Производная в окружающем мире.

Творческое название

Гимн производной

Флюксия! Слово прекрасное, может, волшебное?

Флюксия! Петь даже хочется что-то душевное.

Флюксия! Точки экстремума: минимум, максимум.

Флюксия! Флюксия! Флюксия!

Цель проекта:

- Повторить понятие производной;
- Выявить сферы применения производной;
- Умение самостоятельно находить, изучать и обобщать учебный материал.
- Умение применять полученные знание в нестандартных и жизненных ситуациях.
- Научиться составлять и решать задачи с применением производной.

Основополагающий вопрос

Значит
изучать
производную
нам нужно?

Типология проекта:

обобщающий, с элементами исследования

Категория учащихся:

10 класс

Предметные области:

алгебра и начала анализа, геометрия, физика, химия, география, экономика, биология, история.

ПРОБЛЕМНЫЕ ВОПРОСЫ

- История возникновения производной.
- Задачи, приводящие к применению производной.
- Понятие производной.
- Геометрический смысл производной.
- Физический смысл производной.
- Уравнение касательной к графику функции.

Математика в школе - это достаточно сложный предмет, и самое главное для учащихся – понять, зачем она нужна.

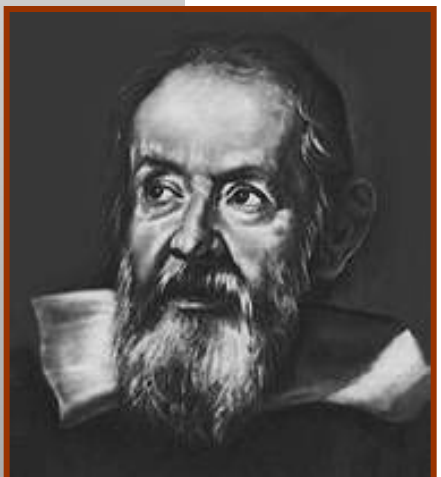
Мы изучаем производную. А так ли это важно в жизни?

«Дифференциальное исчисление- это описание окружающего нас мира, выполненное на математическом языке. Производная помогает нам успешно решать не только математические задачи, но и задачи практического характера в разных областях науки и техники.»

Г. Лейбниц

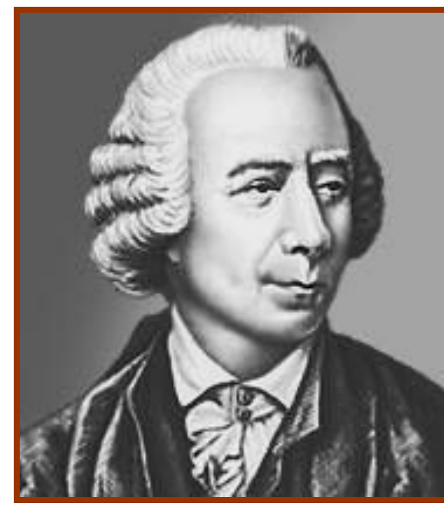
И. Ньютон

Р. Декарт



Г.Галилей

Ж. Лагранж

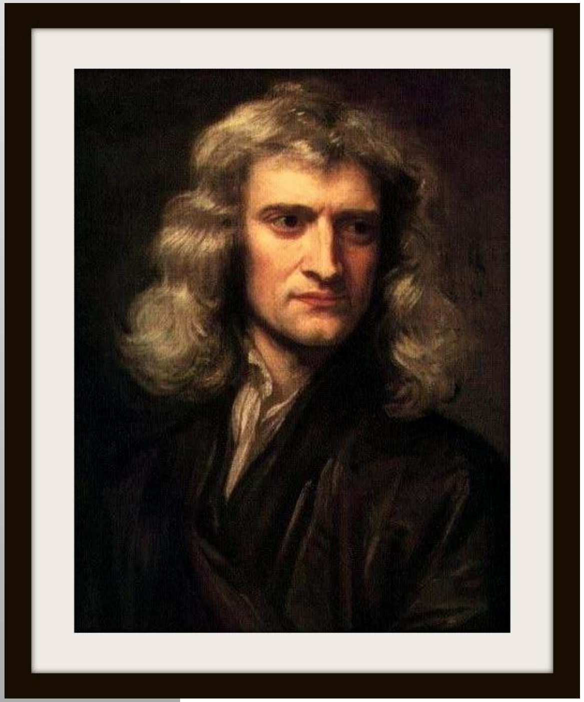


Л. Эйлер

Начнём…

- Производная – одно из фундаментальных понятий математики. Оно возникло в 18 веке. Независимо друг от друга И. Ньютон и Г. Лейбниц разработали теорию дифференциального исчисления.

История появления производной



Это открытие Ньютона стало поворотным пунктом в истории естествознания.

История появления производной

К этим законам Лейбниц пришел, решая задачу проведения касательной к произвольной кривой, т.е. сформулировал геометрический смысл производной, что значение производной в точке касания есть угловой коэффициент касательной или tg угла наклона касательной с

положительным

направлением оси OX.

История появления производной

Термин производная и современные обозначения y’ , f ’ ввёл Ж.Лагранж в 1797г.

Ж. ЛАГРАНЖ

А кстати

Большой вклад в изучение дифференциального исчисления внесли Лопиталь, Бернулли, Лагранж, Эйлер, Гаусс, Коши.

Необходимо сказать, что ни Ньютон ни Лагранж не дали четкого определения производной.

Впервые определение производной было сформулировано Коши, и именно это определение стало общепринятым и в настоящее время используется почти во всех курсах анализа.

САМОПРОВЕРКА!!!

Примеры применения

Найдите производные функций.

1 $f(x) = 3\cos x - x^3$

Проверяем

$$f'(x) = (3\cos x - x^3)' = 3(\cos x)' - (x^3)' =$$

$$= -3\sin x - 3x^2$$

Формулы:

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad (c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

САМОПРОВЕРКА!!!

2 $$f(x)=\frac{4}{5}x^5-2x^4+\frac{5}{4}x^2-x-2$$

Проверяем

$$f'(x)=\frac{4}{5}\cdot 5x^4-2\cdot 4x^3+\frac{5}{4}\cdot 2x-1-0=$$

$$=4x^4-8x^3+\frac{5}{2}x-1$$

Формулы:

$$x'=1$$

$$c'=0$$

САМОПРОВЕРКА!!!

3 $f(x) = 2\sin 3x$

U

Проверяем

$$f'(x) = 2 \cdot \cos 3x \cdot (3x)' =$$

U U

$$= 2 \cdot \cos 3x \cdot 3 = 6\cos 3x$$

Производная сложной функции:

$$(\sin U)' = \cos U \cdot U'$$

САМОПРОВЕРКА!!!

Преобразуем:

4 $$f(x)=\frac{5}{(1-2x)^3}=5(1-2x)^{-3}$$

U

Проверяем

$$f'(x)=5\cdot(-3)\cdot(1-2x)^{-3-1}\cdot(1-2x)'=$$

U U

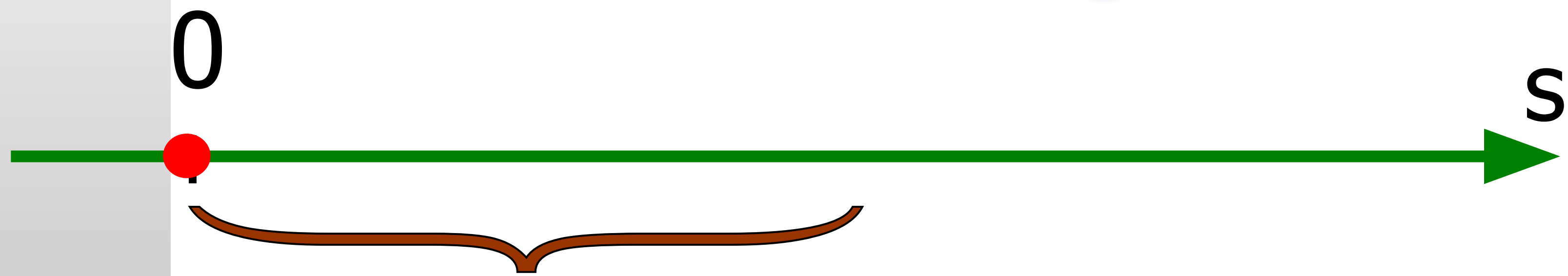
$$=-15\cdot(1-2x)^{-4}\cdot(-2)=30\cdot(1-2x)^{-4}$$

Производная сложной функции:

$$(U^{n})'=U^{n-1}\cdot U'$$

ЗНАНИЕ ТЕОРИИ ОБЯЗАТЕЛЬНО!!!

Механический смысл производной



S(t) за время t

$$S'(t) = V(t) \qquad V'(t) = a(t)$$

S(t) - перемещение точки за время t

V(t) – скорость точки в момент t

a(t) – ускорение точки в момент t

ЗНАНИЕ ТЕОРИИ ОБЯЗАТЕЛЬНО!!!

Геометрический смысл производной

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = к$$

значение производной в точке X_0

угловой коэффициент касательной

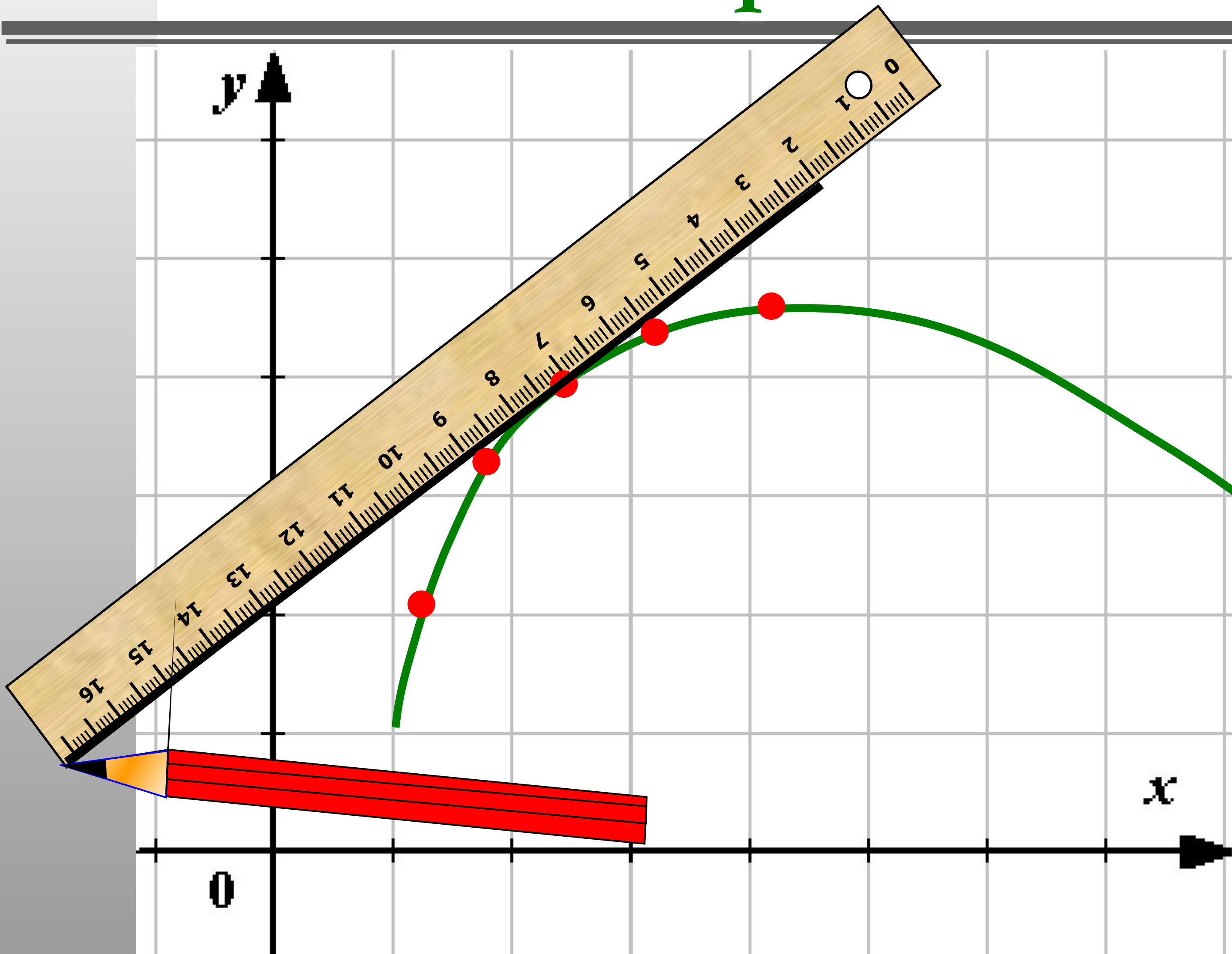
тангенс угла наклона касательной к положительному направлению оси ОХ

Производная в математике

1. Геометрический смысл производной.

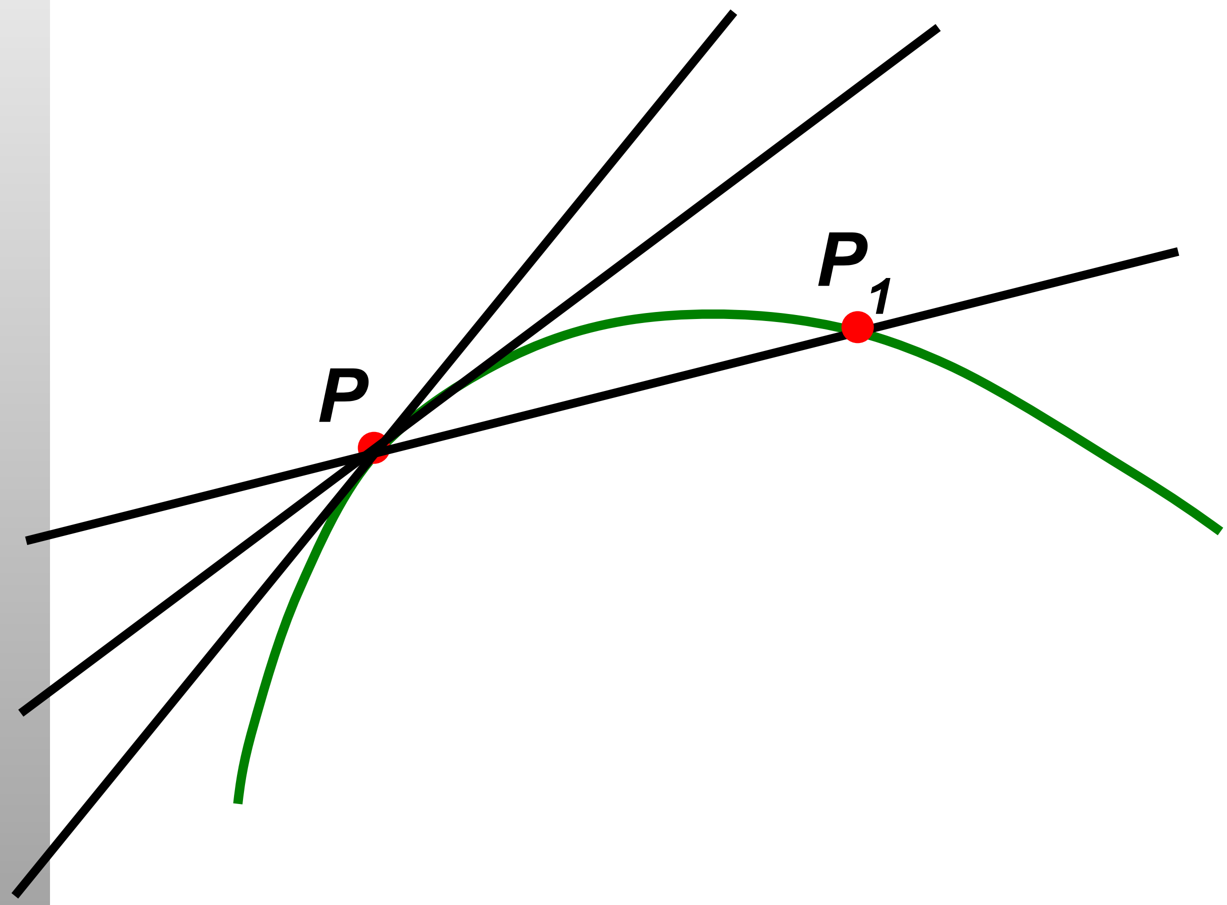
«Если продолжить одно из маленьких звеньев ломаной, составляющей кривую линию, то эта продолженная таким образом сторона будет называться касательной к кривой.»

Касательная к кривой.

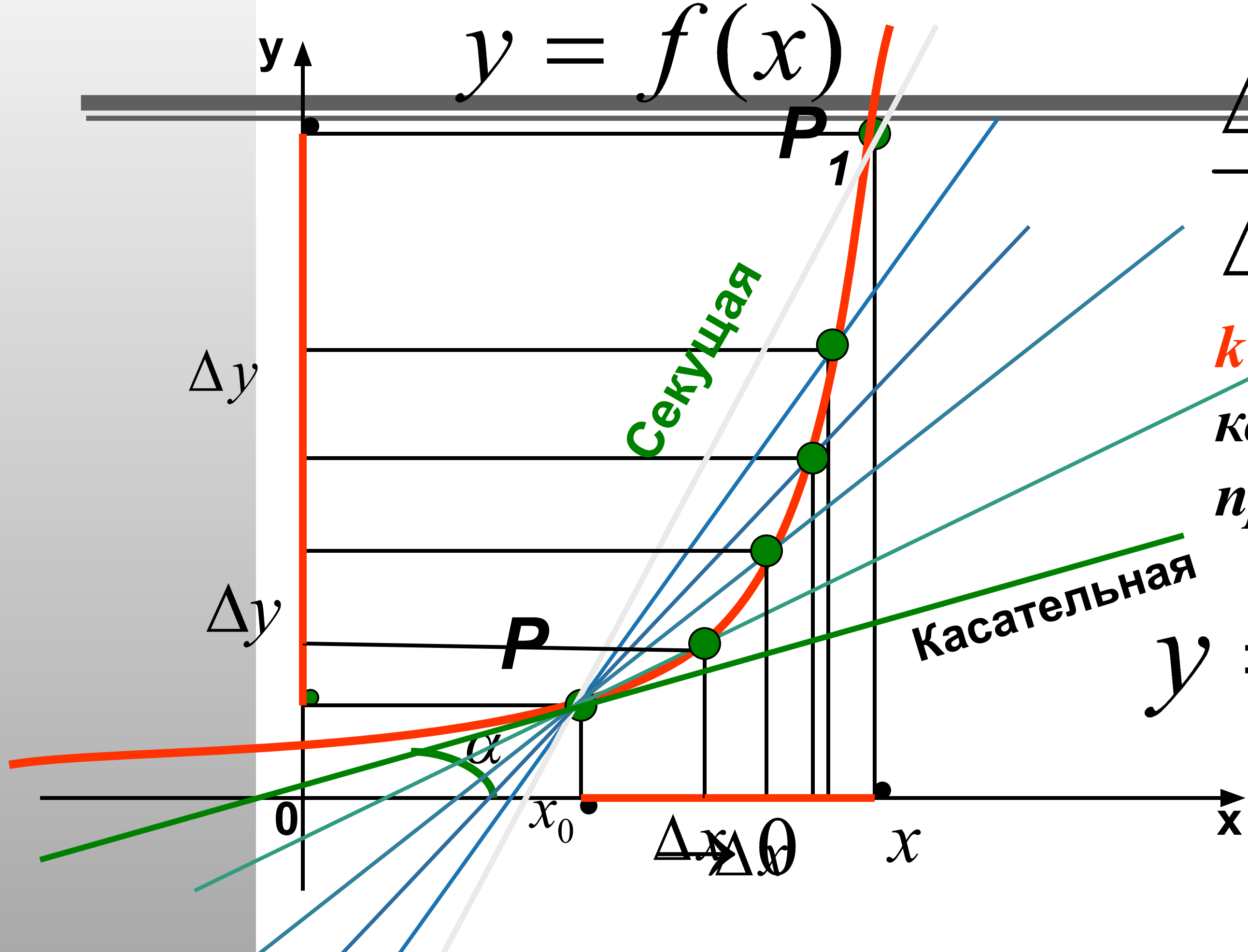


Производная

- это угловой коэффициент касательной.



1. Геометрический смысл производной.



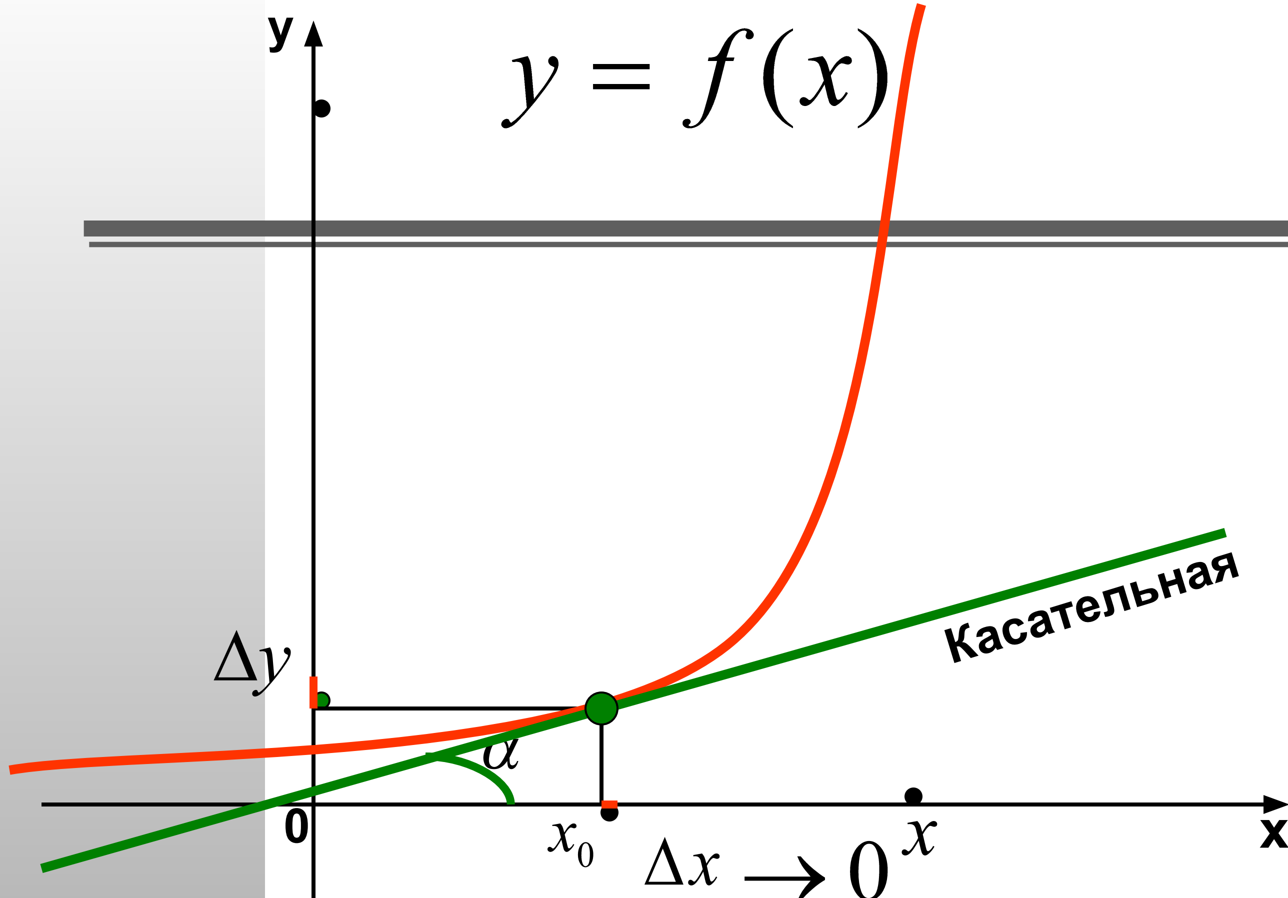
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k$$

***k** – угловой коэффициент прямой(секущей)*

$$y = kx + b$$

Секущая стремится занять положение касательной.

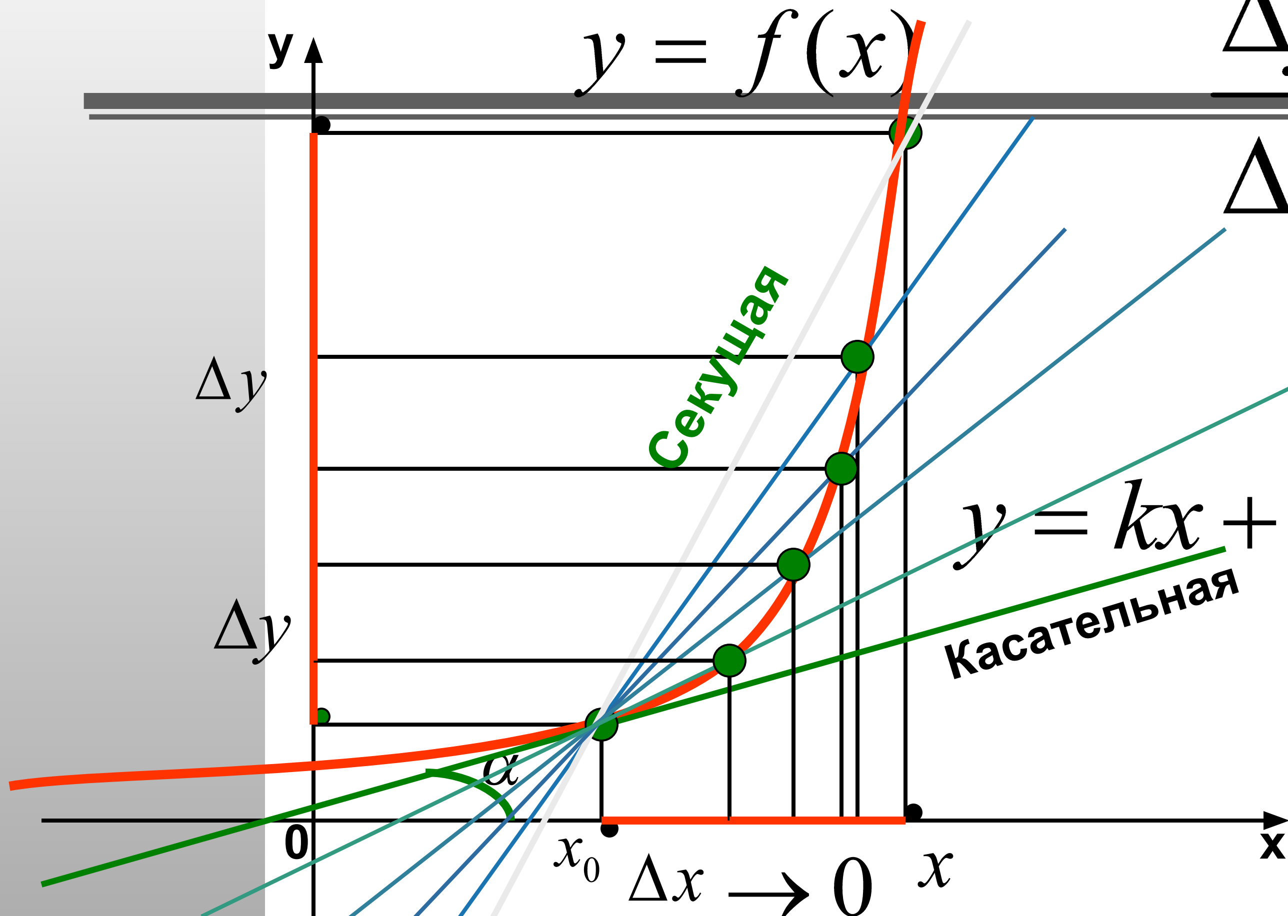
То есть, касательная есть предельное положение секущей.



Угловой коэффициент касательной можно найти как предел выражения:

$$k(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Опредление производной от функции в данной точке.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha = k$$

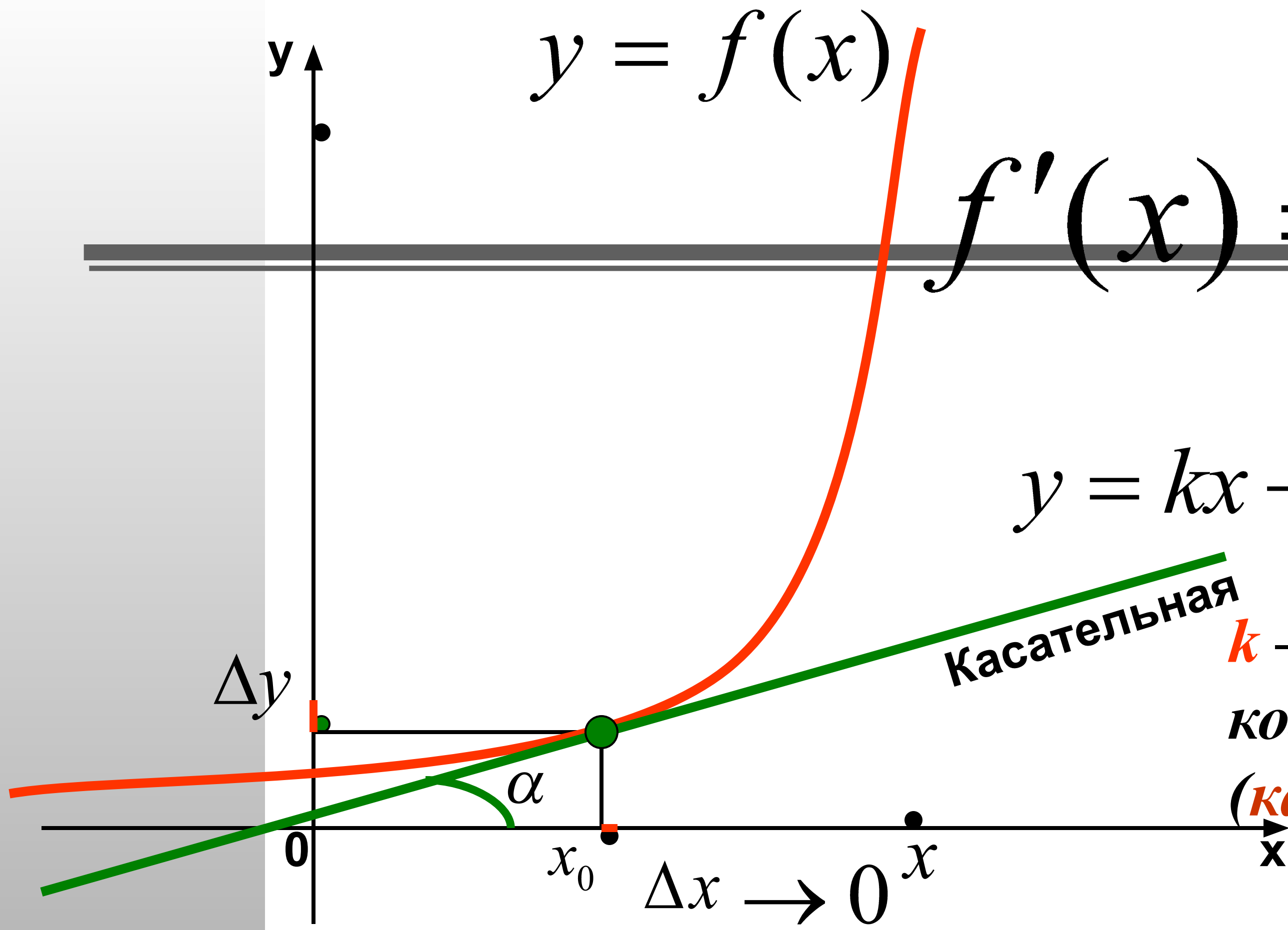
***k* – угловой коэффициент прямой(секущей)**

$$y = kx + b$$

Обозначение:

$$f'(x)$$

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется число, к которому стремится отношение $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.



$$f'(x) = tg\alpha = k$$

***k* – угловой коэффициент прямой (касательной)**

Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой.

$$y = \cos 2x \qquad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

Решение.

f '(x₀) = tg α = к

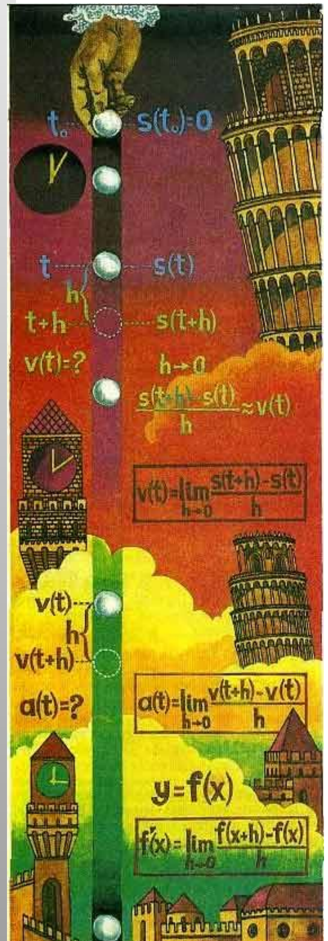
$$y' = (\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2\sin 2x$$

к = $y'(\frac{\pi}{4}) = -2\sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = -2$

Угловой коэффициент касательной равен -2 .

Производная в физике

УЧЁНЫЕ ФИЗИКИ



Будем вслед за итальянским учёным Г.Галилеем изучать закон свободного падения тел. Поднимем камешек и затем из состояния покоя отпустим его. Движение свободно падающего тела явно неравномерное. Скорость *v* постепенно возрастает. Но как именно выглядит зависимость *v(t)* ?

Фиксируем момент t, в который мы хотим знать значение скорости $v(t)$. Пусть h – небольшой промежуток времени, прошедший от момента t. За это время падающее тело пройдёт путь, равный $s(t+h)-s(t)$.

Если промежуток времени h очень мал, то приближённо

$s(t+h)-s(t)\approx v(t)\cdot h$, или $\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}\approx v(t)$, причём

последнее приближённое равенство тем точнее, чем меньше h.

Значит величину $v(t)$ скорости в момент t можно рассматривать как ***предел***, к которому стремится отношение, выражающее среднюю скорость на интервале времени от момента t до момента $t+h$.

Сказанное записывают в виде

$$\boxed{v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}}$$

Задача о теплоёмкости тела

Если температура тела с массой в 1 кг повышается от $t_1 = 0$ до $t_2 = \tau$, то это происходит за счёт того, что телу сообщается определённое количество тепла Q; значит Q есть функция температуры τ, до которой тело нагревается: $Q=Q(\tau)$.

Пусть температура повысилась с τ до $\tau + \Delta\tau$. Количество тепла ΔQ, затраченное для этого нагревания равно: $\Delta Q = Q(\tau+\Delta\tau) - Q(\tau)$. Отношение $\frac{\Delta Q}{\Delta \tau}$ есть количество тепла, которое необходимо «в среднем» для нагревания тела на 1°. Это отношение называется средней теплоёмкостью, которая не даёт представления о теплоёмкости для любого значения температуры τ.

Теплоёмкостью при температуре τ называ-ется предел отношения приращения количества тепла ΔQ к приращению температуры $\Delta\tau$.(при $\Delta\tau \to 0$)

Задача. Вычислить количество теплоты, которое необходимо для того, чтобы нагреть 1 кг вещества от 0 градусов до t градусов (по Цельсию).

Решение

Пусть $Q=Q(t)$.

Рассмотрим малый отрезок $[t; t+\Delta t]$,

на этом отрезке

$\Delta Q=c(t) \cdot \Delta t$

$c(t)= \Delta Q/\Delta t$

При $\Delta t\to 0$ $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta Q/\Delta t =Q'(t)$

$$c(t)=Q'(t)$$

Задача о мгновенной величине тока

Обозначим через $q = q(t)$ количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t.

Пусть Δt – некоторый промежуток времени, $\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t)$ – количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. Тогда отношение $\dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ называют средней силой тока.

Мгновенной силой тока в момент времени t называется предел отношения приращения количества электричества Δq ко времени Δt, при условии, что $\Delta t \to 0$.

$$\boxed{I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} I_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}}$$

Механический смысл производной.

Исаак Ньютон
(1643 – 1727)

«Когда величина является максимальной или минимальной, в этот момент она не течет ни вперед, ни назад.»

Механический смысл производной.

Используя слово «предел», можно сказать, что **мгновенная скорость** *в точке* ***t*** *– это предел средней скорости при стягивании отрезка, на котором она изменяется, в точку* ***t*** *или в символической записи*

$$v(t)=\lim_{t_1\to t}\frac{S(t_1)-S(t)}{t_1-t}$$

Производная *- это скорость*

Механический смысл производной.

$$v_{ср.} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Δx – перемещение тела

Δt – промежуток времени в течение которого выполнялось движение

При $\Delta t \to 0$ $v_{ср.} \to$ *к мгновенной скорости* $v(t)$,

следовательно, $v(t) = S'(t)$.

$$S'(t) = v(t) \quad \text{или} \quad x'(t) = v(t)$$

$$\mathrm{V}'(\mathrm{t}) = \mathrm{a}(\mathrm{t})$$

1. **Материальная точка движется по закону** $S(t) = \frac{9}{2}t^2 - 7t + 6$ **(м).**

Найти

В какой момент времени (с) скорость точки будет равна 12,8 м/с ?

Найти

Решение. $S'(t) = V(t)$

$$S'(t) = 9t - 7 = V(t)$$

$$V(t) = 12{,}8 \Rightarrow 9t - 7 = 12{,}8$$

$$9t = 19{,}8$$

t = 2,2 (с).

2. Материальная точка движется по закону $S(t)=\frac{2}{3}t^3-5t+6$ **(м).**

Чему равно ускорение **(м/с2) в момент времени t=2 с ?**

Решение.

$$S'(t) = V(t)$$

$$V'(t) = a(t)$$

$$S'(t)=2t^2-5=V(t)$$

$$V'(t)=4t=a(t)$$

$$t=2 \Rightarrow V'(2)=4\cdot 2=8=a(2)$$

Ускорение равно 8 (м/с^2).

Примеры использования в формулах

1) V(t)=X`(t)-скорость
2) a(t)=V`(t)-ускорение
3) *I*(t)=q`(t)-сила тока
4) c(t)=Q`(t)-теплоёмкость
5) N(t)=A`(t)-мощность

Производная в химии

Определение производной

Производная – основное понятие в математике, характеризующее скорость изменения функции в данной точке.

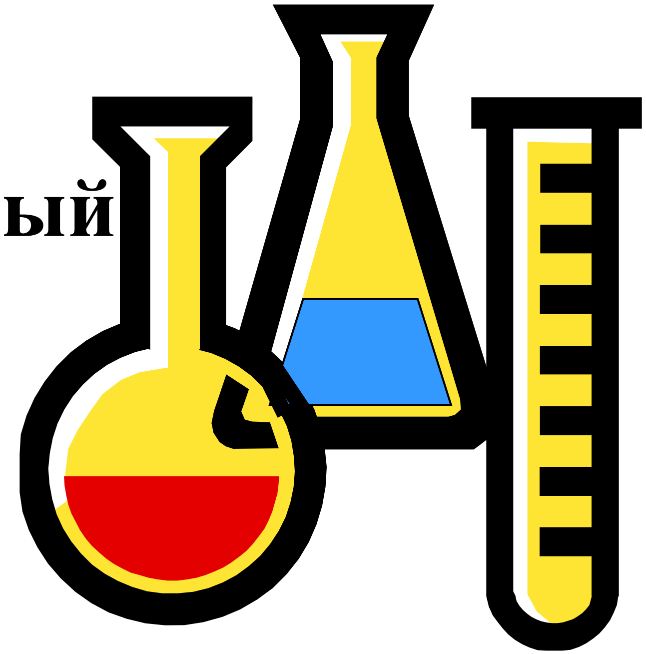
Задача о скорости химической реакции

Средняя скорость растворения соли в воде за промежуток времени *[t_0;t_1]* (масса соли, растворившейся в воде изменяется по закону *x = f(t)*) определяется по формуле

$$v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Скорость растворения в данный момент времени

$$v(t_0) = f'(t_0)$$



Определение скорости химической реакции.

Скоростью химической реакции называется изменение концентрации реагирующих веществ в единицу времени.

Зачем нужна производная в реакциях?

Так как скорость химической реакции V непрерывно изменяется в ходе процесса, её обычно выражают производной концентрации реагирующих веществ по времени.

Формула производной в химии.

Если C(t)- закон изменения количества вещества, вступившего в химическую реакцию, то скорость V(t) химической реакции в момент времени t равна производной:

$$V(t)= C`(t)$$

Понятие производной.

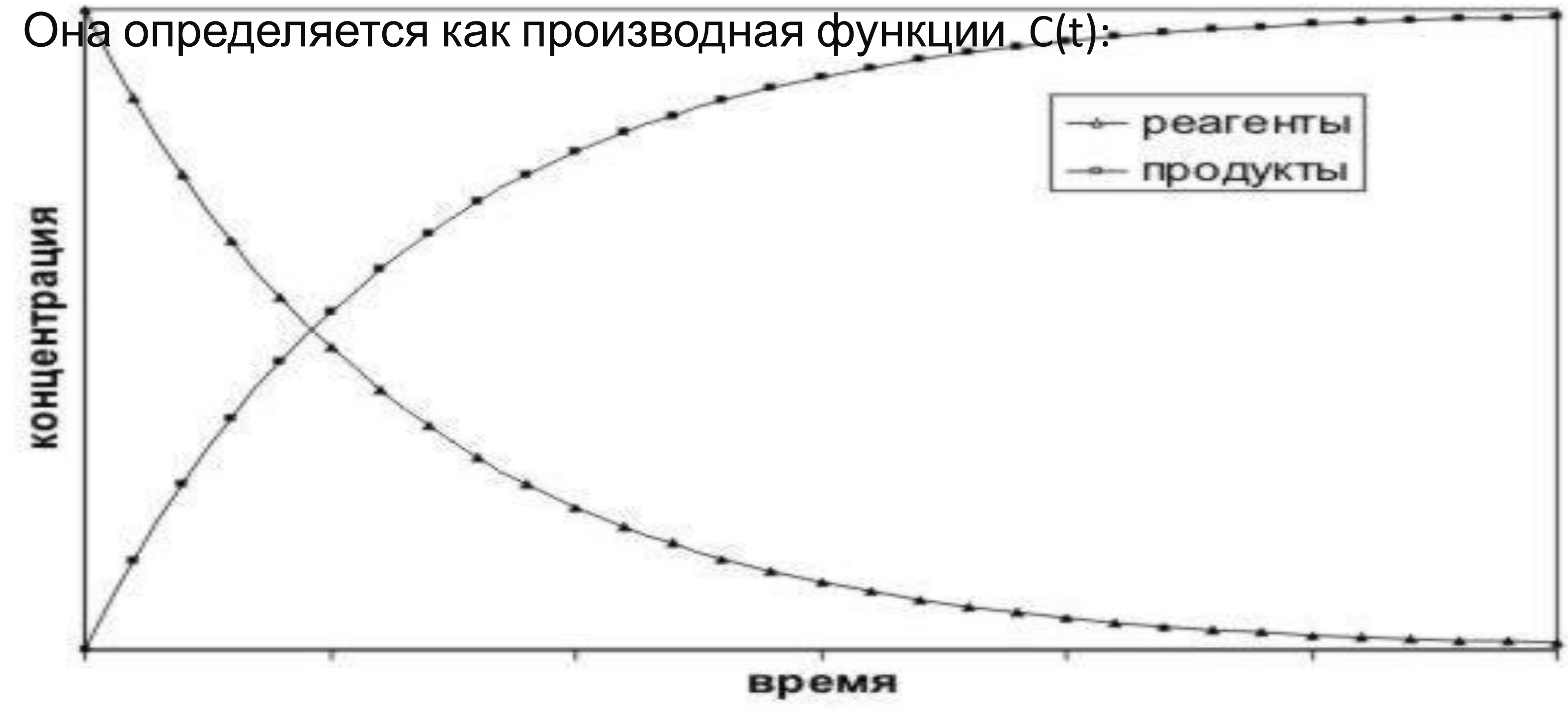
Понятие на языке химии	**Обозначение**	**Понятие на языке математики**
Количество в-ва в момент времени t_0	$C = C(t)$	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t_2 - t_1$	Приращение аргумента
Изменение количества в-ва	$\Delta c = c(t+\ \ t\ ) - c(t)$	Приращение функции
Средняя скорость химической реакции	$\Delta c/\Delta t$	Отношение приращённой функции к приращённому аргументу.

Определение скорости реакции.

Предел отношения приращённой функции к приращённому аргументу при стремлении Δt к нулю- <u>есть скорость химической реакции в данный момент времени</u>

Пояснение к определению.

Выражение **V=c\t**
Позволяет определить лишь среднюю скорость реакции за выбранный отрезок
времени. Учёных же, как правило, интересует скорость в выбранный момент
времени, т.е. Так называемая мгновенная скорость химической реакции.
Она определяется как производная функции C(t):



Задача

С системе $CO + Cl_2 \rightleftarrows COCl_2$ концентрацию CO увеличили от 0,03 до 0,12 моль/л, а концентрацию Cl_2 – от 0,02 до 0,06 моль/л. Во сколько раз возросла скорость прямой реакции?

Дано:

$C_1(CO)$=0,03 моль/л

$C_2(CO)$=0,12 моль/л

$C_1(Cl_2)$=0,02 моль/л

$C_2(Cl_2)$=0,06 моль/л

$\frac{V_1}{V_2}$ – ?

Решение:

$CO + Cl_2 \rightleftarrows COCl_2$

$V_{реакции} = K_1 * C_{CO} * C_{Cl_2}$

K – константа скорости

C - концентрация

$V_1 = K_1 * 0{,}03 * 0{,}02 = K_1 * 0{,}0006$ моль/л

$V_2 = K_1 * 0{,}12 * 0{,}06 = K_1 * 0{,}0072$ моль/л

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{K_1 * 0{,}0072}{K_1 * 0{,}0006} = 12$$

Ответ: Скорость прямой реакции возросла в 12 раз

Заключение.

Понятие производной очень важно в химии, особенно при определении скорости течения реакции.

Производная в биологии

Задача :

По известной зависимости численности популяции x (t) определить относительный прирост в момент времени t.

<u>Популяция</u> –

это совокупность особей данного вида, занимающих определённый участок территории внутри ареала вида, свободно скрещивающихся между собой и частично или полностью изолированных от других популяций, а также является элементарной единицей эволюции.

Решение:

Понятие на языке биологии	Обозначение	Понятие на языке математики
Численность в момент времени t_1	$x = x(t)$	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t_2 - t_1$	Приращение аргумента
Изменение численности популяции	$\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$	Приращение функции
Скорость изменения численности популяции	$\Delta x/\Delta t$	Отношение приращения функции к приращению аргумента
Относительный прирост в данный момент	$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta x/\Delta t$	Производная

$P = x'(t)$

Производная в экономике

Экономические задачи

Рассмотрим ситуацию: пусть *y* - издержки производства, а *x* - количество продукции, тогда *Δx*- прирост продукции, а *Δy* - приращение издержек производства.

В этом случае производная $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает предельные

издержки производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство дополнительной

единицы продукции $MC = \frac{dTC}{dQ}$,где MC – предельные

издержки (marginal costs); TC – общие издержки (total costs); Q - количество.C(t)CC

Экономические задачи

Аналогичным образом могут быть определены и многие другие экономические величины, имеющие предельный характер.

Другой пример - категория предельной выручки (MR— marginal revenue) — это дополнительный доход, полученный при переходе от производства n-ной к (n+1)-ой единице продукта.

Она представляет собой первую производную от выручки:

$$MR = \frac{dR}{dQ}$$

При этом R= PQ, где R–выручка (revenue); P–цена (price).

Таким образом $\frac{d(PQ)}{dQ} = P$, $\Rightarrow$ MR= P.

Экономические задачи

Пусть функция $u(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t. Найдем производительность труда в момент t_0.

За период от t_0 до $t_0 + t$ количество продукции изменится от $u(t_0)$ до $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период $z = \frac{\Delta u}{\Delta t}$

поэтому производительность труда в момент t_0

$$\boxed{z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}}$$

Экономика

Задание.

Оборот предприятия за истекший год описывается через функцию $U(t)=0,15t^3 - 2t^2 + 200$, где t – месяцы, U-миллионы. Исследуйте оборот предприятия за 9 и 10 месяцы.

Решение. Исследуем оборот предприятия с помощью производной: $U'(t)=0,45t^2 - 4t$

Меньший оборот был на девятом месяце- 0,45. На 10 месяце -5.

Экономика

$П(t) = \upsilon'(t)$ - *производительность труда,*

где $\upsilon(t)$ - *объем продукции*

$J(x) = y'(x)$ - *предельные издержки производства,*

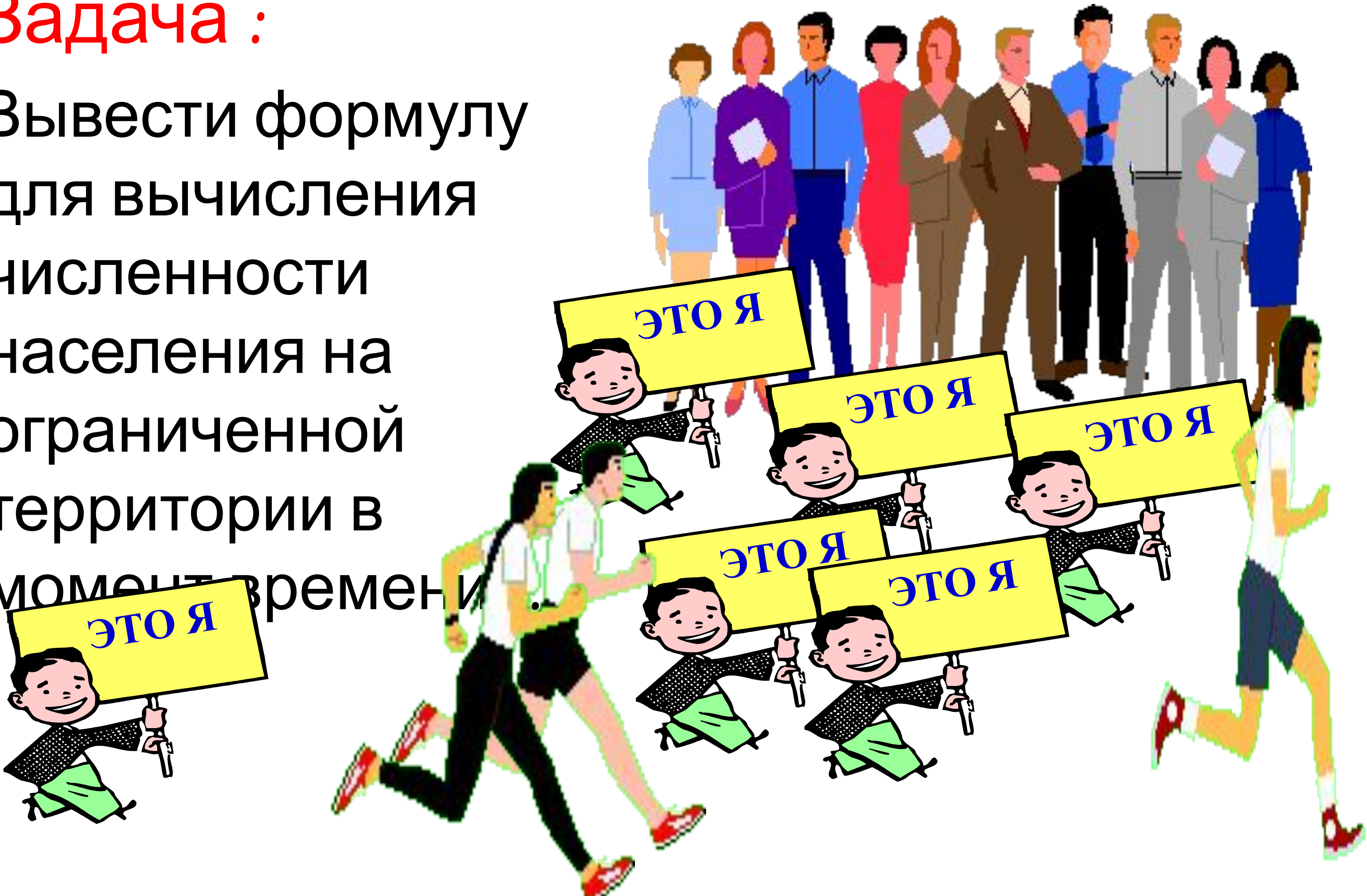
где y– *издержки производства в зависимости от объема выпускаемой продукции* x.

Производная в географии

Рост численности населения

Задача :

Вывести формулу для вычисления численности населения на ограниченной территории в момент времени .



ГЕОГРАФИЯ

Идея социологической модели Томаса Мальтуса состоит в том, что прирост населения пропорционально числу населения в данный момент времени t через N(t). **$N'(t)=kN$**
Модель Мальтуса неплохо действовала для описания численности населения США с 1790 по 1860 годы. Ныне модель в большинстве стран не действует.
Выведем формулу для вычисления численности населен ограниченной территории в момент времени t.

Решение:

Пусть $y=y(t)$- численность населения.

Рассмотрим прирост населения за $\Delta t=t-t_0$

$\Delta y=ky\Delta t$, где $к=к_р – к_с$ –коэффициент прироста

($к_р$ – коэффициент рождаемости,

($к_с$ – коэффициент смертности)

$\Delta y/\Delta t=ky$

При $\Delta t\to 0$ получим $\lim \Delta y/\Delta t=y'$

$$y'=кy$$

«…нет ни одной области в математике, которая когда-либо не окажется применимой к явлениям действительного мира…»

Н.И. Лобачевский

Возвращаясь к рассмотренным задачам, важно подчеркнуть следующее:

а) **мгновенная скорость** неравномерного движения есть производная от пути по времени;

б) **угловой коэффициент касательной** к графику функции в точке $(x_0; f(x))$ есть производная функции $f(x)$ в точке $x = x_0$;

в) **мгновенная сила тока** $I(t)$ в момент t есть производная от количества электричества $q(t)$ по времени;

г) **теплоёмкость** $C(\tau)$ при температуре τ есть производная от количества тепла $Q(\tau)$, получаемого телом;

д) **скорость химической реакции** в данный момент времени t есть производная от количества вещества $y(t)$, участвующего в реакции, по времени t.

е) $\Pi(t) = \upsilon'(t)$ - *производительность труда, где* $\upsilon(t)$ - *объем продукции.*

ж) $J(x) = y'(x)$ - *предельные издержки производства, где* y – *издержки производства в зависимости от объема выпускаемой продукции.* x.

ВЫВОД:

Производная нашла широкое применение:

а) в алгебре и началах анализа при исследовании функции и построении графиков функций;

б) в физике при решении задач на нахождение скорости неравномерного движения, плотности неоднородного тела и др.

в) в тригонометрии при вычислении тангенса угла наклона касательной к кривой,

а также в геометрии, астрономии, аэродинамике, химии и экономике, биологии и медицине.

Авторы проекта:

Учёные – химики.

Учёные – математики.

Учёные – биологии.

Учёные – географы.

Учёные – исследователи.

Учёные – физики.

Учёные – экономики.