_0^t \omega dt$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$m\vec{v} = \text{const}$$

$$I\vec{\omega} = \text{const}$$

$$A = FS$$

$$A = M\varphi$$

$$N = Fv$$

$$N = M\omega$$

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}$$

$$\frac{I\omega^2}{2} + mgh = \text{const}$$

Таблица 6.1

Поступательное движение		Вращательное движение	
Путь	S	Угол поворота	φ
Скорость	$v = \frac{dS}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение	$a = \frac{dv}{dt}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
	$v = v_0 \pm at$ $S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$ $S = \int_0^t v dt$		$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ $\varphi = \int_0^t \omega dt$

Основное уравнение динамики поступательного движения	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $m\vec{a} = \vec{F}$	Основное уравнение динамики вращательного движения	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Закон сохранения импульса	$m\vec{v} = \text{const}$	Закон сохранения момента импульса	$I\vec{\omega} = \text{const}$
Работа	$A = F \cdot S$	Работа вращения	$A = M \cdot \varphi$
Кинетическая энергия	$K = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия вращающегося тела	$K_{\text{вр.}} = \frac{I\omega^2}{2}$
Полная энергия тела, катящегося с высоты h			
$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$			