Тема 2

Эйлеровы графы.
Пути и циклы Эйлера

Лектор: Завьялов Олег Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент

Определение

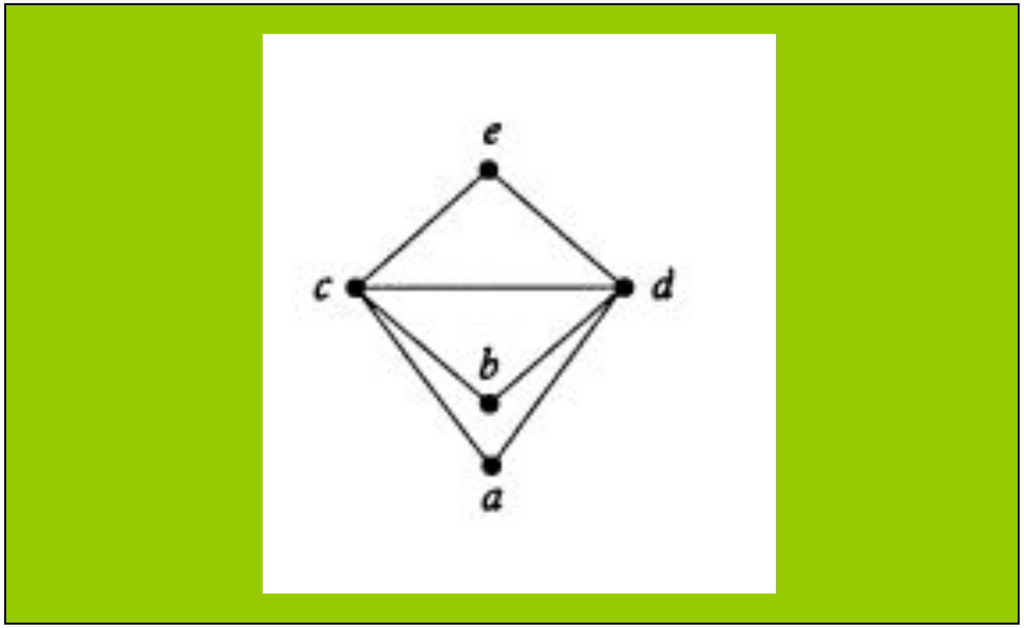
Пусть $G=(V, E)$ - граф. Цикл, который включает все ребра и вершины графа G, называется эйлеровым циклом. Если это условие выполняется, то граф G эйлеров цикл.

Теорема.

Граф с более чем одной вершиной имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связный и каждая вершина имеет одну (четную) степень.

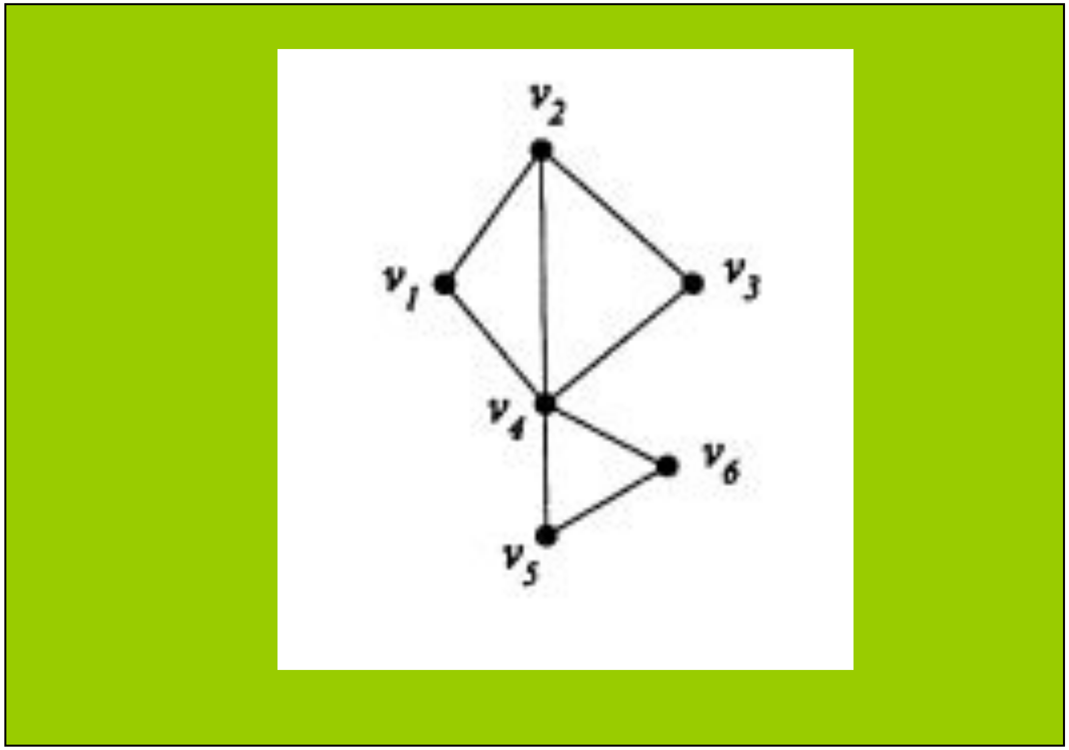
Теорема.

Граф имеет эйлеров цикл, поскольку степень каждой его вершины четная.



Теорема.

Граф имеет не эйлеров цикл, поскольку степени вершин v2 и v4 - нечетные.



Определение

Пусть $G=(V, E)$ – граф.

Путь, который включает каждое ребро графа G только один раз называется ***эйлеровым путем***.

В этом случае граф G имеет эйлеров путь.

Если эйлеров путь не является эйлеровым циклом, такой путь называют ***собственным эйлеровым путем***.

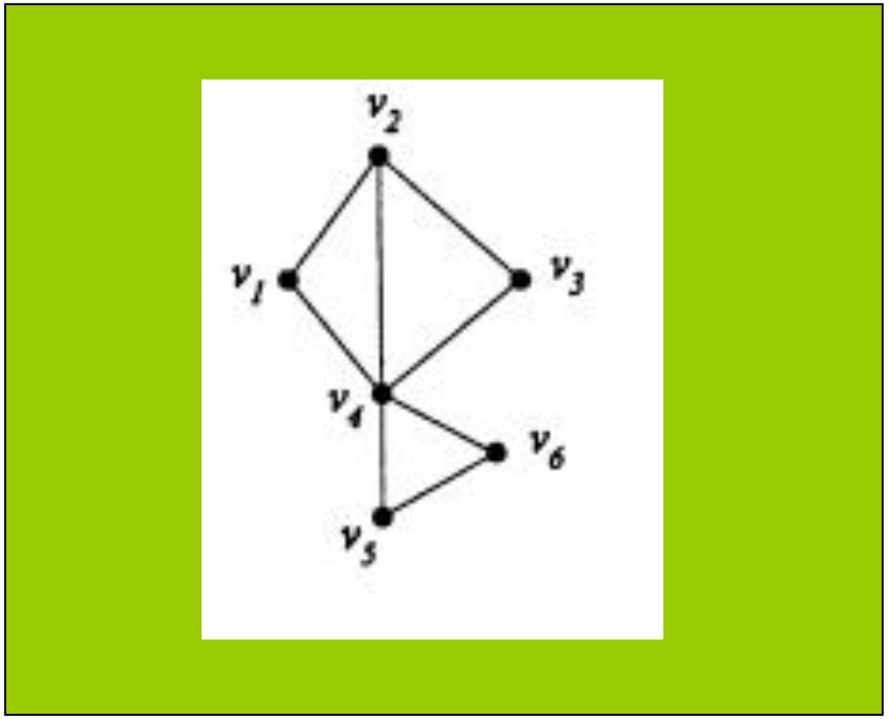
Теорема.

Граф (мультиграф или псевдограф) имеет собственный эйлеров путь тогда и только тогда, когда он связный и ровно две его вершины имеют нечетную степень.

Граф для кенигсбергских мостов имеет четыре вершины с нечетными степенями.

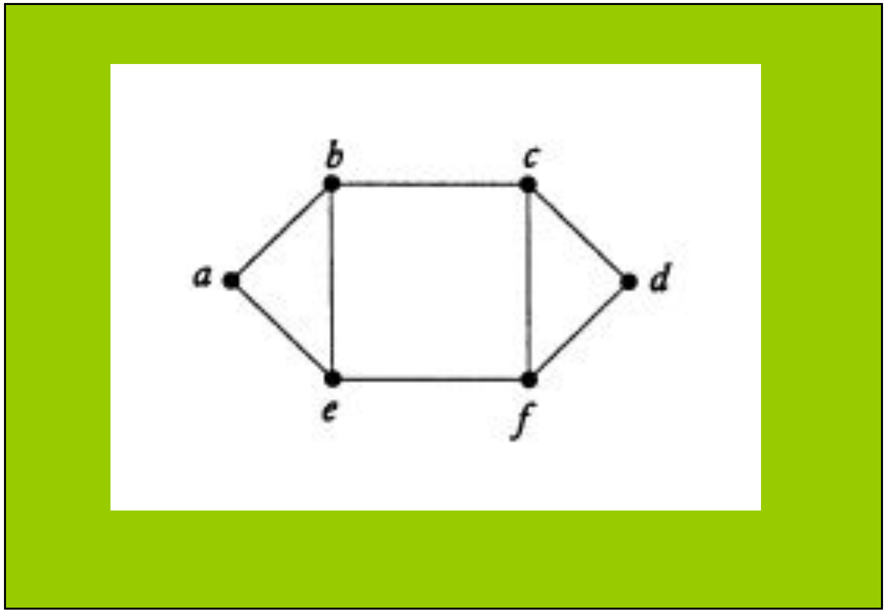
Пример.

Граф имеет собственный эйлеров путь, т.к. ровно две его вершины имеют нечетную степень.



Пример.

Граф не имеет собственного эйлерова пути, т.к. четыре две его вершины имеют нечетную степень.



Определение

Пусть *G*=(*V*, *E*) – ориентированный граф. ***Ориентированным циклом*** называется ориентированный путь ненулевой длины из вершины в ту ж вершину без повторения ребер.

Определение.

Пусть *G*=(*V*, *E*) – ориентированный граф. Ориентированный цикл, который включает все ребра и вершины графа *G*, называется ***эйлеровым циклом***. Ориентированный граф *G* имеет эйлеров цикл.

Объединение графов и компоненты связности

Определение. Вершина w орграфа D (графа G) достижима из вершины v, если либо v=w, либо существует путь из v в w.

Более удобное определение связных графов.

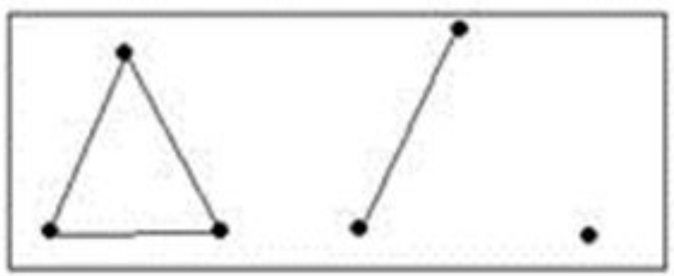
Определение. Граф называется **связным**, если для любых двух его вершин v, w существует простая цепь из v в w.

Определение. Граф (орграф) называется **связным** (**сильно связным**), если для любых двух его вершин v,w существует путь, соединяющий v, w (из v и w).

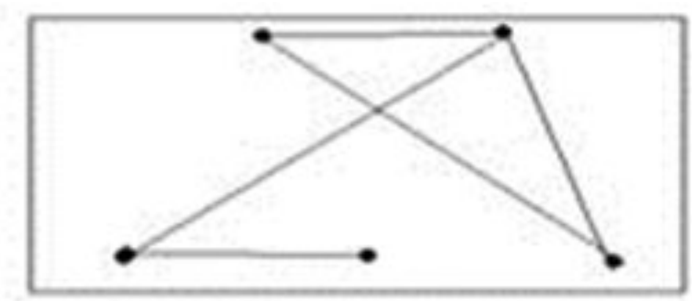
Объединение графов и компоненты связности

Определение. Орграф называется **односторонне связным**, если для любых его двух вершин, по крайней мере, одна достижима из другой.
Определение. Если граф не является связным, то он называется несвязным.
Определение. Компонентой связности графа называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа.
В дальнейшем количество компонент связности графа будем обозначать k.

Данный граф не является связным: k = 3.



Данный граф является связным: k = 0.



Теорема.

Пусть G – простой граф с n вершинами и k компонентами. Тогда число m его ребер удовлетворяет неравенствам

$$n-k \le m \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

Следствие. Любой простой граф с n вершинами и более чем $(m-1)(m-2)/2$ ребрами связен.

При исследовании графов возникает вопрос: насколько сильно связен связный граф? Этот вопрос можно сформулировать и так: сколько ребер нужно удалить из графа, чтобы он перестал быть связным? Под операцией ***удаления вершин*** из графа будем понимать операцию, заключающуюся в удалении некоторой вершины вместе с инцидентными ей ребрами.

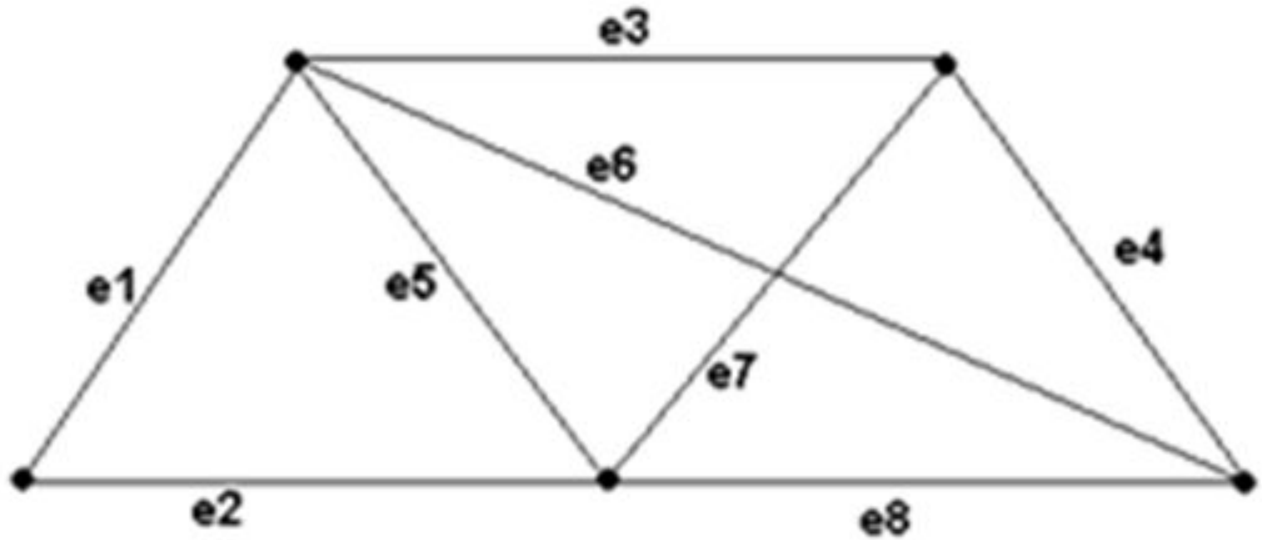
Определение. Вершина графа, удаление которой увеличивает число компонент связности, называется разделяющейся.

Определение. Разделяющим множеством связного графа G называется такое множество его ребер, удаление которого приводит к несвязному графу.

Определение. **Разрезом** называется такое разделяющее множество, никакое собственное подмножество которого не является разделяющим.

Определение. Разрез, состоящий из одного ребра, называется **мостом** (**перешейком**).

Пример



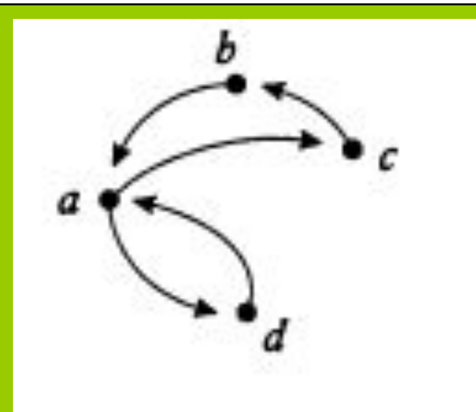
Для графа каждое из множеств {e1, e2,e5} и {e3, e6,e7, e8} является разделяющим. Разрезом является множество ребер {e1,e2}.

Теорема.

Ориентированный граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связный и степень входа каждой вершины равна ее степени выхода.

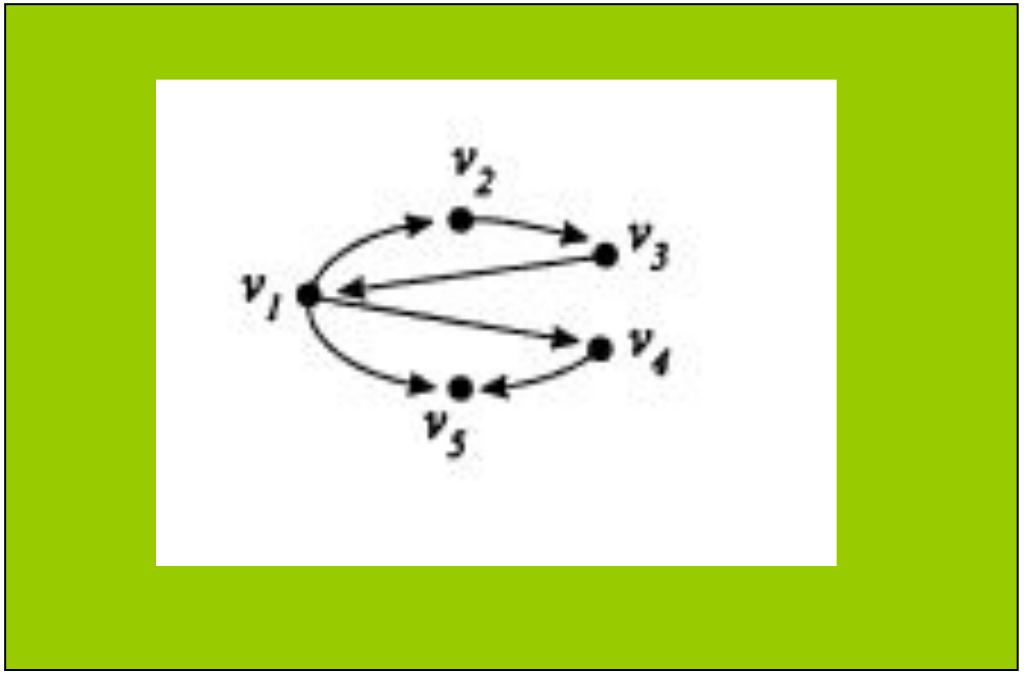
Пример.

Ориентированный граф имеет эйлеров цикл, т.к. степень входа каждой вершины равна степени выхода.



Пример.

Ориентированный граф не имеет эйлерова цикла, т.к. степень входа вершины v1 не равна степени выхода.



Гиперкубы и код Грея

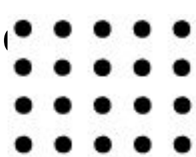
Определение:

Расстояние между двумя вершинами графа называется длина самого короткого пути между этими двумя вершинами.

Определение:

Диаметром графа называется наибольшее расстояние между двумя любыми его вершинами.

Для лучшей реализации программы вместо одиночного использования процессоров, несколько процессоров соединяются для выполнения программы в параллельном режиме. Один из способов связи компьютеров есть соединение их сериями в кольцо. Недостаток этого метода в том, что для передачи информации потребуется прохождение через значительное число процессов. Незначительное улучшение дает использование сетки, или прямоугольного массива процессоров, когда они помещены в каждой точке



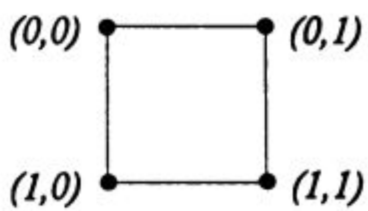
бщем случае сетки M x N возможна ситуация прохождения информации через M + N – 1 процессор.

Для лучше работы могут быть использования гиперкубы, n-гиперкуб может включать до 2^n компьютеров.

Граф n-гиперкуба строится рекурсивным способом:

Для n=1 одну вершину представляем посредством 1, а другую посредством 0, вершины графа состоят из всех строк длины 1, содержащих 0 и 1:

Для n=2 вершины представляем посредством 11, 10, 01, 00, вершины представлены строками длины 2, содержащих 0 и 1:



Для n=3 вершины представлены посредством 111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000, вершины графа описывают строки длины 3, состоящие из 0 и 1:

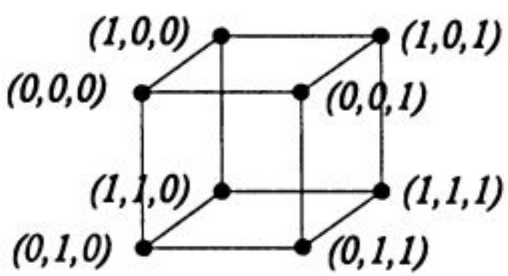


Таблица – список всех возможных комбинаций утверждений

порядок 1	порядок 2	порядок 3	порядок 4
1	11	111	1111
0	10	110	1110
	01	101	1101
	00	100	1100
		011	1011
		010	1010
		001	1001
		000	1000
			0111
			0110
			0101
			0100
			0011
			0010
			0001
			0000

Карта Карно для n=2

	q	$\sim q$
p	11	10
$\sim p$	01	00

Для n=3

	q	q	$\sim q$	$\sim q$
p	111	110	100	101
$\sim p$	011	010	000	001
	r	$\sim r$	$\sim r$	r

Для n=4

	q	q	$\sim q$	$\sim q$	
p	1111	1101	1001	1011	s
p	1110	1100	1000	1010	$\sim s$
$\sim p$	0110	0100	0000	0010	$\sim s$
$\sim p$	0111	0101	0001	0011	s
	r	$\sim r$	$\sim r$	r	

Последовательность вершин для *k*+1 –мерного куба, используя последовательность вершин *k* –мерного куба:

1) Поместить 1 перед каждой вершиной в последовательности вершин *k* –мерного куба. Вершины, которые были смежными в *k* –мерном кубе, с приставленной единицей остаются смежными в *k*+1 –мерном кубе.

2) Поместить 0 перед каждой вершиной в последовательности вершин *k* –мерного куба. Вершины, которые были смежными в *k* –мерном кубе, с приставленным нулем остаются смежными в *k*+1 –мерном кубе.

3) Поместить последовательность, построенную в пункте (2), вслед за последовательностью, построенной в пункте (1).

Реверсируем список вершин для *k* –мерного куба, т.е. порядок вершин в списке изменим на обратный.
Формирование списка вершин 2-мерного куба:

1

0

Меняем порядок элементов в столбце

0

1

Помещаем 0 перед каждым элементом

1 1

1 0

0 0

0 1

Список вершин для 3-мерного куба:

Перейдем

$$\begin{array}{ccc}
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1
\end{array}$$

Приведенная процедура всегда будет давать последовательность вершин для *k* –мерного куба, которую называют ***k* –списком**.

В таком *k* –списке (1) каждая вершина последовательности является смежной для следующей вершины и (2) первая вершина последовательности является смежной к последней вершине последовательности.

Код Грея

Правило построения кода Грея для *k*+1 :

1) Поместить 1 перед каждой вершиной в *k* –списке *k* –мерного куба. Вершины, смежные в *k* –мерном кубе, с приставленной впереди 1 остаются смежными в *k*+1 –мерном кубе.

2) Поместить 0 перед каждой вершиной в реверсированном k –списке *k* –мерного куба. Вершины, смежные в k –мерном кубе, с приставленным впереди 0 остаются смежными в *k*+1 –мерном кубе.

3) Разместить последовательность, сформированную в (2), после последовательности, сформированной в (1).

Пример.
3-список и реверсированный 3-список представляют собой соответственно

Перейдем

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Следовательно, код Грея для n=4

1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	0
1	1	0	1
1	0	0	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	0	1	1
0	0	1	1
0	0	1	0
0	0	0	0
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	0	0
0	1	1	0
0	1	1	1

Соединение компьютеров в конфигурацию сетки или решета.

Сетка – граф, вершины которого заданы массивом размерности $m \times n$, для которого две вершины, соседствующие в одной и той же строке или столбце массива, являются смежными как вершины графа.

Возможно ли для $m \leq 2^k$ и $n \leq 2^l$ построить подграф $k+l$ –мерного куба, т.е. сетку размера $m \times n$?

Делали для карт Карно. Обозначим строки согласно первым m элементам кода Грея для k и обозначим столбцы согласно первым m элементам кода Грея для l . Элемент позиции (i, j) сетки есть метка i–ой строки, за которой следует метка j –го столбца.

Пример.

Сетка 3×7

	111	110	100	101	001	000	010
11	11111	11110	11100	11101	11001	11000	11010
10	10111	10110	10100	10101	10001	10000	10010
00	00111	00110	00100	00101	00001	00000	00010

(i, j) –ый элемент сетки является элементом таблицы.

Примеры доказывают теорему:

Теорема

Каждая сетка размера m×n представляет собой подграф $i + j$ -мерного куба, где

$$m \le 2^i \quad \text{и} \quad n \le 2^j .$$

Теорема

Каждый гиперкуб для $n \geq 1$ является двудольным графом, в котором непересекающиеся множества вершин состоят из множества тех вершин, которые изображаются строками, содержащими четное число единиц, и множества вершин, которые изображаются строками, содержащими нечетное число единиц.

Двудо́льный граф или **бигра́ф** — это граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет какую-то вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, то есть не существует ребра, соединяющего две вершины из одной и той же части.

Последний слайд лекции

!