

Неопределенный интеграл

Лекция 13.10.2016 г.

Элементы интегрального **исчисления**

- 1. Первообразная и неопределенный интеграл**
- 2. Основные приемы вычисления неопределенных интегралов**
- 3. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен**
- 4. Интегрирование дробно-рациональных функций**
- 5. Интегрирование тригонометрических функций**
- 6. Интегрирование некоторых иррациональностей**

Неопределенный интеграл, его свойства и вычисление

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, определенной на некотором промежутке, если $F'(x) = f(x)$ для каждого x из этого промежутка.

Например, функция $\cos x$ является первообразной функции $-\sin x$, так как $(\cos x)' = -\sin x$.

Первообразная и неопределенный интеграл

Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, то $F(x) + C$, где C - некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x) = F(x) + C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

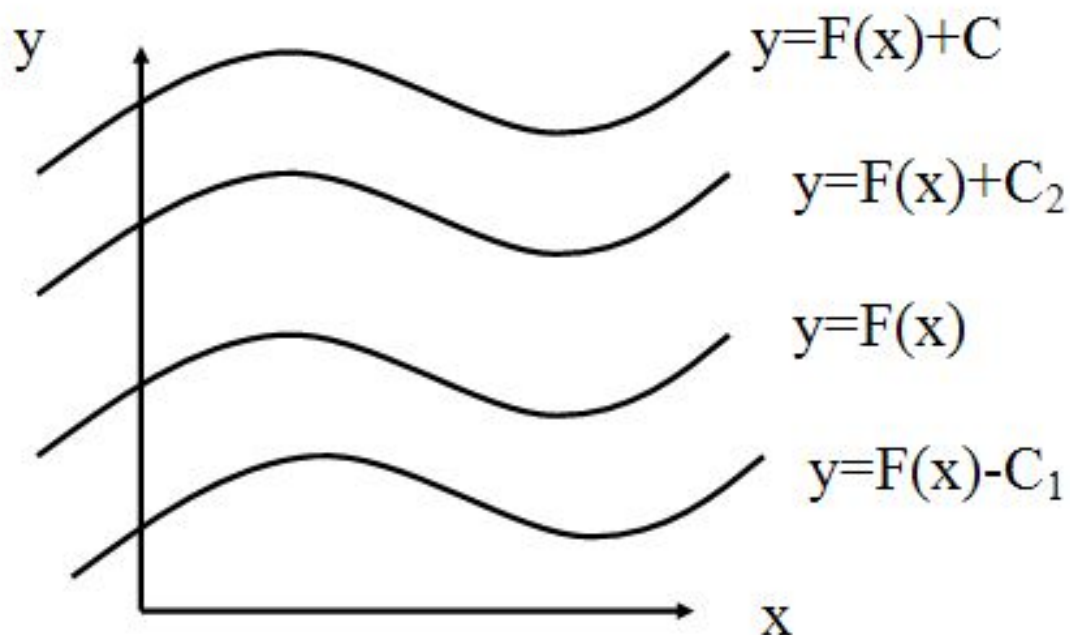
Первообразная и неопределенный интеграл

Если $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то пишут $\int f(x)dx = F(x) + C$, хотя правильнее бы писать $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$.

Мы по устоявшейся традиции будем писать $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Тем самым один и тот же символ $\int f(x)dx$ будет обозначать как всю совокупность первообразных функции $f(x)$, так и любой элемент этого множества.

Геометрический смысл неопределенного интеграла



Свойства интеграла, **вытекающие из определения**

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал-подынтегральному выражению.

Действительно:

1. $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x);$
2. $d\int f(x)dx = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx.$

Свойства интеграла, вытекающие из определения

Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции плюс постоянная:

$$3. \quad \int f'(x) dx = f(x) + C, \quad \text{так как } f(x) \text{ является первообразной для } f'(x).$$

Свойства интеграла

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x) + f_2(x)$ также имеет первообразную, причем

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx ;$$

5. $\int Kf(x) dx = K \int f(x) dx ;$

6. $\int f'(x) dx = f(x) + C ;$

7. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C .$

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C .$

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1) .$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$

5. $\int e^x dx = e^x + C .$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C .$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C .$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C .$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C .$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C .$

Таблица неопределенных интегралов

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C .$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C ..$$

$$13. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C .$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C .$$

$$15. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$16. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C .$$

Использование свойств дифференциала

При интегрировании удобно
пользоваться свойствами:

$$1. \, dx = \frac{1}{a} d(ax)$$

$$2. \, dx = \frac{1}{a} d(ax + b),$$

$$3. \, xdx = \frac{1}{2} dx^2,$$

$$4. \, x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3.$$

Примеры

Пример . Вычислить $\int \cos 5x dx$.

Решение. В таблице интегралов найдем
 $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Преобразуем данный интеграл к табличному,
воспользовавшись тем, что $d(ax) = a dx$.

Тогда:

$$\begin{aligned}\int \cos 5x dx &= \int \cos 5x \frac{d(5x)}{5} = \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) = \\ &= \frac{1}{5} \sin 5x + C .\end{aligned}$$

Примеры

Пример. Вычислить $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx &= \int x^2 dx + 3 \int x^3 dx + \int x dx + \int dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C\end{aligned}$$

Интеграл от сложной функции, аргумент которой является линейной функцией

При вычислении интегралов удобно пользоваться следующими свойствами интегралов:

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x + b)dx = F(x + b) + C$.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$.

Пример

$$\int (2 + 3x)^5 dx = \frac{1}{3 \cdot 6} (2 + 3x)^6 + C.$$

Методы интегрирования

Непосредственное **интегрирование**

Используя свойства неопределенного интеграла и формулы школьного курса, приводят подынтегральную функцию к табличному виду.

Замена переменной

Требуется найти $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем. Часто удастся найти первообразную, введя новую переменную, по формуле

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'_t(t)dt, \text{ где } x = \varphi(t), \text{ а } t -$$

новая переменная.

Подынтегральное выражение представляет собой дифференциал сложной функции.

Предположить вид новой переменной поможет знание таблицы производных.

Интегрирование по частям

Этот метод основан на формуле $\int u dv = uv - \int v du$.

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а) $\int x^n \sin x dx$, где $n = 1, 2 \dots k$;

б) $\int x^n e^x dx$, где $n = 1, 2 \dots k$;

в) $\int x^n \arctg x dx$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm k$.;

г) $\int x^n \ln x dx$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm k$.

При вычислении интегралов а) и б) вводят

обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nx^{n-1} dx$, а, например

$\sin x dx = dv$, тогда $v = -\cos x$.

При вычислении интегралов в), г) обозначают за u функцию

$\arctg x$, $\ln x$, а за dv берут $x^n dx$.

Вспомогательная таблица для интегрирования по частям

Подынтегральное выражение $u dv$	Обозначение в качестве u	Обозначение в качестве dv	Сколько раз?
$P_n(x)e^x dx$	$P_n(x)$	$e^x dx$	n
$P_n(x)\ln x dx$	$\ln x$	$P_n(x) dx$	1
$P_n(x)\cos x dx$	$P_n(x)$	$\cos x dx$	n
$P_n(x)\sin x dx$	$P_n(x)$	$\sin x dx$	n
$P_n(x)\arctg x dx$	$\arctg x$	$P_n(x) dx$	1
$e^x \cos x dx$	e^x $\cos x$	$\cos x dx$ $e^x dx$	2
$e^x \sin x dx$	e^x $\sin x$	$\sin x dx$ $e^x dx$	2

Примеры

Пример. Вычислить $\int x \cos x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \int \cos x dx \end{array} \right. \\ &= \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C . \end{aligned}$$

Пример. Вычислить

$$\int x \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C.$$