МКОУ СОШ с.п.Кара-Суу Черекского района Кабардино-Балкарской Республики

Обобщающий урок по теме:

«Логарифм. Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения и неравенства.»

Учитель математики
Айшаева Фердаус Сулеймановна

Цель урока:

- обобщение **и** систематизация знаний, навыков и умений по теме.

Задачи:

- повторить определение логарифма, основное логарифмическое тождество, простейшие свойства логарифмов, определение и свойства логарифмической функции;
- закрепить способы решения логарифмических уравнений и неравенств;
- развивать вычислительные навыки, навыки самостоятельной работы, самоконтроля, навыки работы с различными источниками информации, а также познавательный интерес к предмету и логическое мышление;
- воспитывать информационную культуру учащихся, аккуратность, дисциплинированность.

Оборудование: компьютер, мультимедийный проектор, Интернет-ресурсы.

Определение логарифма:

Логарифмом положительного числа ***b*** *по положительному и не равному единице основанию* ***a*** *называется* показатель степени, *в которую нужно возвести основание* ***a****, чтобы получить число* ***b****:*

$\log_a b = x$, $a^x = b$, где $a > o$, $a \neq 1$, $b > 0$, x Є R,

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

Свойства логарифмов:

1. Логарифм единицы по основанию а равен нулю:

$$\log_a 1 = 0$$

2. Логарифм а по основанию а равен 1:

$$\log_a a = 1$$

3. Сумма логарифмов равна логарифму произведения :

$$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy), \text{ при } x>0 \text{ и } y>0$$

4. Разность логарифмов равна логарифму частного:

$$\log_a x - \log_a y = \log_a (x/y), \; x>0 \text{ и } y>0$$

5. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени:

$$\log_a x^p = p\log_a x\ ,\ x>0$$

для любого действительного числа р.

6.

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

для любых действительных m и n

7. Формула перехода от одного основания логарифма к другому основанию:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (x>0,\ a>0\ и\ a\neq 1,\ b>0\ и\ b\neq 1)$$

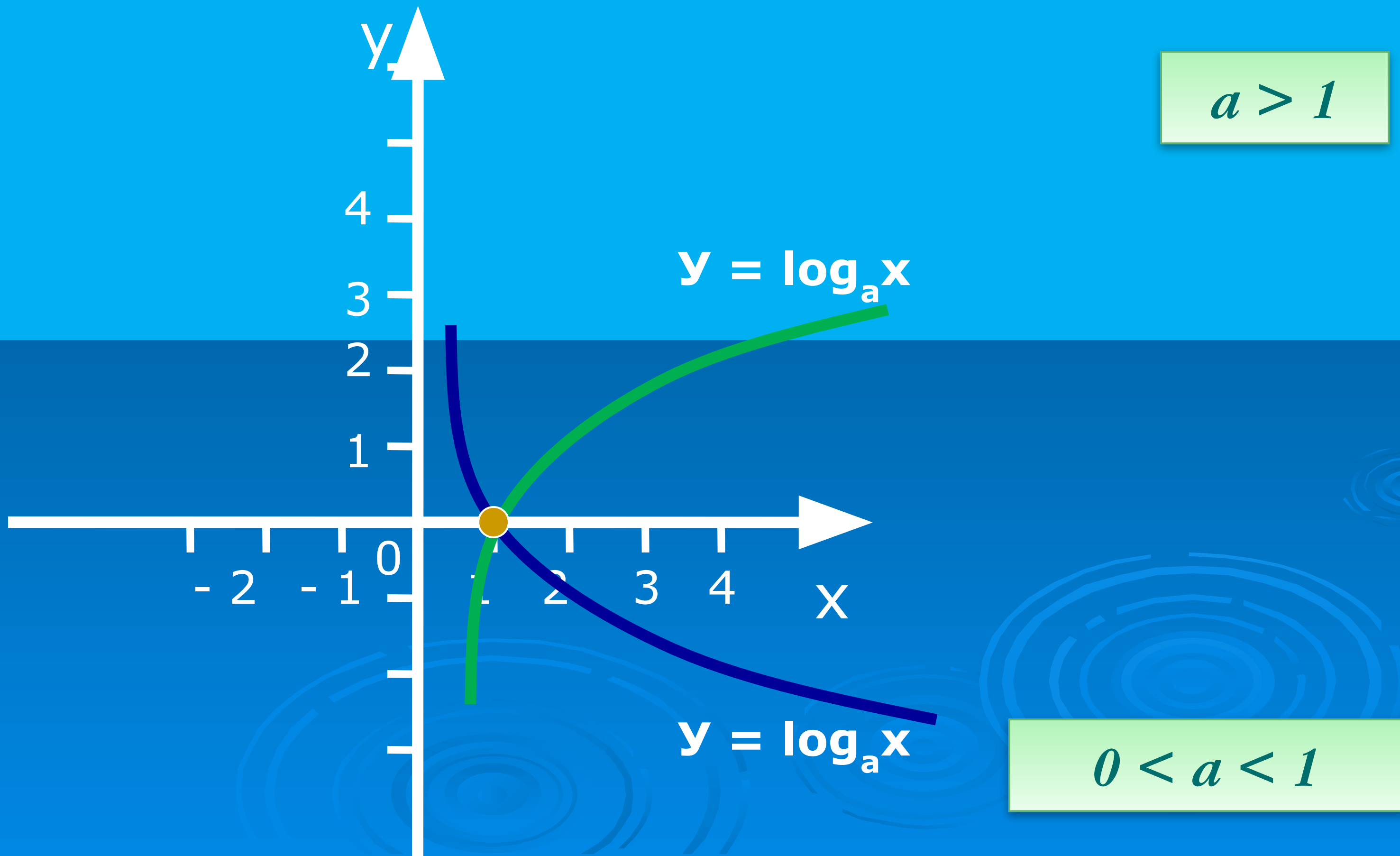
8.

$$\log_a x^{2n} = 2n\log_a |x|, (n\in Z)$$

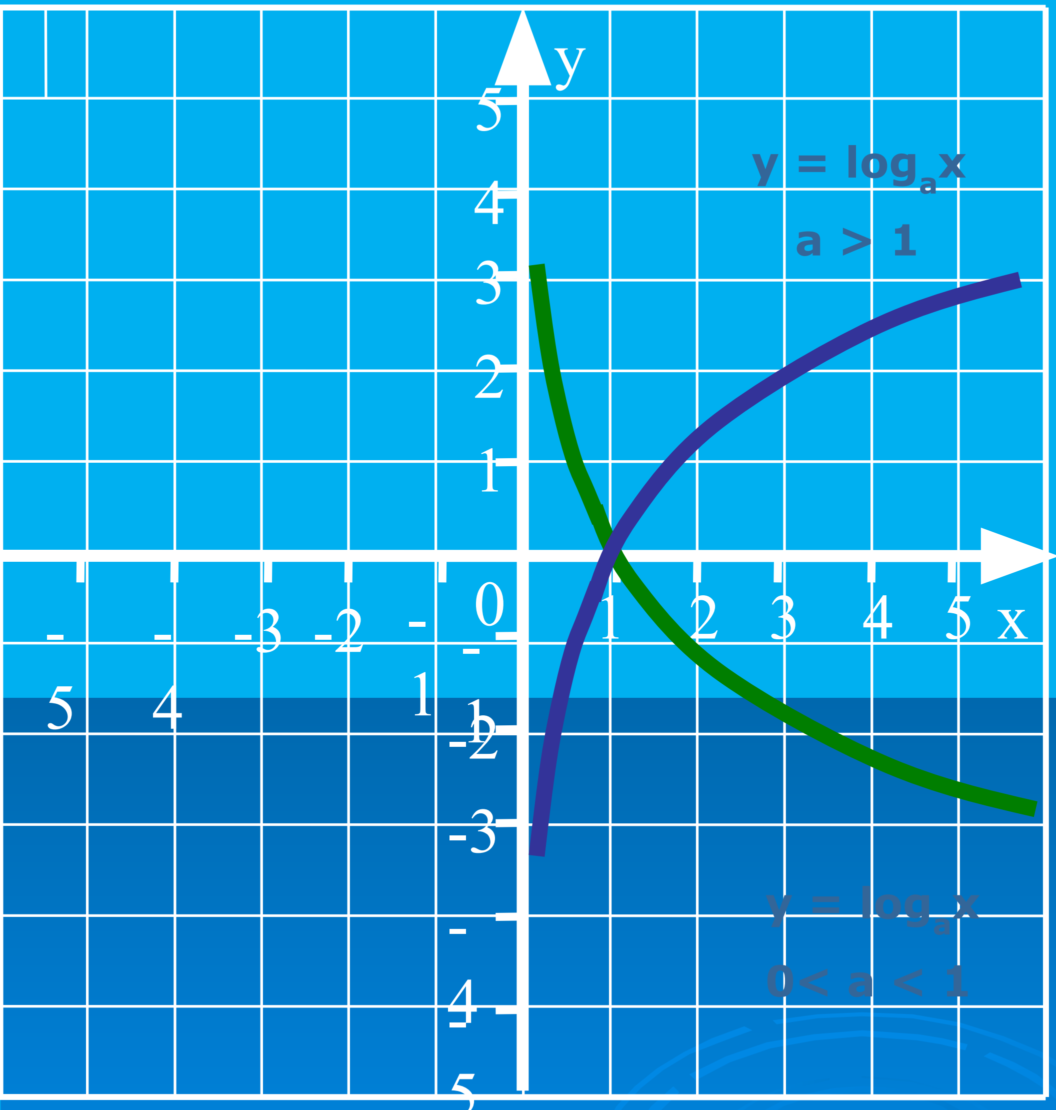
Логарифмическая функция

Определение:

функция, заданная формулой $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется логарифмической функцией.



Свойства логарифмической функции



1. Область определения функции: $D(f)=(0;+\infty)$

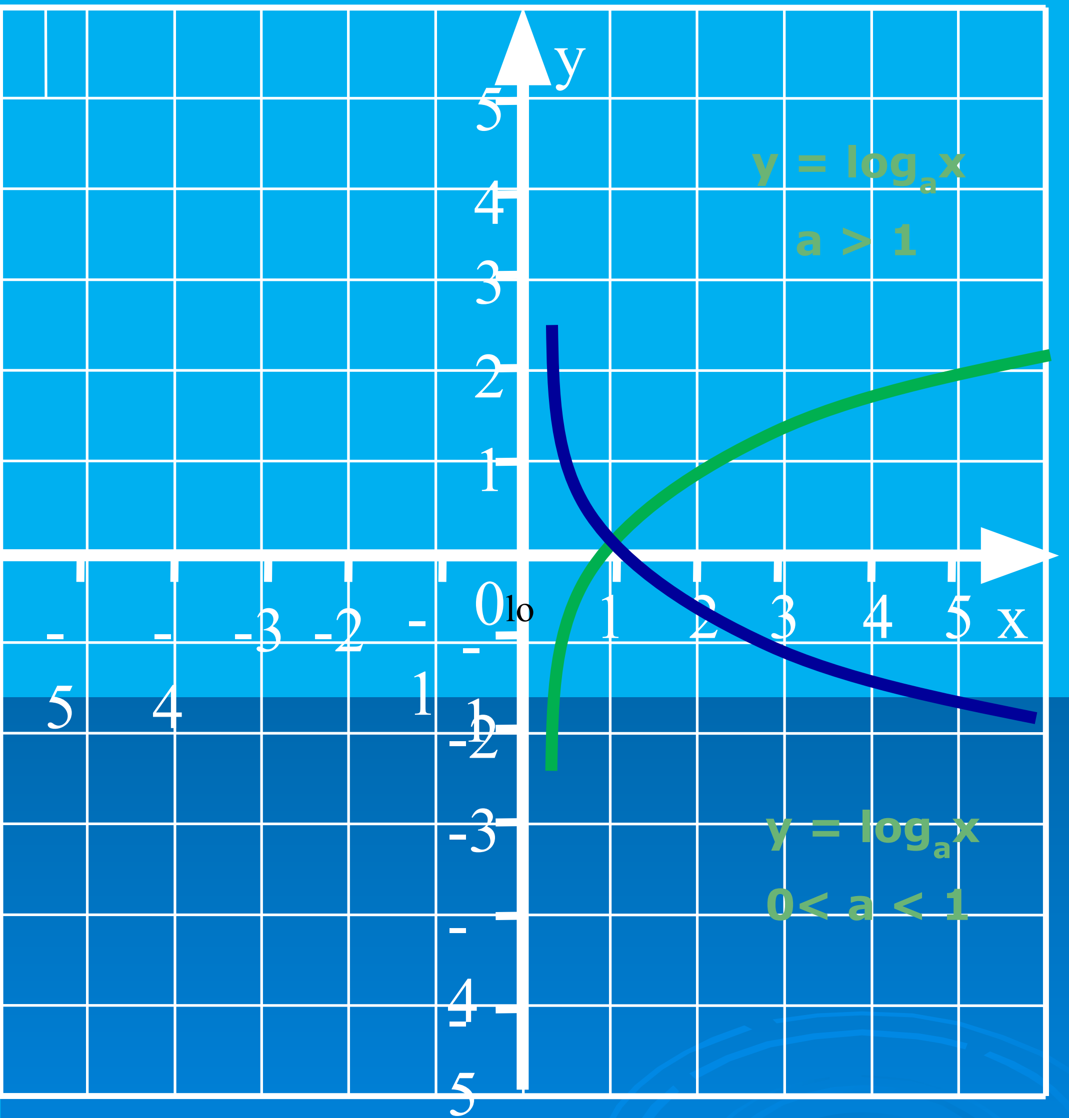
2. Область значений функции: $E(f)=(-\infty;+\infty)$

3. Функция возрастает на всей области определения при a > 1; т.е.

$$\log_a x_1 > \log_a x_2, x_1 > x_2$$

3. Функция убывает на всей области определения при 0 < a < 1; т.е.

$$\log_a x_1 > \log_a x_2, x_1 < x_2$$



4. $\log_a x_1 = \log_a x_2, x_1 = x_2$

5. Не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений

6. Непрерывна

7. Не является ни четной, ни нечетной

Алгоритм решения логарифмических уравнений

1. Найти область допустимых значений (ОДЗ) переменной;
2. Решить уравнение выбрав метод;
3. Проверить найденные корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение или выяснить удовлетворяют ли эти корни условиям ОДЗ.

$$\log_a f(x) = \log_a F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = F(x), \\ f(x) > 0, \\ F(x) > 0, \\ a > 0,\ a \neq 1. \end{cases}$$

У кошки маленький котеночек подрос.
— Как дальше быть? — возник вопрос.
Решила мать, что в пору
Отдать котенка в школу.
И вот за партой в классе
Сидит пушистый Вася.
С усердием большим,
Как приказала мать,
Принялся кот науку постигать.
С терпеньем изучал,
По пунктам и по темам,
Строение мышей по графикам и схемам.
Решал он, чуть не плача,
И про бассейн задачу.
Сколь вытечет сметаны,
Когда открыть все краны.
И через 10 лет, науками богат,
Понес наш кот домой
Из школы аттестат.
И у какой-то горки
Мышонок вылезал из норки.
Но как его схватить?
Нельзя же прыгнуть сразу —
Тут надо применить
Научных знаний базу.
V — скорость, ускоренье — а,
И брызги сыплются с пера.
Затем привел он, глядя в книгу,
К логарифмическому виду.
Потом в системе «це, ге, ес»
Нашел его удельный вес.
Вписал последнюю строку
И приготовился к прыжку.
Пока ученый кот
Над уравненьем бился,
Мышонок — неуч
В норке скрылся.
Запомните, друзья, соль истины такой:
Теория мертва без практики живой.

Рассмотрим несколько заданий на применение логарифмов из открытого банка задач ЕГЭ 2013г.

В задания В3 ЕГЭ включены простейшие логарифмические уравнения

АДРЕС САЙТА

http://www.mathege.ru:8080/or/ege/Main

ЗАДАНИЯ В7 включают в себя показательно-логарифмические выражения.

http://www.mathege.ru:8080/or/ege/Main

Решить уравнение $\log_3(2-x)-\log_3(2+x)-\log_3 x+1=0$

ОДЗ: $$\begin{cases} x>0 \\ 2-x>0 \\ 2+x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<2 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<2$$

Преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов:

$\log_3(2-x)+1=\log_3(2+x)+\log_3 x$

$\log_3(2-x)+\log_3 3=\log_3(2+x)+\log x$

$\log_3(2-x)3=\log_3(2+x)x$

$6-3x=2x+x^2$

$X^2+5x-6=0$

$X_1=-6;\ x_2=1$

$x_1=-6$ не входит в ОДЗ и является посторонним корнем.

Ответ:1

3) Решить уравнение

$$\log_4(2x-1)\cdot\log_4 x = 2\log_4(2x-1)$$

ОДЗ: $$\begin{cases}2x-1>0\\ x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ x>0\end{cases} \Rightarrow x>\dfrac{1}{2}$$

Преобразуем данное уравнение

$$\log_4(2x-1)\cdot\log_4 x - 2\log_4(2x-1) = 0$$

$$\log_4(2x-1)\cdot(\log_4 x - 2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\log_4(2x-1)=0\\ \log_4 x - 2 = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=4\\ \log_4 x - 2 = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3}{2}\\ x=16\end{array}\right.$$

Так как корнями уравнения являются значения х принадлежащие интервалу (1/2;+∞), то и 3/2, и 16 принадлежат ОДЗ.

Ответ: 3/2,16

Решим систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2 x - \log_2 y = 1 \\ 4y^2 + x - 12 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\log_2 \dfrac{x}{y} = \log_2 2 \\ 4y^2 + x - 12 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x}{y} = 2 \\ 4y^2 + x - 12 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 2y \\ 4y^2 + 2y - 12 = 0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y^2 + 2y - 12 = 0$$

$$D = 4 + 192 = 196$$

$$y_1 = \frac{-2+14}{8} = \frac{3}{2}$$

$$y_2 = \frac{-2-14}{8} = -2$$

Так как выражение содержащееся под знаком логарифма должно быть всегда больше нуля, следовательно, x>0, y>0, значит y_2=-2 не является корнем данной системы. Подставим во второе уравнение значение y_1=3/2 и решим его.

$$4\left(\frac{3}{2}\right)^2 + x - 12 = 0$$

$$9 + x - 12 = 0$$

$$x = 3$$

Ответ: 3/2; 3

Решить неравенство

$$\log_{1/2}(x^2+2x-8)\geq -4$$

Так как логарифмическая функция с основанием меньшим единицы является убывающей, то для всех

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ 0<a<1, \\ f(x)>0, \\ g(x)>0 \\ x<-4,\ x>2 \end{cases}$$

Неравенство можно записать в следующем виде:

$$\log_{1/2}(x^2+2x-8)\geq \log_{1/2}16$$

Так как логарифмическая функция с основанием ½ является убывающей, то для всех x из области определения неравенства получаем $(x^2+2x-8)\leq 16$

Таким образом, исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+2x-8>0 \\ x^2+2x-8\leq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x-8>0 \\ x^2+2x-24\leq 0 \end{cases} \begin{cases} (x+4)(x-2)>0 \\ (x-4)(x+6)\leq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[-6;-4)\cup(2;4]$$

Ответ: $x\in[-6;4)\cup(2;4]$

Решить уравнение типа С3 ЕГЭ

$$(x+4)\log_4(x+1)+(4-x)\log_2(x-1)-\frac{8}{3}\log(x^2-1)=0$$

$$(x+4)\log_4(x+1)+(4-x)\log_2(x-1)-\frac{8}{3}\log(x-1)(x+1)=0$$

$$\frac{x+4}{2}\log_2(x+1)+(4-x)\log_2(x-1)-\frac{8}{3}\log_2(x-1)-\frac{8}{3}\log_2(x+1)=0$$

$$(\frac{x+4}{2}\log_2(x+1)-\frac{8}{3}\log_2(x+1))-(\frac{8}{3}\log_2(x-1)+(4-x)\log_2(x-1))=0$$

$$(\frac{x+4}{2}-\frac{8}{3})\log_2(x+1)-(\frac{8}{3}-(4-x))\log_2(x-1)=0$$

$$\frac{3x-4}{6}\log_2(x+1)-\frac{3x-4}{3}*\frac{2}{2}\log_2(x-1)=0$$

$$\frac{3x-4}{6}(\log_2(x+1)-\log_2(x-1)^2)=0$$

$$\frac{3x-4}{6}\log_2\frac{(x+1)}{(x-1)^2}=0$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \\ x^2-1>0 \end{cases} \Rightarrow x>1$

$$\begin{cases} \frac{3x-4}{6}=0 \\ \log_2\frac{(x+1)}{(x-1)^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{4}{3} \\ \frac{x+1}{(x-1)^2}=1 \end{cases}$$

$$x+1=(x-1)^2$$

$$x+1=x^2-2x+1$$

$$x^2-3x=0$$

$$x(x-3)=0$$

$$x_2=0$$

$$x_3=3$$

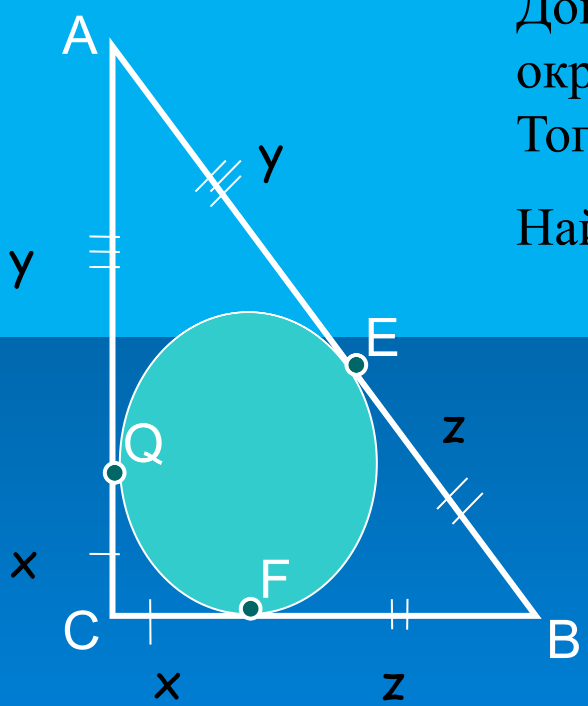
$$x_1=\frac{4}{3}\in ОДЗ; x_2=0\notin ОДЗ; x_3=3\in ОДЗ$$

Ответ : $\frac{4}{3}; 3$

Задание типа С4

В треугольнике ABC AB=12, BC = 6, CA = 10. Точка D лежит на прямой BC так, что BD:DC = 2:7. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Докажем сначала утверждение, что если окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его стороны CB в точке F, то $CF = \frac{1}{2}(AC + CB - AB)$



Доказательство. Пусть Q и E –точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и AB. Тогда QC=CF, FB=BE, AE=AQ

Найдем полупериметр треугольника:

$$p = \frac{2x + 2y + 2z}{2} = x + y + z$$

$$x = p - (y + z)$$

Выразим x через стороны треугольника, тогда

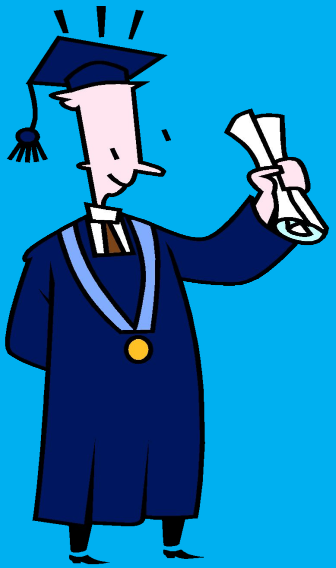
$$x = \frac{a + в + c}{2} - c = \frac{a + в - c}{2}$$

Из истории.

Теорию логарифмов развил Дж. Непер.

Он разработал способы вычисления арифметических выражений с помощью логарифмов и составил подробные таблицы логарифмов.

(1550—1617)



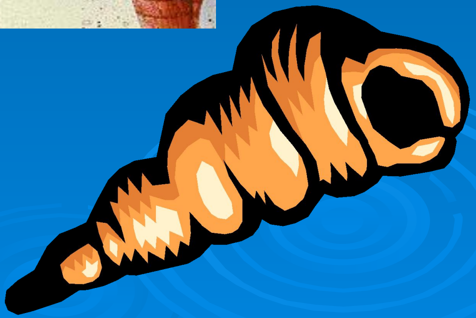
Вот вы когда-нибудь слыхали

О логарифмической спирали?

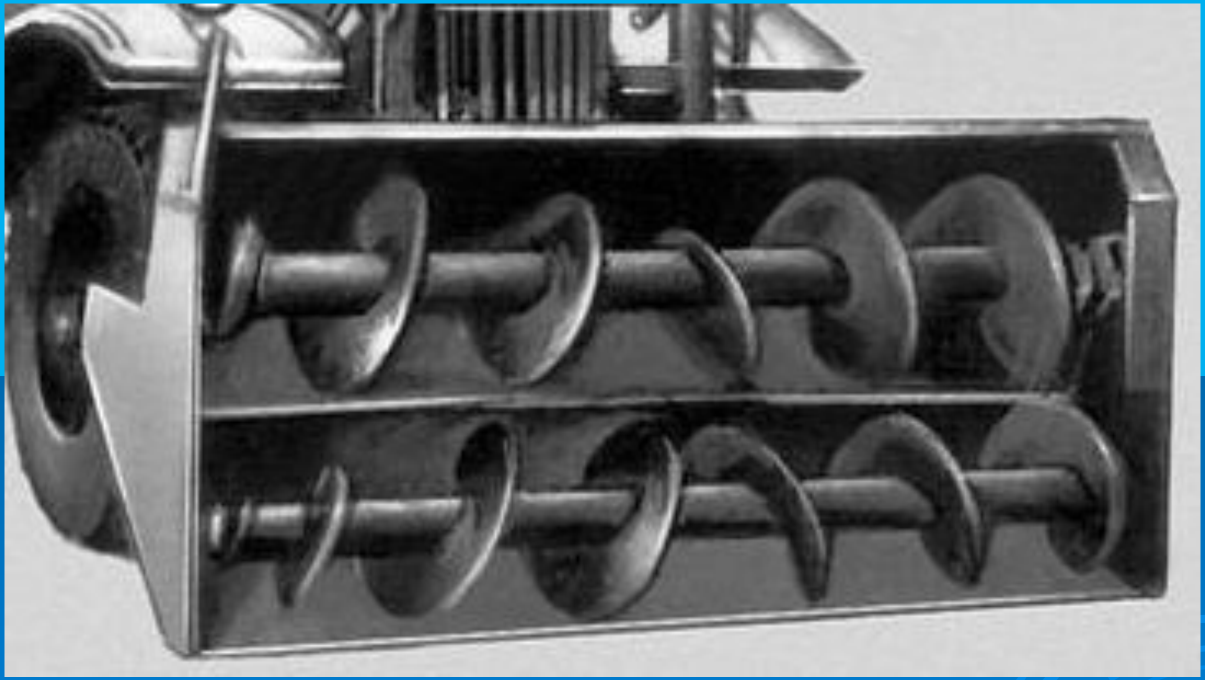
Закручены по ней рога козлов

И не найдете вы на них нигде узлов.

Моллюсков многих и улиток Ракушки тоже все завиты.



И эту спираль мы повсюду встречаем:
К примеру, ножи в механизме вращаем,
В изгибе трубы мы ее обнаружим,
Турбины тогда максимально послужат!



В подсолнухе семечки тоже закручены
И паука все плетенья заучены.
Наверняка, и о том вы не знали,
Галактики тоже кружат по спирали!

Спасибо за урок!