Алгебра высказываний

Алгебра высказываний

- **Математическая логика** состоит из двух разделов: логики высказываний и логики предикатов.

- **Логика высказываний** может быть представлена двумя подходами: алгеброй высказываний и исчислением высказываний.

- Алгебра, образованная множеством $B=\{0,1\}$ вместе со всеми возможными операциями на нем, называется **алгеброй высказываний**.

- **Алгебра высказываний** как раздел математической логики **изучает** строение сложных логических высказываний (логических формул) и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов.

Бинарные функции (функции двух переменных)

Таблица истинности

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	&	$\mapsto$	x	$\mapsfrom$	y	$\oplus$	$\vee$	$\circ$	$\sim$	$\neg y$	$\leftarrow$	$\neg x$	$\rightarrow$	$\mid$	1

Функционально полные системы (базисы)

- Существуют наборы логических операций, с помощью которых можно выразить любые другие логические операции. Такие наборы называются **функционально полными системами или базисами.**

- **Примеры** функционально полных систем логических функций:
- {o} (Функция Вебба),
- {|} (штрих Шеффера);
- {→, 0}, { ←, 1},
- { &, ⊕, 1}
- и другие.

- Наиболее изученным является базис **{&, ∨, ¬}.** Формулы, содержащие кроме переменных и скобок знаки этих функций называются **булевыми**.

Основные эквивалентные соотношения (законы) в булевой алгебре

- ассоциативностей $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$, $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$;
- коммутативностей $a\vee b=b\vee a$, $a\wedge b=b\wedge a$;
- дистрибутивностей $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$; $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$;
- идемпотентностей $a\vee a=a$, $a\wedge a=a$;
- двойного отрицания $\neg\neg a=a$;
- законы нуля (лжи) $a\vee 0=a$, $a\wedge 0=0$, $a\wedge\neg a=0$;
- законы единицы (истины) $a\vee 1=1$, $a\wedge 1=a$, $a\vee\neg a=1$.
- де-Моргана $\neg a\vee\neg b=\neg(a\wedge b)$, $\neg a\wedge\neg b=\neg(a\vee b)$;
- противоречия $a\wedge\neg a=0$;
- исключенного третьего $a\vee\neg a=1$
- поглощения $a\vee a\wedge b=a$, $a\wedge(a\vee b)=a$;
- склеивания $a\wedge b \vee a\wedge\neg b=a$, $(a\vee b)\wedge(a\vee\neg b)=a$;
- обобщенное склеивание $a\wedge c \vee b\wedge\neg c \vee a\wedge b = a\wedge c \vee b\wedge\neg c$;
- $a \vee \neg a\wedge b = a\vee b$

Суперпозиции и формулы

- **Суперпозицией F булевых функций *f_0 и $f_1,...,f_m$*** называется функция $F=f_0(g_1(x1,...,xm),...,g_n(x1,...,xm))$, где каждая из функций $g_i(x1, ...,xm)$ либо совпадает с одной из переменных (тождественная функция), либо – с одной из функций $f_1,...,f_m$.
- **Формулой** называется выражение, описывающее эту суперпозицию.
- **Символы переменных, а также функции const_0 и const_1 считаются формулами глубины 0.**
- Пусть дано множество (конечное или бесконечное) **исходных функций $\sum=\{f_1, ..., f_m\}$.** Любая **формула $F = f_0(g_1, ..., g_n)$, у которой** $g_i \in \Sigma$, *n*— количество аргументов f_0**, имеет глубину $k=\max(k_1,\ldots,k_n)+1$**, здесь **$k_1,\ldots,k_n$ глубины формул** $g_1, ..., g_n$ **.**
- Формулы **$g_1, ..., g_n$** называются **подформулами** *F*. Функция **f_0 называется внешней** или *главной* **операцией** формулы *F*.

Пример: Глубина формул

- Определить глубину формулы F= ((A→B)&C) ∨A.

1) Вначале выполняется f1= A→B. Глубина которой k1=max(0,0)+1=1
2) Следующей будет выполняться функция f2=f1&C. Функция f2 имеет глубину k2=max(k1,0)+1=max(1,0)+1=2
3) Далее выполнятся функция f3=f2∨A, глубина которой k3=max(k2,0)+1=max(2,0)+1=3
4) Таким образом, глубина исходной формулы равна 3.

Таблицы истинности сложных функций

- **Таблицы истинности для сложных функций строится поэтапно, путем выделения простых функций согласно последовательности их выполнения**
- **Таблица истинности для формулы $F= ((A \rightarrow B)\&C) \vee A$**

A	B	C	$f1=A\rightarrow B$	$f2= f1\&C$	$f3=f2 \vee A$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Тождественно Истинная, Тождественно Ложная и Выполнимая формула

- **Формула называется тождественно истинной (общезначимой, тавтологией),** если при всех возможных наборах переменных формула равна 1
- **Формула называется тождественно ложной (противоречием),** если при всех возможных наборах переменных формула равна 0
- **Формула называется выполнимой,** если при некоторых наборах переменных формула равна 1. При этом,
- **Единичным набором переменных** называется набор переменных, при которых функция равна 1. Множество единичных наборов называется **единичным множеством**
- **Нулевым набором переменных** называется набор переменных, при которых функция равна 0. Множество нулевых наборов называется **нулевым множеством**

Способы (нотации) записи формул

- **Инфиксная** – знак операций стоит между операндами (используемая нами до сих пор) $x \wedge (y \vee z)$ или x *and* $(y$ *or* $z)$;
- **Префиксная (прямая польская запись)** – знак операций стоит перед операндами $\wedge\ x \vee\ y\ \ z$;
- **Постфиксная (обратная польская запись) –** знак операций стоит после операндов $x\, y\, z \vee\ \wedge$
- **Постфиксная запись при считывании формулы позволяет однозначно указать порядок выполнения операций.**

Преобразование инфиксной формы в префиксную и постфиксную

- Рассматриваем операции согласно их очередности выполнения
  знак операции выносим либо вперед операндов (префиксная форма) либо располагаем сзади операндов (постфиксная форма)
- Представить инфиксную форму в префиксную и постфиксную
  (x3 ∨ x1)&x1&(x1⊕x2)

(**x3 ∨ x1)** & x1 & (x1 ⊕ x2)

префиксная

∨ (x3, x1) & x1 & (**x1 ⊕ x2**)

(∨ x3 x1) & x1 & (⊕ x1x2)

(& (∨ x3 x1) x1) & (⊕ x1x2)

& & ∨ x3 x1 x1 ⊕ x1 x2

(**x3 ∨ x1)** & x1 & (x1 ⊕ x2)

постфиксная

(x3 x1 ∨) & x1 & (**x1 ⊕ x2**)

(x3 x1 ∨) & x1 & (x1x2 ⊕)

(**(x3 x1 ∨) x1 &) & (x1 x2 ⊕)**

x3 x1 ∨ x1 & x1x2 ⊕ &

Преобразование постфиксной формы в инфиксную

- Выражение просматриваем слева направо, и его элементы помещаются в стек
- Если в стеке находятся два элемента и операция (a b F), то эта тройка изымается из стека и выполняется операция
  (a F b).
- Результат операции помещается в стек
- Просмотр строки продолжается.
- Пример: представить постфиксную форму x3 x1 & x1 x1 x2 $\vee$ $\oplus$ $\vee$ в инфиксную

- **x3 x1 &** x1 x1 x2 $\vee$ $\oplus$ $\vee$
- (x3& x1) x1 **x1 x2 $\vee$** $\oplus$ $\vee$
- (x3& x1) **x1 (x1 $\vee$ x2) $\oplus$** $\vee$
- **(x3& x1) (x1$\oplus$(x1 $\vee$ x2)) $\vee$**
- (x3& x1) $\vee$ (x1$\oplus$(x1 $\vee$ x2))

Преобразование префиксной формы в инфиксную

- Выражение просматриваем слева направо, и его элементы помещаются в стек
- Если возникает ситуация когда в стеке находятся знак операции и две переменные (F a b), то эта тройка изымается из стека и над ними выполняется операция
  (a F b).
- Результат операции помещается в стек. Просмотр продолжается.
- Пример: представить префиксную форму $\rightarrow \vee x1x2\&x1x3$ в инфиксную

- $\rightarrow \ \vee \ x1 \ x2 \ \& \ x1 \ x3$
- $\rightarrow \ \vee \ x1 \ x2 \ (x1\&x3)$
- $\rightarrow \ (x1 \vee x2) \ (x1\&x3)$
- $(x1 \vee x2) \rightarrow (x1\&x3)$

Дизъюнктивные и Конъюнктивные формы

- **Элементарной конъюнкцией** называются элементарные переменные либо (в разделительном смысле) их отрицания соединенные конъюнкцией ⌉x1 **& x2 & ⌉x3**
- **Элементарной дизъюнкцией** называются элементарные переменные либо (в разделительном смысле) их отрицания соединенные дизъюнкцией ⌉x1 **∨ x2 ∨ ⌉x3**
- **Дизъюнктивно Нормальная Форма (ДНФ) –** дизъюнкция элементарных конъюнкций (⌉x1 & x2 & ⌉x3) **∨** (x1 & ⌉x2 & x3)
- **Конъюнктивно Нормальная Форма (КНФ)–** конъюнкция элементарных дизъюнкций (⌉x1 ∨ x2 ∨ ⌉x3) **&** (x1 ∨ ⌉x2 ∨ x3)

СДНФ и СКНФ

- **Совершенная Дизъюнктивно Нормальная Форма (СДНФ) –** это ДНФ, у которой все элементарных конъюнкций содержат **КАЖДУЮ** переменную ровно **один раз** и **все** элементарные конъюнкции **различны**

Пример: **(⌉x1 & x2 & ⌉x3) ∨ (x1 & ⌉x2 & ⌉x3)**

- **Совершенная Конъюнктивно Нормальная Форма (СКНФ) –** это КНФ у которой все элементарных дизъюнкций содержат **КАЖДУЮ** переменную ровно **один раз** и **все** элементарные дизъюнкции **различны)**

Пример: **(⌉x1 ∨ x2 ∨ ⌉x3) & (x1 ∨ ⌉x2 ∨ x3)**

- Любую логическую функцию можно представить в виде СДНФ и СКНФ используя таблицу истинности.

Построение СДНФ и СКНФ

Построения СДНФ

- Для каждого **единичного набора переменных** выписываем конъюнкцию всех переменных.
- Над теми переменными, которые в этом наборе равны 0, ставим отрицание.
- Все такие конъюнкции соединяем дизъюнкциями.

x	y	x ⊕y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Построения СКНФ

- Для каждого **нулевого набора переменных** выписываем дизъюнкцию всех переменных.
- Над теми переменными, которые в этом наборе равны 1, ставим отрицание.
- Все такие дизъюнкции соединяем конъюнкциями.

СДНФ – $(\neg x \& y) \vee (x \& \neg y)$

СКНФ – $(x \vee y) \& (\neg x \vee \neg y)$

Полиномы Жигалкина

- Каждую логическую функцию можно представить в виде **полинома Жигалкина**, представляющего собой **элементарные конъюнкции соединены операцией исключающего или ⊕**. Например: $f(x,y,z) = (y \& z) \oplus (x \& z) \oplus (x \& y \& z)$
- **Процедура построения Полинома Жигалкина**

1) По таблице истинности **строим СДНФ**.

2) СДНФ приводим к **минимальной ДНФ**

3) Выражаем дизъюнкции $\vee$ и отрицания $\rceil$ через операции конъюнкции & и исключающего или ⊕.

$\mathbf{x \vee y = x \oplus y \oplus (x \& y)}$ $\qquad$ $\mathbf{\rceil x = x \oplus 1}$

4) Раскрываем скобки используя дистрибутивность $x \& (y \oplus z) = (x \& y) \oplus (x \& z)$, $(x \oplus y) \& z = (x \& z) \oplus (y \& z)$. В результате могут получится формула двух видов

$(xa \& xb \& ...) \oplus ... \oplus (xc \& xd \& ...)$ или $(xa \& xb \& ...) \oplus ... \oplus (xc \& xd \& ...) \oplus 1$

5) Сокращаются повторяющиеся элементы внутри скобок при помощи a&a=a, a&1=a, 1&a=a

6) Сокращаются одинаковые скобки при помощи поглощения $a \oplus a=0$, $a \oplus 0=a$, $0 \oplus a=a$.

Пример: построение полинома Жигалкина

- Пусть для функции получена минимальная ДНФ:
  $f(x,y,z) = (\rceil x \,\&\, y \,\&\, z) \vee (x \,\&\, \rceil z)$
- Используя $\rceil a = a \oplus 1$ заменим отрицание:
  $f(x,y,z) = ((x \oplus 1) \,\&\, y \,\&\, z) \vee (x \,\&\, (z \oplus 1))$
- Используя $a \vee b = a \oplus b \oplus (a \,\&\, b)$ заменим дизъюнкцию:
  $f(x,y,z) = ((x \oplus 1) \,\&\, y \,\&\, z) \oplus (x \,\&\, (z \oplus 1)) \oplus ((x \oplus 1) \,\&\, y \,\&\, z \,\&\, x \,\&\, (z\oplus 1))$
- Используя **дистрибутивность** раскроем скобки:
  $f(x,y,z) = (x \,\&\, y \,\&\, z) \oplus (1 \,\&\, y \,\&\, z) \oplus (x \,\&\, z) \oplus (x \,\&\, 1) \oplus$
  $\oplus (x \,\&\, y \,\&\, z \,\&\, x \,\&\, z) \oplus (1 \,\&\, y \,\&\, z \,\&\, x \,\&\, z) \oplus$
  $\oplus (x \,\&\, y \,\&\, z \,\&\, x \,\&\, 1) \oplus (1 \,\&\, y \,\&\, z \,\&\, x \,\&\, 1)$
- Применим законы **поглощения внутри скобок:**
  $f(x,y,z) = (x \,\&\, y \,\&\, z) \oplus (y \,\&\, z) \oplus (x \,\&\, z) \oplus x \oplus (y \,\&\, x \,\&\, z) \oplus$
  $\oplus (y \,\&\, x \,\&\, z) \oplus (y \,\&\, z \,\&\, x) \oplus (y \,\&\, z \,\&\, x)$
- Применим законы **поглощения для одинаковых скобок**
  $f(x,y,z) = (x \,\&\, y \,\&\, z) \oplus (y \,\&\, z) \oplus (x \,\&\, z) \oplus x$

Классы логических функций

- **Класс S0: Функции «сохраняющие 0»** - это логические функции, значение которых равны 0, если все аргументы равны 0: f(0,0,...,0)=0. Например $\vee$
- **Класс S1: Функции «сохраняющие 1»** - это логические функции, значение которых равны 1, если все аргументы равны 1: f(1,1,...,1)=1. Например &
- **Класс М: "Монотонные" функции** -это логические функции, которые можно выразить через & и $\vee$.

Монотонную функцию можно распознать по ее таблице истинности. Для этого нужно взять **все** пары наборов переменных в порядке возрастания их гомеров, которые отличаются всего в одном столбце. Например: 0,0 и 0,1; 0,1 и 1,1. Нельзя, чтобы значение функции при этих наборах было "1", а потом "0" соответственно. Пример монотонной функции: $\vee$.

A	B	A$\vee$B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Наборы переменных	Значение функций
00; 01	0; 1
00; 10	0; 1
01; 11	1; 1
10; 11	1; 1

Классы логических функций

- **Класс L:"Линейные" функции – это** логические функции, которые можно выразить через **⊕, 0 и 1**.

  Чтобы узнать, линейна ли функция, надо выразить ее через полином Жегалкина и посмотреть, не встречается ли там операция &. Если нет, то функция линейна.

- **Класс D: «Двойственные» функции f и g,** т.е. функции удовлетворяющие условию $f(\rceil x1, \rceil x2, ..., \rceil xN) = \rceil g(x1, x2, ..., xN)$

  Двойственные функции легко обнаружить с помощью простого приема. Надо заменить в таблице истинности все "0" на "1", а все "1" на "0". Полученная таблица истинности и будет таблицей двойственной функции. Пример & и $\vee$.

- **Класс S:"Самодвойственные" функции, т.е.** функции, которые двойственны сами себе:

$$f(\rceil x1, \rceil x2, ..., \rceil xN) = \rceil f(x1, x2, ..., xN).$$

Критерий Поста

- Система булевых функций F является полной тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из классов S0, S1, S, L, M. Т.е. когда в ней имеется хотя бы одна функция, не сохраняющая 0, хотя бы одна функция, не сохраняющая 1, хотя бы одна несамодвойственная функция, хотя бы одна немонотонная функция и хотя бы одна нелинейная функция.

Функционально полные системы (базисы)

- Существуют наборы логических операций, с помощью которых можно выразить любые другие логические операции. Такие наборы называются **функционально полными системами или базисами.**

- **Примеры** функционально полных систем логических функций:
- {o} (Функция Вебба),
- {|} (штрих Шеффера);
- {→, 0}, { ←, 1},
- { &, ⊕, 1}
- и другие.

- Наиболее изученным является базис **{&, ∨, ¬}.** Формулы, содержащие кроме переменных и скобок знаки этих функций называются **булевыми**.

Булева алгебра логических операций

- **Теорема:** Всякая логическая функция может быть представлена булевой формулой, т.е. как суперпозиция дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

- **Следствие:** система булевых функций функциональна полна.

- **Алгебра (P_2; &, $\vee$, $\neg$), основным множеством которой является множество всех логических функций P_2, а операциями дизъюнкция, конъюнкция и отрицание, называется булевой алгеброй логических операций.**