

Лекция 2. Кинематика движения материальной точки

2.1. Модели в механике

2.2. Тело отсчета. Система отсчета.

2.3. Кинематика поступательного движения.

2.4. Скорость.

2.5. Ускорение и его составляющие.

2.6. Задачи

2.1. Модели в механике

Механика – часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.



Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причин, которые это движение вызывают.

Она использует понятия: **траектория, путь, перемещение, время, скорость и ускорение.**

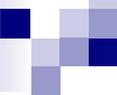
Динамика - изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Она наряду с кинематическими, использует понятия: **масса, сила, импульс, энергия.**

Пытаясь понять и объяснить определенный класс явлений, ученые часто прибегают к использованию *модели*.

При этом под *моделью* понимают некоторый мысленный образ явления, опирающийся на уже известные понятия и позволяющий построить полезную аналогию.

Примером здесь может служить волновая модель света. Световые волны нельзя наблюдать подобно тому, как мы видим волны на воде; однако полезно представить себе свет в виде волн, поскольку результаты опытов со светом указывают на его большое сходство с волнами на воде.



***Цель построения модели* состоит в том, чтобы получить мысленную или наглядную картину явления в тех случаях, когда мы лишены возможности непосредственного восприятия того, что происходит в этом явлении.**

Во многих случаях модель позволяет получить более глубокое понимание; так, аналогия с уже известными явлениями (например, с волнами на воде в упомянутом выше примере для света) может стимулировать проведение новых опытов и подсказать характер возможных родственных явлений.

Ни одна модель не может быть вполне безупречной, и ученые постоянно стремятся усовершенствовать свои модели или предложить новые, когда прежние перестают быть адекватными.

Статика - изучает равновесие системы тел.

Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия.

Поэтому законы статики отдельно от законов динамики физика не рассматривает.

Модели кинематики

Материальной точкой (частицей) называют тело в тех случаях, когда изучают его поступательное движение как целого.

При этом полагают, что его размеры, форма и другие структурные свойства, а также протекающие в нем процессы, не влияют на движение тела в пределах точности измерений.

Модели кинематики

Абсолютно *твердым* *телом*
называется тело, которое ни при
каких условиях не может
деформироваться и при всех
условиях расстояние между двумя
точками (или точнее между двумя
частицами) этого тела остается
постоянным.

Модели кинематики

В физике используют *модель сплошной среды*, в которой не учитываются ее структурные особенности, и любой бесконечно малый объем такой среды обладает свойствами, характерными для всей системы.

Модели кинематики

Сплошное тело (причем, не только абсолютно твердое) можно мысленно разбить на малые взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка.

Тогда изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению системы материальных точек.

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

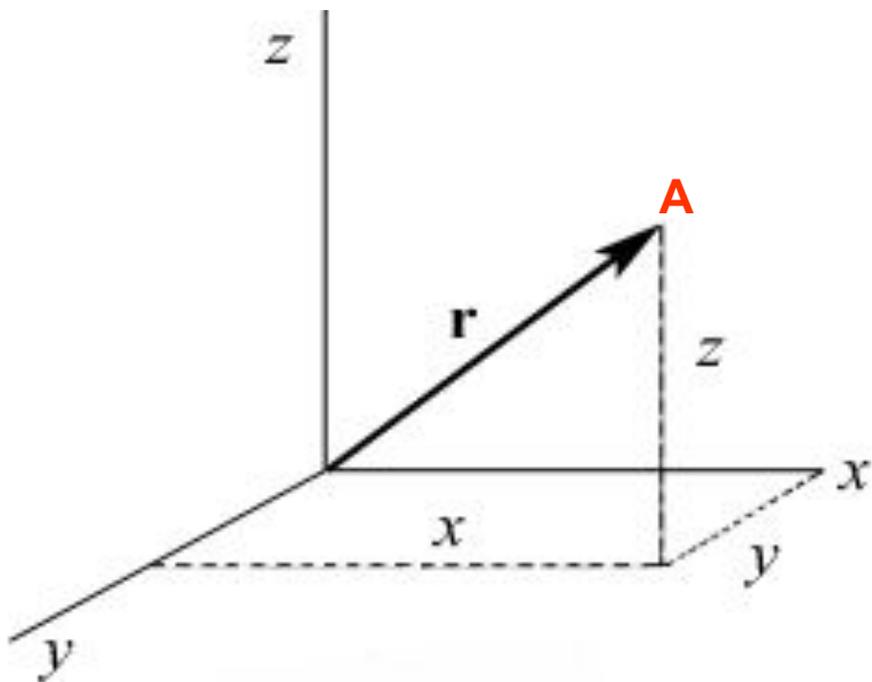
Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой ***осью вращения***.

Движение тела происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась, и в какие моменты времени она проходила то или иное положение.

Движение тела всегда относительно. Его можно обнаружить только в том случае, если вы будете сравнивать положение движущейся материальной точки с положением другого тела, которое считают неподвижным.

Тело, относительно которого рассматривается движение, называют *телом отсчета*.

***Система отсчета* — совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета.**



В декартовой системе координат, используемой наиболее часто, положение точки **A** в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами x , y , z или радиус-вектором \underline{r} , проведенным из начала системы координат в данную точку

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются.

В общем случае ее движение определяется *скалярными уравнениями*

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad (2.1)$$

эквивалентными векторному уравнению

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (2.2)$$

где x, y, z – проекции радиуса – вектора на оси координат, а $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – единичные векторы, направленные по соответствующим осям.

Уравнения (2.1) и соответственно (2.2) называются *кинематическими уравнениями движения материальной точки.*

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется *числом степеней свободы*.

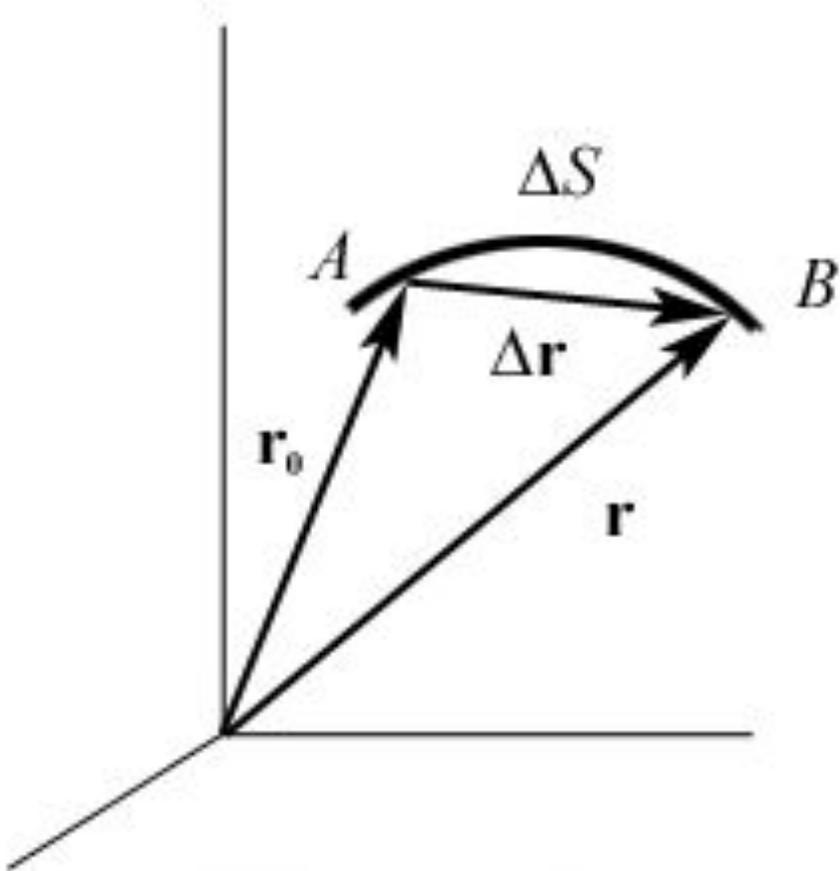
Если материальная точка свободно движется в пространстве, то она обладает *тремя степенями свободы* (координаты x, y, z); если она движется по некоторой поверхности, то *двумя степенями свободы*, если вдоль некоторой линии, то *одной степенью свободы*.

2.3. Кинематика поступательного движения

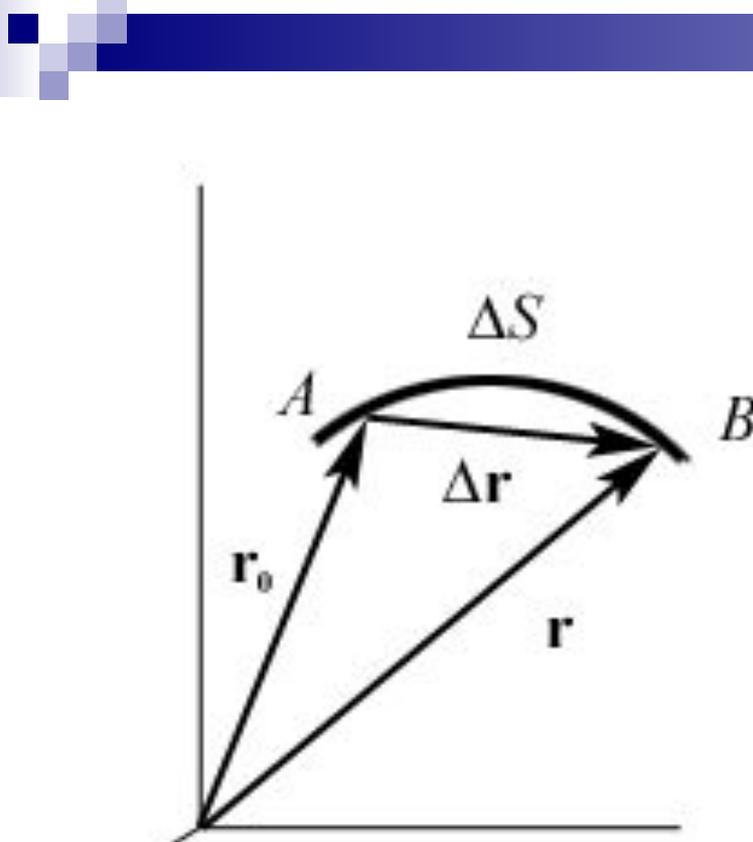
Исключая время t в уравнениях (2.1) и (2.2) получим уравнение траектории движения материальной точки.

Траектория движения материальной точки – линия, описываемая этой точкой в пространстве.

В зависимости от формы траектории движение может быть **прямолинейным (поступательным), криволинейным и вращательным.**



Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории. Отсчет времени начнем с момента, когда точка находилась в положении A . Длина участка траектории AB , пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени, называется *длиной пути ΔS* и является скалярной функцией времени: *$\Delta S = \Delta S(t)$*



Вектор $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, проведенный из начального положения движущейся точки в положение точки в данный момент времени (приращение радиуса – вектора $\Delta \vec{r}$ за рассматриваемый промежуток времени) **называется перемещением**

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$$

и в прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta \vec{r}|$ равен пройденному пути ΔS .

2.4. Скорость

Для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина - *скорость*, которой определяют как *быстроту движения*, так и *изменение его направления* в данный момент времени.

Пусть материальная точка движется по какой-либо криволинейной траектории так, что в момент времени t ей соответствует радиус-вектор \vec{r} . В течение малого промежутка времени точка пройдет путь ΔS и получит элементарное (бесконечно малое) перемещение $\Delta \vec{r}$.

Вектором средней скорости $\langle \vec{v} \rangle$ называется приращение $\Delta \vec{r}$ радиус-вектора точки к промежутку времени Δt :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.3)$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta \vec{r}$. При неограниченном уменьшении средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется *мгновенной скоростью* \vec{v} :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Мгновенная скорость – векторная величина, равная скорости материальной точки в фиксированный момент времени.

Мгновенная скорость – векторная величина, равная первой производной радиус–вектора движущейся точки по времени.

Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения, поэтому модуль мгновенной скорости

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

Таким образом, *модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени*

$$v = \frac{ds}{dt}$$

(2.4)

При неравномерном движении модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В данном случае пользуются скалярной величиной $\langle v \rangle$ – средней скоростью неравномерного движения $\langle v \rangle = \Delta s / \Delta t$. Из рис. 3 вытекает, что $\langle v \rangle > \langle |\vec{v}| \rangle$, так как $\Delta s > \Delta r$, и только в случае прямолинейного движения $\Delta s = |\Delta r|$.

Если выражение $ds = v dt$ (см. формулу 2.4) проинтегрировать по времени в пределах от t до $t + \Delta t$, то найдем длину пути, пройденного точкой за время Δt :

$$s = \int_t^{t+\Delta t} v dt \quad (2.5)$$

В случае *равномерного* движения **числовое значение мгновенной скорости постоянно**; тогда выражение (2.5) примет вид:

$$s = v \int_t^{t+\Delta t} dt = v\Delta t$$

Длина пути, пройденного точкой за промежуток времени от t_1 до t_2 дается интегралом:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

2.5. Ускорение и его составляющие.

В случае неравномерного движения важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени.

Физической величиной характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению является *ускорение*.

Рассмотрим *плоское движение*, то есть движение, при котором все участки траектории точки лежат в одной плоскости.

Пусть вектор \vec{v} задает скорость точки A в момент времени t . За время Δt движущаяся точка перешла в положение B и приобрела скорость, отличную от \vec{v} как по модулю, так и по направлению и равную

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + d\vec{v}$$

Перенесем вектор \vec{U}_1 в точку A и найдем $\Delta\vec{U}$ (рис.4).

Разложим вектор $\Delta\vec{U}$ на две составляющие. Для этого из точки A (рис.4) по направлению скорости \vec{U} отложим вектор \vec{AD} по модулю равный U_1 . Очевидно, что вектор \vec{CD} , равный Δv_τ , определяет изменение скорости за время Δt по модулю:

$$\Delta v_\tau = v_1 - v$$

Вторая же составляющая, $\Delta\vec{U}_n$ характеризует изменение скорости за время Δt по направлению.

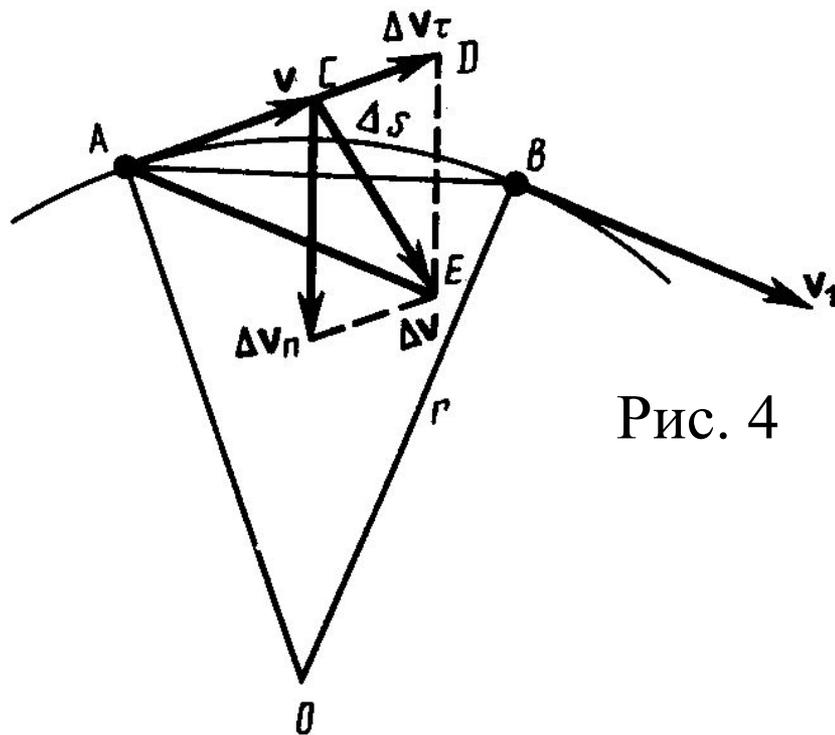


Рис. 4

Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_{\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

т.е. равна первой производной по времени от модуля скорости, определяя тем самым быстроту изменения скорости по модулю.

Найдем вторую составляющую ускорения. Допустим, что точка B достаточно близка к точке A , поэтому можно считать дугу окружности радиуса r , мало отличающейся от хорды AB . Тогда из подобия треугольников AOB и EAD следует $\Delta v_n / AB = \Delta v_1 / r$, но т.к. $AB = v \cdot \Delta t$, то

$$\frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v v_1}{r}$$

В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ получим $\overset{\sphericalangle}{v}_1 \rightarrow \overset{\sphericalangle}{v}$.

Поскольку $\overset{\sphericalangle}{v}_1 \rightarrow \overset{\sphericalangle}{v}$, угол EAD стремится к нулю, и т.к. треугольник EAD равнобедренный, то угол ADE между $\overset{\sphericalangle}{v}$ и $\Delta \overset{\sphericalangle}{v}_n$ стремится к прямому. Следовательно, при $\Delta t \rightarrow 0$ векторы $\overset{\sphericalangle}{v}$ и $\Delta \overset{\sphericalangle}{v}_n$ оказываются взаимно перпендикулярными. Так как вектор скорости направлен по касательной к траектории, то вектор $\Delta \overset{\sphericalangle}{v}_n$, перпендикулярный вектору скорости, направлен к центру ее кривизны. Вторая составляющая ускорения равная

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \overset{\sphericalangle}{v}_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r},$$

называется **нормальной составляющей ускорения** и направлена по нормали к траектории к центру ее кривизны (поэтому ее называют также **центростремительным ускорением**).

Полное ускорение тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Итак, тангенциальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения скорости по модулю (направлена по касательной к траектории), а нормальная составляющая ускорения – быстроту изменения скорости по направлению (направлена к центру кривизны траектории).

В зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

1. $a_\tau = 0, a_n = 0$ – прямолинейное равномерное движение;
2. $a_\tau = a = const, a_n = 0$ – прямолинейное равнопеременное движение.

При таком виде движения $a_\tau = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$.

Если начальный момент времени $t_1 = 0$, а начальная скорость $v_1 = v_0$, то, обозначив $t_2 = t$ и $v_2 = v$, получим $a = (v - v_0)/t$, откуда

$$v = v_0 + at$$

Проинтегрировав эту формулу в пределах от нуля до произвольного момента t , найдем, что длина пути пройденного точкой, в случае равнопеременного движения

$$S = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + at^2 / 2$$

3. $a_\tau = f(t)$, $a_n = 0$ – прямолинейное движение с переменным ускорением.

4. $a_\tau = 0$, $a_n = \text{const}$.

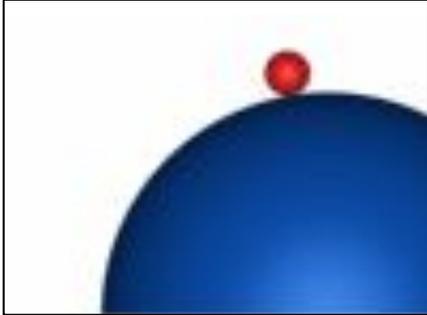
При $a_\tau = 0$ скорость по модулю не меняется, а изменяется по направлению. Из формулы $a_n = v^2/r$ следует, что радиус кривизны должен быть постоянным. Следовательно, движение по окружности является равномерным.

5. $a_\tau = 0, a_n \neq 0$ – равномерное криволинейное движение.

6. $a_\tau = \text{const}, a_n \neq 0$ – криволинейное равнопеременное движение.

7. $a_\tau = f(t), a_n \neq 0$ - криволинейное движение с переменным ускорением.

Задачи



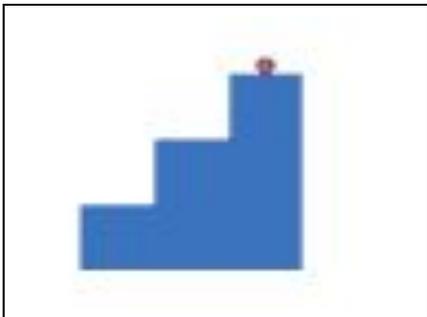
1. Маленький шарик начинает скатываться без начальной скорости с вершины абсолютно гладкой полусферы радиуса R . На какой высоте он оторвётся от поверхности.

Ответ: $2R/3$



2. Цилиндр радиуса R лежит на двух тонких стержнях. С какой относительной скоростью V должны раздвигаться стержни, чтобы падения цилиндра происходило без контакта с ними.

Ответ: $V = 2\sqrt{gR}$



3. С какой скоростью шарик должен двигаться по верхней ступени лестницы, чтобы удариться о среднюю и нижнюю ступень только по одному разу. Ширина и высота ступеней - b .

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{gb}$ $(\sqrt{2}-1)\sqrt{gb}$

Движение в поле тяжести Земли



Рассмотрим движение свободного тела в присутствии гравитационного поля Земли на примере выстрела из пушки. Если пушка расположена в точке с координатами $(0, 0, 0)$, то снаряд будет двигаться по траектории, которая описывается следующими уравнениями:

$$X = (v \cos \phi) t$$

$$Y = (v \sin \phi) t - g t^2 / 2,$$

где v - скорость снаряда вдоль ствола пушки, ϕ - угол между стволом пушки и горизонтом (ось X), t - время, g - ускорение свободного падения в поле тяжести Земли. Подставляя t из первого уравнения во второе, находим уравнение траектории движения снаряда:

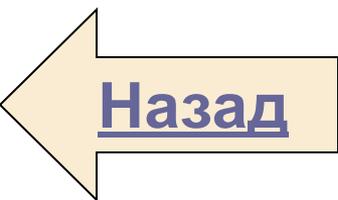
$$Y = X \operatorname{tg} \phi - (g/2 v^2)(1 + \operatorname{tg}^2 \phi) X^2$$



Из приведённого выше уравнения видно, что траектория полёта снаряда имеет параболическую форму. Из этого уравнения находим максимальную дальность стрельбы X_{\max} (при этом $Y=0$) и максимальную высоту полёта Y_{\max} (первая производная Y по координате X равна нулю):

$$\begin{aligned} X_{\max} &= v^2 \sin(2\phi) / g \\ Y_{\max} &= v^2 \sin^2 \phi / 2g \end{aligned}$$

Из первого уравнения видно, что максимальная дальность полёта снаряда достигается при стрельбе под углом ϕ , равном 45° .



[Назад](#)