

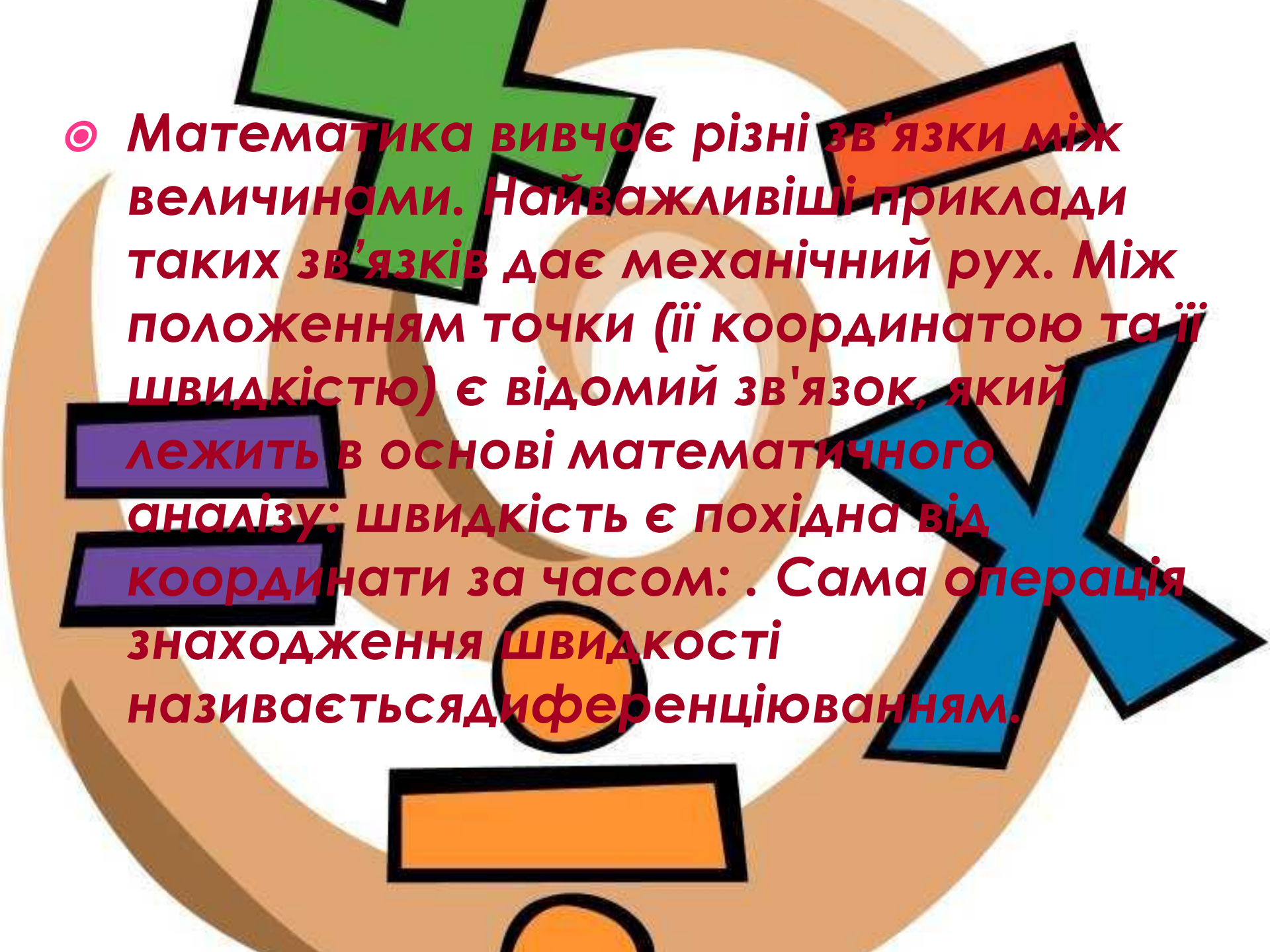
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

# 11 клас

Застосування похідної та інтеграла до розв'язування задач з фізики, механіки та математики



©



◎ Математика вивчає різні зв'язки між величинами. Найважливіші приклади таких зв'язків дає механічний рух. Між положенням точки (її координатою та її швидкістю) є відомий зв'язок, який лежить в основі математичного аналізу: швидкість є похідна від координати за часом:  $v = \frac{ds}{dt}$ . Сама операція знаходження швидкості називається диференціюванням.

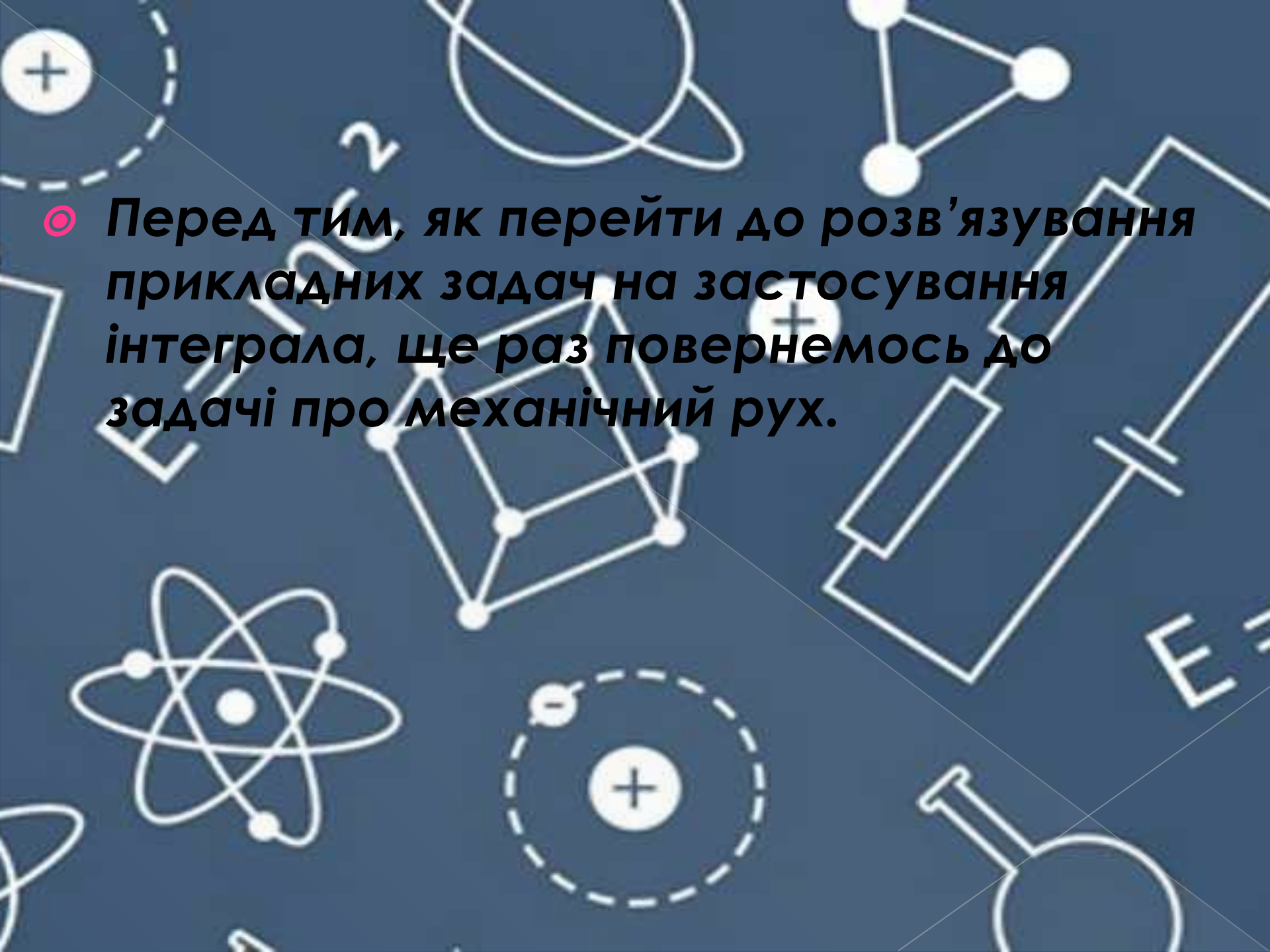


- Розв'язування оберненої задачі –  
находження положення точки за її  
швидкістю – приводить до поняття  
первісної функції і розв'язується за  
допомогою іншої математичної  
задачі, яка  
називається інтегруванням.



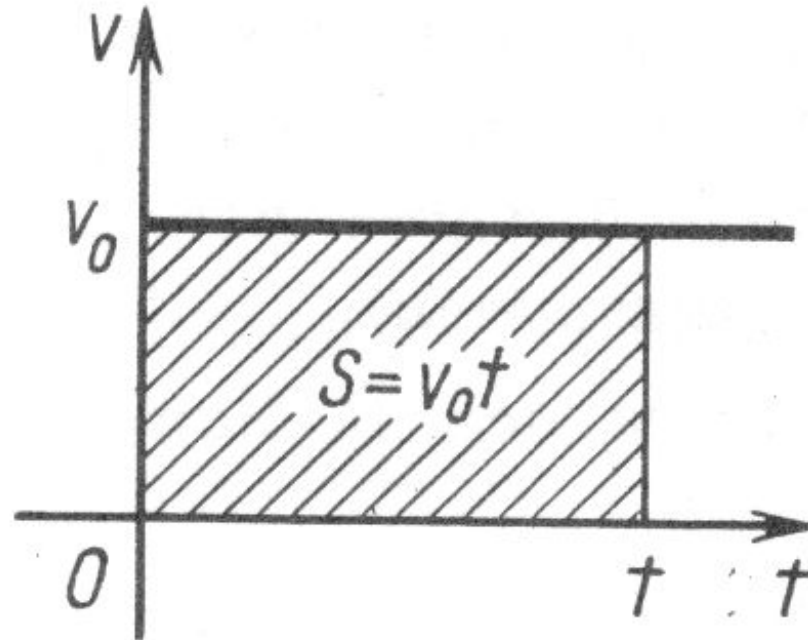
# Фізика

- Ви знаєте багато прикладів пар величин, які пов'язані між собою так само, як положення точки та її швидкість. Знаходження однієї з величин, якщо відома друга, ми зводили до операції диференціювання. Так, лінійна густина тонкого стержня є похідна від його маси за довжиною, потужність є похідна від роботи за часом, сила струму є похідна заряду за часом і т.д.



○ **Перед тим, як перейти до розв'язування прикладних задач на застосування інтеграла, ще раз повернемося до задачі про механічний рух.**

Нехай точка рухається зі сталою швидкістю .  
Графіком швидкості в системі  
координат буде пряма , паралельна осі  
часу (Мал.1).



$$E = h\nu$$

$$F_e = k \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$U = \frac{W_{AB}}{q} = \frac{|E_{PA} - E_{PB}|}{q} = |\varphi_A - \varphi_B|$$

$$v = \frac{wh}{2\pi r m_e}$$

$$\varphi_E = \frac{F_e}{q_0} = k \frac{q}{r^2} \varphi$$

$$X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L = 2\pi f L$$

$$F_g = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2}$$

Якщо вважати, що в початковий момент часу точка знаходилася в початку координат, то її шлях, пройдений за час, обчислюється за формулою. Величина являє собою площу прямокутника, обмеженого графіком швидкості, віссю абсцис та двома вертикальними прямими, тобто шлях точки можна обчислити як площу під графіком швидкості.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$M_0 = \frac{4\pi^2 r^3}{g T^2}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{r_1}}$$

$$E_k = \frac{h^2}{8mL^2}$$

$$h = \frac{h p g}{2m}$$

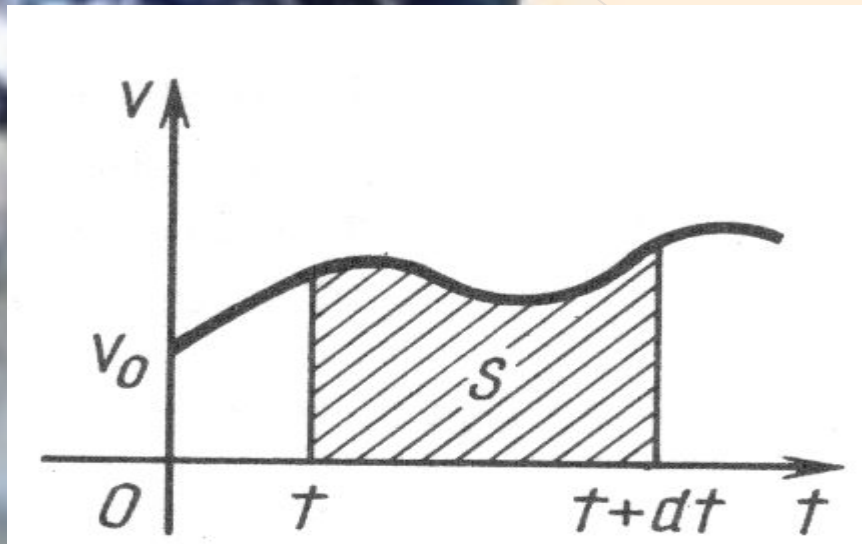
$$\sigma = \frac{\rho}{S}$$

$$M = F d \cos \theta$$

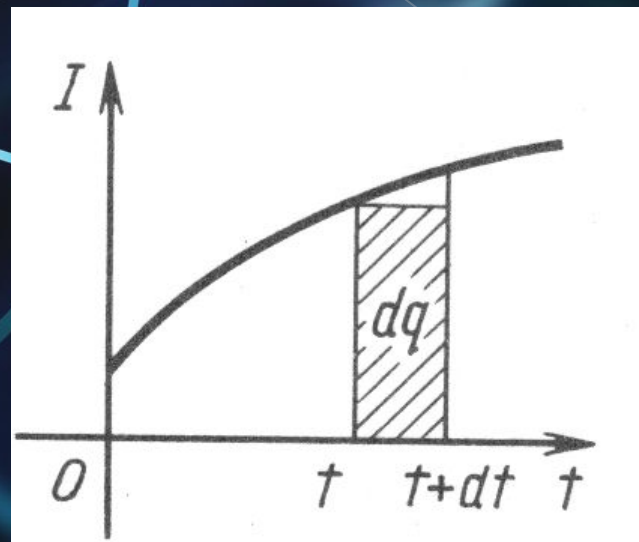
○ Звернемось до випадку нерівномірного руху. Тепер швидкість можна вважати сталою тільки на маленькому відрізку часу. Якщо швидкість змінюється за законом  $v=v(t)$ , то шлях, пройдений точкою за проміжок  $[t;t+dt]$ , наближено дорівнює добутку  $v(t)dt$ , а на графіку – площі прямокутника зі сторонами  $dt$  і  $v(t)$



Точне значення шляху за проміжок часу дорівнює площі криволінійної трапеції, що заштрихована на малюнку (Мал.2). Весь шлях дорівнює сумі площ всіх таких криволінійних трапецій, тобто дорівнює площі під графіком швидкості.



Аналогічно якщо ми накреслимо графік залежності сили струму від часу  $I=I(t)$ , то величина заряду, який буде перенесено струмом за проміжок часу  $[t;t+dt]$ , наближено обчислюється за формулою  $I(t)dt$ , тобто дорівнює площі прямокутника зі сторонами  $dt$  і  $I(t)$  (Мал.3). Точне значення величини заряду можна обчислити як площу під графіком сили струму.

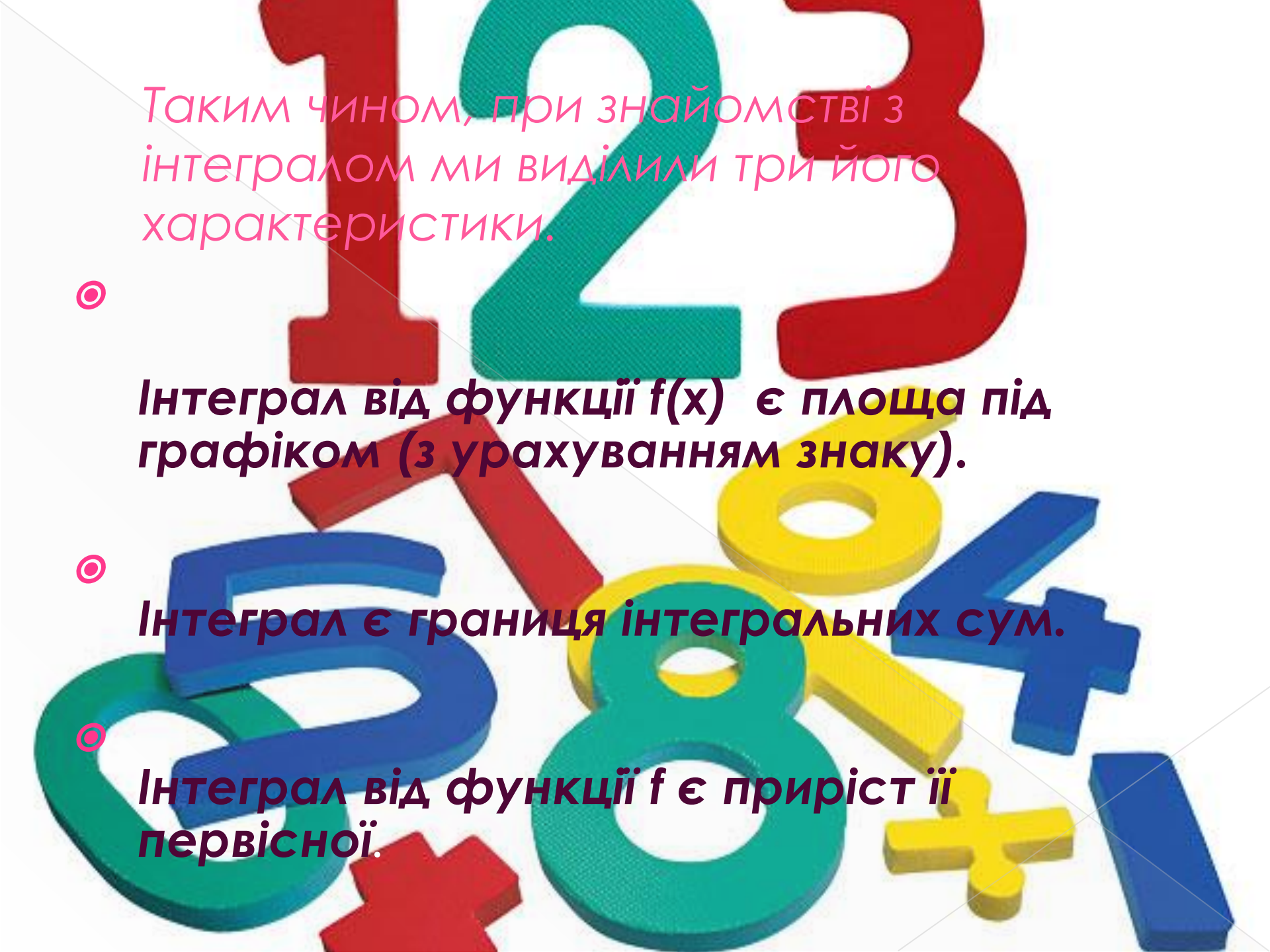




⦿ **Таким чином задача інтегрування  
тісно пов'язана з задачею  
обчислення площі.**

# Математика

- ◎ Ви знаєте, що задача обчислення площі під графіком функції – площі криволінійної трапеції – тісно пов'язана з інтегралом. Можна про інтеграл коротко сказати так: Інтеграл – це площа.



Таким чином, при знайомстві з інтегралом ми виділили три його характеристики.



**Інтеграл від функції  $f(x)$  є площа під графіком (з урахуванням знаку).**



**Інтеграл є границя інтегральних сум.**

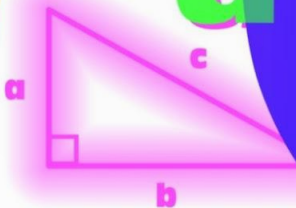


**Інтеграл від функції  $f$  є приріст її первісної.**

○ Будь-яка з цих характеристик інтегралу може слугувати основою для його застосувань. Найбільш стандартним шляхом вираження однієї величини як інтеграл від іншої є використання третьої характеристики інтеграла як приросту первісної. Але і дві перші характеристики дуже важливі в застосуванні, так як дозволяють отримати геометричний зміст зв'язку між фізичними величинами та простий спосіб їх наближеного обчислення.

● **Інтеграл застосовується тоді, коли відома швидкість (густина)  $f$  шуканої величини. Якщо шукану величину подати у вигляді приросту деякої функції  $F$ , то  $f$  є похідною для  $F$ , а отже  $F$  є первісною для  $f$ , тобто інтеграл від функції  $F$**

$$a^2 + b^2 = c^2$$



- Запишемо тепер все це за допомогою формул. У якості незалежної змінної виберемо літеру  $t$ . Нехай ми шукаємо величину  $F$ . Розглянемо її значення на маленькому відрізку  $[t; t+dt]$ . Нехай швидкість зміни величини  $F$  позначено  $f$ .




Цей зв'язок між величинами  $F$  і  $f$  можна записати у диференціальній формі:

- $dF = f(x) dt$

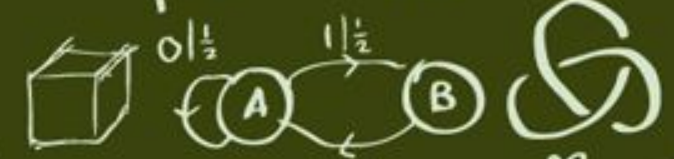
- Тоді


$$F = \int_a^b f(t) dt$$

○ Повернемося до величин, які можна обчислювати за допомогою інтеграла. До таких величин можна віднести переміщення, роботу, масу, електричний заряд, тиск, теплоту. До них можна приєднати і геометричні величини – довжину, площу, об'єм.


 $|Q| = |N| = \kappa_0$   
 $(P \Rightarrow Q) \sim (\neg P \vee Q)$

$$\varphi: \mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$





$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$



$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ 

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v \right) = -\nabla p + \nu \nabla^2 v + f$$

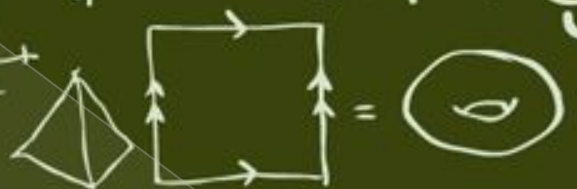


**Дякую за увагу!**

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), f(x) = F'(x)$$



$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}$$