Теория возраста

E_1 – энергия нейтрона до рассеяния
E_2 – энергия после рассеяния

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{A^2 + 2\cdot A\cdot\cos\Theta + 1}{(A+1)^2}$$

или $\frac{E_2}{E_1} = \frac{1}{2}\left[(1+\alpha)+(1-\alpha)\cdot\cos\Theta\right]$, где $\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$

Водород!!!

<u>Отсюда следует, что:</u>

$\frac{E_{макс}}{E_1} = 1$ при $\cos\Theta = 1, \quad \Theta = 0$

$\frac{E_{мин}}{E_1} = \alpha$ при $\cos\Theta = -1, \quad \Theta = \pi$

$$\frac{\Delta E_{макс}}{E_1} = \frac{E_1 - E_{мин}}{E_1} = 1-\alpha$$

или $\alpha\cdot E_1 \le E_2 \le E_1$

Средний логарифм потери энергии при одном столкновении

$$\xi = \overline{\ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)} = \frac{\int_{E_1}^{\alpha E_1} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \cdot p(E_2)dE_2}{\int_{E_1}^{\alpha E_1} p(E_2)dE_2} = -\int_{E_1}^{\alpha E_1} \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right) \cdot \frac{dE_2}{E_1(1-\alpha)}$$

Поскольку это равно 1 , а это равно $-\frac{dE_2}{E_1(1-\alpha)}$

Интегрируя получим:

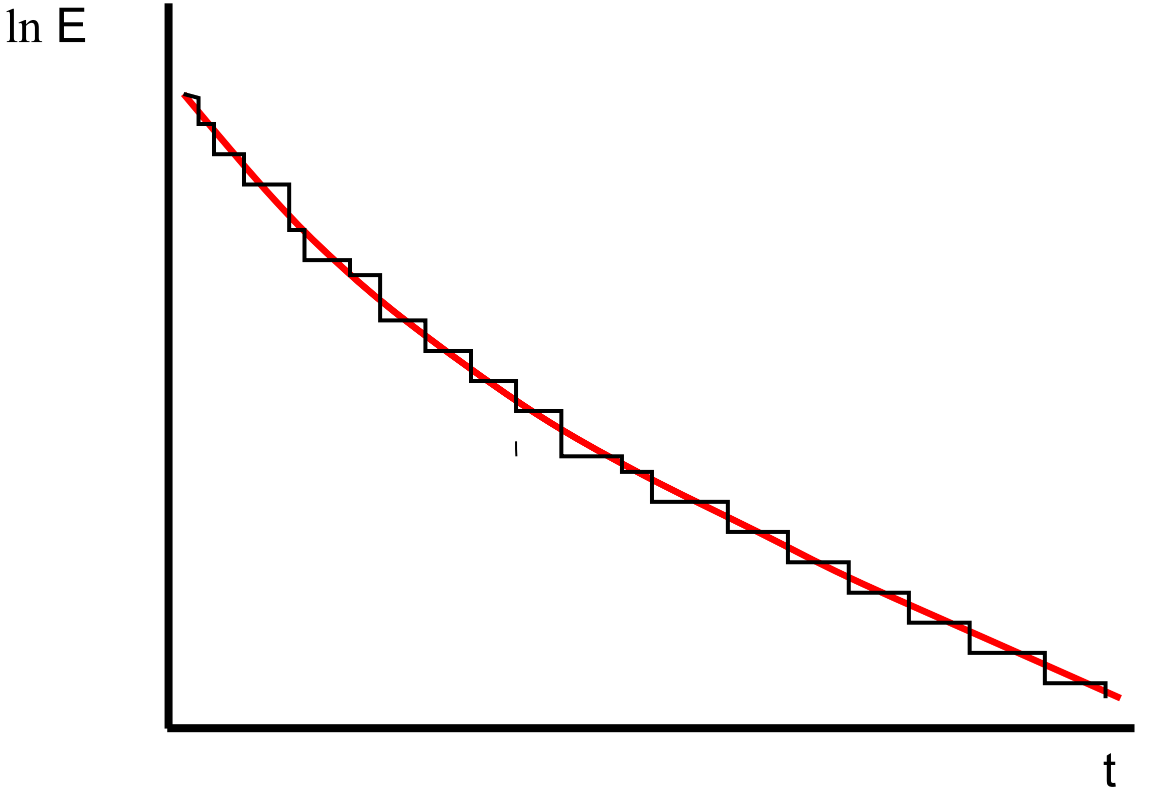
$$\xi = \frac{1}{1-\alpha}\int_1^{\alpha} \ln(x)dx = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln\alpha$$ (замена переменной $x \equiv \frac{E_2}{E_1}$)

или $\xi = 1 + \frac{(A-1)^2}{2A}\ln\frac{A-1}{A+1}$, при $A > 10$ $\xi \approx \frac{2}{A + 2/3}$

Летаргия

$$U = \ln\left(\frac{E_0}{E}\right)$$

Обычно $E_0 = 2\ Мэв$



ln E
t

Среднее число столкновений с 2 Мэв до тепловой энергии

$$N = \frac{\ln\left(2 \cdot 10^{6} / 0.0253\right)}{\xi}$$

	Массовое число	ξ	N
Водород	1	1.000	18
Дейтерий	2	0.725	25
Гелий	4	0.425	43
Литий	7	0.268	67
Берилий	9	0.209	86
Углерод	12	0.158	114
Кислород	16	0.120	150
Уран	238	0.00838	2172

λ_s - средняя длина свободного пробега по отношению к рассеянию; $\lambda_s = 1/\Sigma_s$

v – скорость нейтрона между столкновениями

$v \cdot \dfrac{dt}{\lambda_s}$ - количество столкновений за время dt

При одном столкновении уменьшение $\ln E$ равно $-\xi$, поэтому:

$$-d\ln E = \frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} \cdot dt$$

или

$$du = \frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} \cdot dt$$

Если источник и поглощение нейтронов отсутствуют, то:

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = D\Delta\Phi(r,t) \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = D \cdot v \cdot \Delta n(r,t)$$

$n(r,t)dt$ – число нейтронов в 1см^3, которые диффундировали в течение dt

$n(r,u)du$ – число нейтронов в 1см^3, с летаргией U в интервале от U до $U+du$

Поэтому:

$$n(r,u)du = n(r,t)dt \quad \text{откуда :}$$

$$n(r,t) = n(r,u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} n(r,u)$$

Вспомним, что:

$$\frac{\partial y}{\partial x} \equiv \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{(см. основы мат.анализа)}$$

Поэтому:

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial n(r,t)}{\partial u}$$

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = \frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} \cdot \frac{\partial n(r,t)}{\partial u}$$

Следовательно:

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = \frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} n(r,u)\right]$$

Теперь подставим всё это в уравнение:

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = D \cdot v \cdot \Delta n(r,t)$$

Получим:

$$\frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} n(r,u)\right] = D \cdot v \cdot \Delta\left[\frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} n(r,u)\right]$$

или

$$\xi\Sigma_s \cdot \frac{\partial}{\partial u}\left[\xi\Sigma_s \cdot \Phi(r,u)\right] = D \cdot \Delta\left[\xi\Sigma_s \cdot \Phi(r,u)\right]$$

$$q = \xi\Sigma_s \cdot \Phi(r,u)$$ - плотность замедления

Поэтому:

$$\Delta q = \frac{\xi\Sigma_s}{D}\frac{\partial q}{\partial u}$$

Введя новую переменную τ :

$$\tau(u) \equiv \int_0^u \frac{D}{\xi\Sigma_s} du$$

$$\Delta q = \frac{\partial q}{\partial \tau}$$ - уравнение возраста

Время диффузии и время замедления

$$du = -\frac{dE}{E} = \frac{\xi \cdot v}{\lambda_s} dt$$

$$t = \int_0^t dt = \int_{E_T}^{E_0} \frac{\lambda_s}{\xi \cdot v} \frac{dE}{E}, \qquad v = \sqrt{2E/m},$$

$$t = \frac{\overline{\lambda_s}}{\xi} \cdot \sqrt{2m} \left(\frac{1}{\sqrt{E_T}} - \frac{1}{\sqrt{E_0}} \right)$$

	λ_s, см	Время замедления, сек	Время диффузии, сек
Вода	1.1	10^{-5}	$2.1 \cdot 10^{-4}$
Тяжёлая вода	2.6	$4.6 \cdot 10^{-5}$	0.15
Берилий	1.6	$6.7 \cdot 10^{-5}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$
Графит	2.6	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-2}$

Диффузионно-возрастное приближение

$$\frac{\partial n(r,t)}{\partial t} = D\Delta\Phi(r,t) - \Sigma_a \cdot \Phi(r,t) + Q$$

или

$$\frac{1}{v}\frac{\partial \Phi(r,t)}{\partial t} = D\Delta\Phi(r,t) - \Sigma_a \cdot \Phi(r,t) + Q$$

-уравнение баланса тепловых нейтронов

$Q-$ источник тепловых нейтронов $= q(r,\tau_T,t)\cdot\varphi$?

$$\Delta q(r,\tau,t) = \frac{\partial q(r,\tau,t)}{\partial \tau}$$

$$q(r,0,t) = \frac{k_\infty}{\varphi}\Sigma_a\Phi(r,t) + S(r)$$

$$q(R_{гр},\tau,t) = 0$$

$$\Phi(R_{гр},t) = 0$$

$$\Delta q(r,\tau,t) = \frac{\partial q(r,\tau,t)}{\partial \tau} \qquad (1)$$

Пусть,

$$q(r,\tau,t) = R(r)\cdot\Theta(\tau)\cdot T(t) \qquad (2)$$

Подставляя в (1) получим,

$$\Delta R(r)\cdot\Theta(\tau)\cdot \cancel{T}(t) = R(r)\cdot\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial\tau}\cdot \cancel{T}(t)$$

или

$$\frac{\Delta R(r)}{R(r)} = \frac{1}{\Theta(\tau)}\cdot\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial\tau}$$

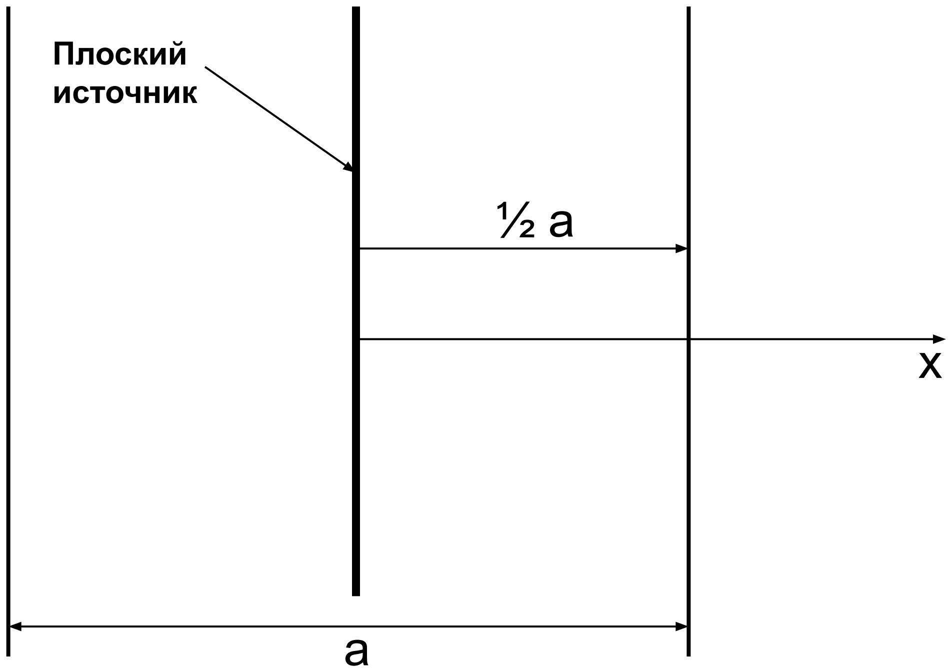
Исходя из этого,

$$\frac{\Delta R(r)}{R(r)} = -B^2 \qquad \text{или} \qquad \Delta R(r) + B^2 R(r) = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{\Theta(\tau)}\cdot\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial\tau} = -B^2, \text{ решение имеет вид:} \qquad \Theta(\tau) = A\cdot e^{-B^2\cdot\tau} \qquad (4)$$

Критическое условие

Пусть имеем плоский реактор с источником быстрых нейтронов на плоскости симметрии



Тогда (для понятности) заменив *R(r)* на *X(x)* имеем,

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + B^2 \cdot X(x) = 0$$

С граничными условиями X(a/2)=0

Решение с учётом условия симметрии:

$$X_n = A_n \cos B_n x \qquad (5)$$

Используя граничное условие получаем, что:

$$B_n^2 = \left(\frac{n \cdot \pi}{a}\right)^2, \quad n = 1,3,5,... \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5), а его и выражение (4) в формулу (2), получим:

$$q(r,\tau,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n \cdot \pi}{a} x \cdot e^{-B_n^2 \cdot \tau} \cdot T_n(t), \quad n = 1,3,5,... \qquad (7)$$

Внешний источник представим рядом Фурье:

$$S(r) = S \cdot \delta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos\frac{n \cdot \pi}{a} x, \quad n = 1,3,5,... \qquad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в уравнение связи $q(r,0,t) = \frac{k_\infty}{\varphi}\Sigma_a \Phi(r,t) + S(r)$ получим:

$$\Phi(r,t) = \frac{\varphi}{k_\infty \cdot \Sigma_a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cdot T_n(t) - S_n\right] \cos\frac{n \cdot \pi}{a} x, \quad n = 1,3,5,.. \qquad (9)$$

Подставим (9) и (7) в уравнение диффузии тепловых нейтронов,

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\Phi(r,t)}{\partial t} = D\Delta\Phi(r,t) - \Sigma_a \cdot \Phi(r,t) + \varphi \cdot q(r,\tau_T,t)$$

и учитывая, что члены рядов Фурье линейно независимы, имеем:

$$\frac{1}{v}\frac{\varphi}{k_\infty \cdot \Sigma_a} A_n \frac{\partial T_n}{\partial t} = -\frac{\varphi}{k_\infty}\left[\frac{D \cdot B_n^2}{\Sigma_a} + 1\right] \cdot \left(A_n \cdot T_n(t) - S_n\right) + \varphi \cdot A_n e^{-B_n^2 \cdot \tau_T} \cdot T_n(t) \qquad (10)$$

Помня, что $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$ квадрат длины диффузии тепловых нейтронов

а, $\frac{1}{v \cdot \Sigma_a} = l_0$ время жизни теплового нейтрона в бесконечной среде

перепишем (10) в виде,

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} = \left[\frac{k_\infty \cdot e^{-B_n^2 \cdot \tau_T} - \left(1 + L^2 \cdot B_n^2\right)}{l_0}\right] \cdot T_n(t) + \frac{1 + L^2 \cdot B_n^2}{l_0 \cdot A_n} S_n$$

Введём важные обозначения:

$$k_n \equiv \frac{k_\infty \cdot e^{-B_n^2 \cdot \tau_T}}{1 + L^2 \cdot B_n^2} \quad \text{и} \quad l_n \equiv \frac{l_0}{1 + L^2 \cdot B_n^2}$$

Перепишем в виде:

$$\frac{\partial T_n}{\partial t} = \left(\frac{k_n - 1}{l_n}\right) \cdot T_n(t) + \frac{S_n}{l_n \cdot A_n} \qquad (10)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$T_n(t) = e^{\frac{(k_n - 1)}{l_n} t} + \frac{S_n}{A_n \cdot (1 - k_n)} \qquad (11)$$

а поток тепловых нейтронов согласно (9),

$$\Phi(r,t) = \frac{\varphi}{k_\infty \cdot \Sigma_a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cdot e^{\frac{(k_n - 1)}{l_n} t} + \frac{S_n \cdot k_\infty \cdot e^{-B_n^2 \tau_T}}{(1 + L^2 \cdot B_n^2) \cdot (1 - k_n)} - \right] \cos \frac{n \cdot \pi}{a} x, \quad n = 1,3,5,.. \qquad (12)$$