Алгоритмы и структуры данных

ЛЕКЦИЯ 15

Хеширование

Валенда Н.А.

Кафедра Программной инженерии,
факультет КН, ХНУРЕ

Для многих приложений необходимо и достаточно реализовывать динамические множества, поддерживающие только стандартные операции :

- *вставка*
- *поиск*
- *удаление.*

Скорость поиска

- Линейный поиск - $T_{prepare} = O(n), Tfind = O(n)$
- Бинарный поиск и деревья поиска - $T_{prepare} = O(n \bullet log(n)), Tfind = O(log(n))$
- можно ли искать за $O(1)$

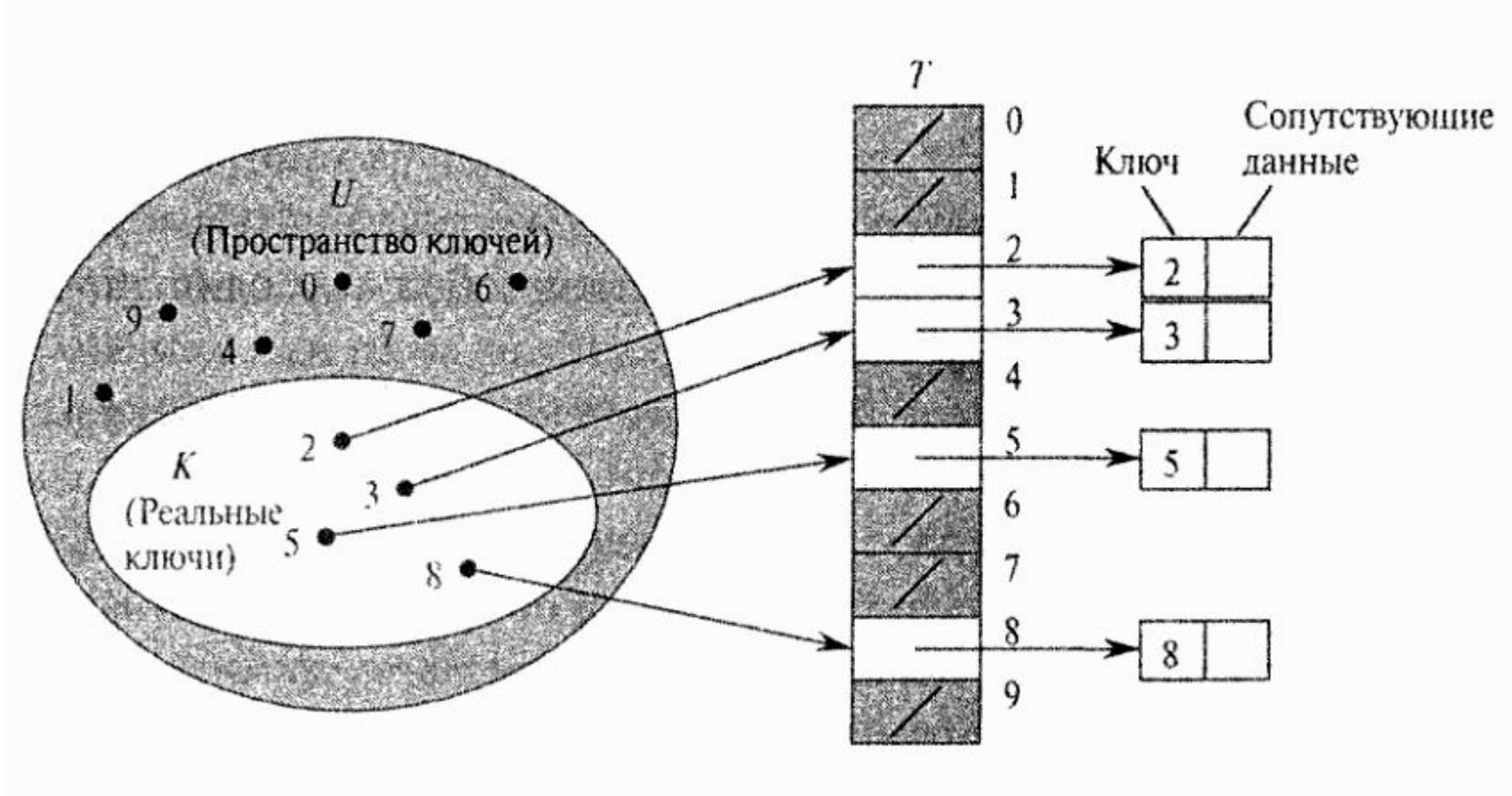
Прямая адресация

Прямая адресация применяется для небольших множеств ключей. Требуется задать динамическое множество, каждый элемент которого имеет ключ из множества U = {0,1,..., m - 1}, где m не слишком велико, никакие два элемента не имеют одинаковых ключей.

Для представления динамического множества используется массив (таблицу с прямой адресацией), T [0..m - 1], каждая позиция, или ячейка, которого соответствует ключу из пространства ключей U.

Ячейка k указывает на элемент множества с ключом k. Если множество не содержит элемента с ключом k, то T [k] = NULL.

Прямая адресация



Операция поиска по ключу занимает время *O(1)*

Прямая адресация

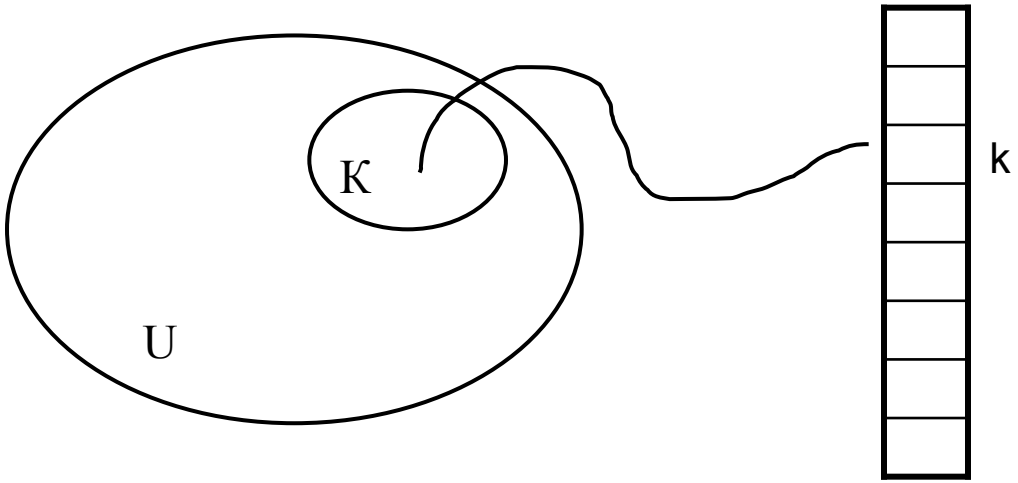
Недостатки прямой адресации :

- если пространство ключей U велико, хранение таблицы T размером |U| непрактично, а то и вовсе невозможно — в зависимости от количества доступной памяти и размера пространства ключей

- множество K реально сохраненных ключей может быть мало по сравнению с пространством ключей U, а в этом случае память, выделенная для таблицы T, в основном расходуется напрасно.

Хеш-функция

Хеш-функция – такая функция h, которая определяет местоположение элементов множества U в таблице T.



Хеширование

При хешировании элемент с ключом k хранится в ячейке h(k), хеш-функция h используется для вычисления ячейки для данного ключа k. Функция h отображает пространство ключей U на ячейки хеш-таблицы T [O..m - 1]:

$$h: U \longrightarrow \{0,1,..., m -1\}.$$

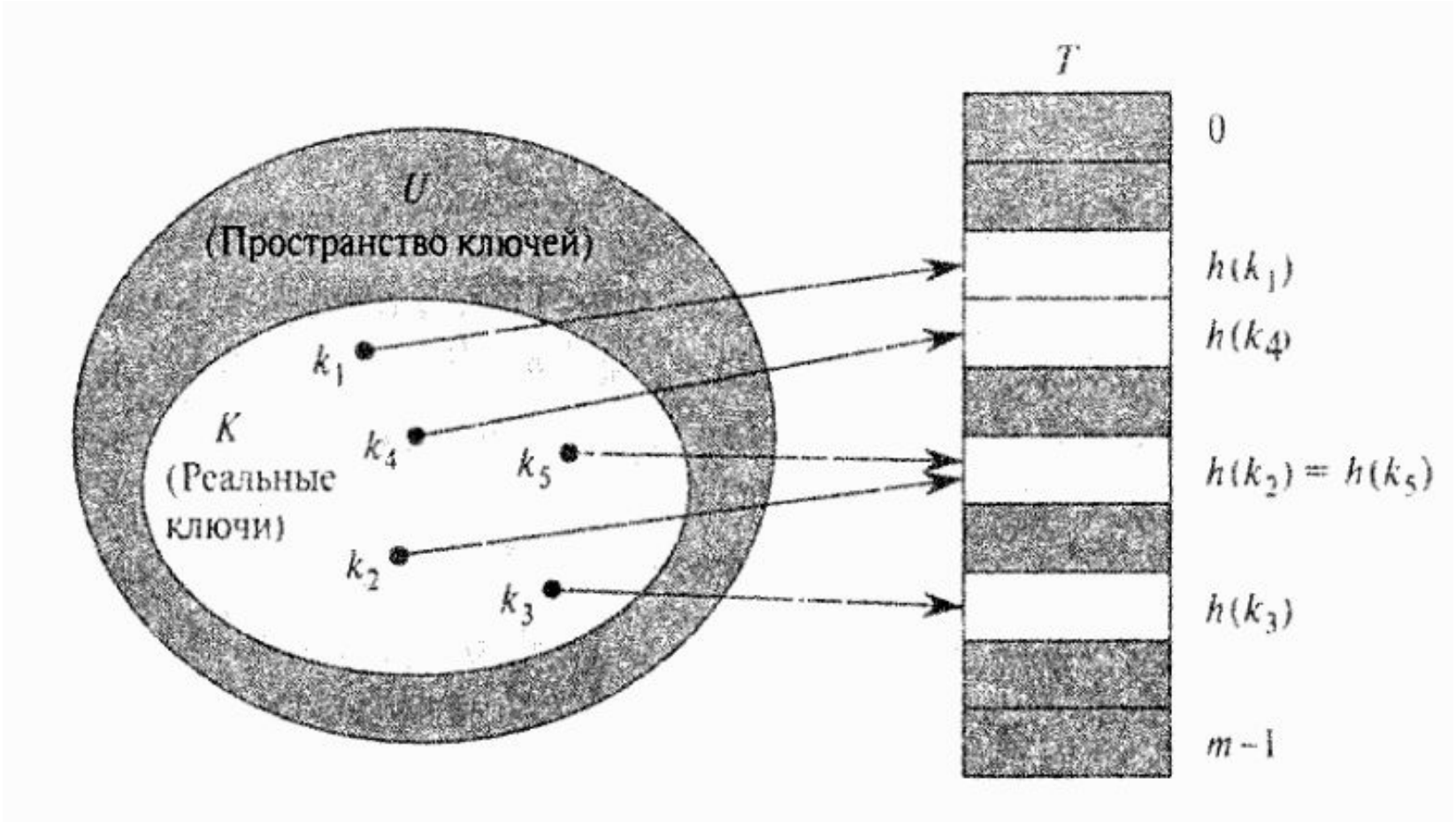
величина h (к) называется хеш-значением ключа к.

Когда множество К хранящихся в словаре ключей гораздо меньше пространства возможных ключей U, хеш-таблица требует существенно меньше места, чем таблица с прямой адресацией.

Цель хеш-функции состоит в том, чтобы уменьшить рабочий диапазон индексов массива, и вместо |U| значений можно обойтись всего лишь m значениями.

Требования к памяти могут быть снижены до $\theta(|K|)$, при этом время поиска элемента в хеш-таблице остается равным O(1) - это граница среднего времени поиска, в то время как в случае таблицы с прямой адресацией эта граница справедлива для наихудшего случая.

Хеширование



Коллизии

Коллизия – ситуация, когда два ключа отображаются в одну и ту же ячейку .

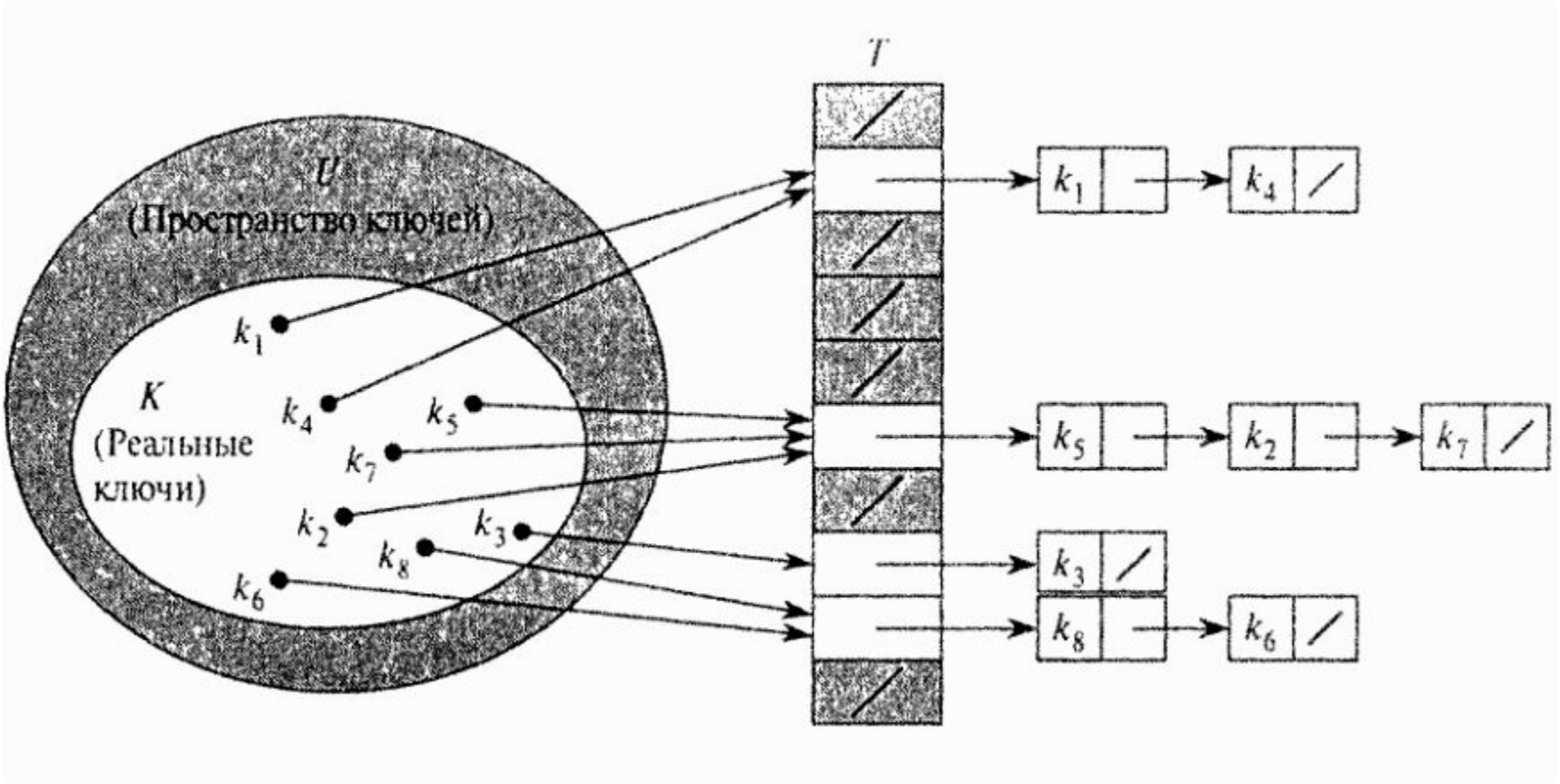
Например, h(43) = h(89) = h(112) = k

Решения коллизий:

- Метод цепочек

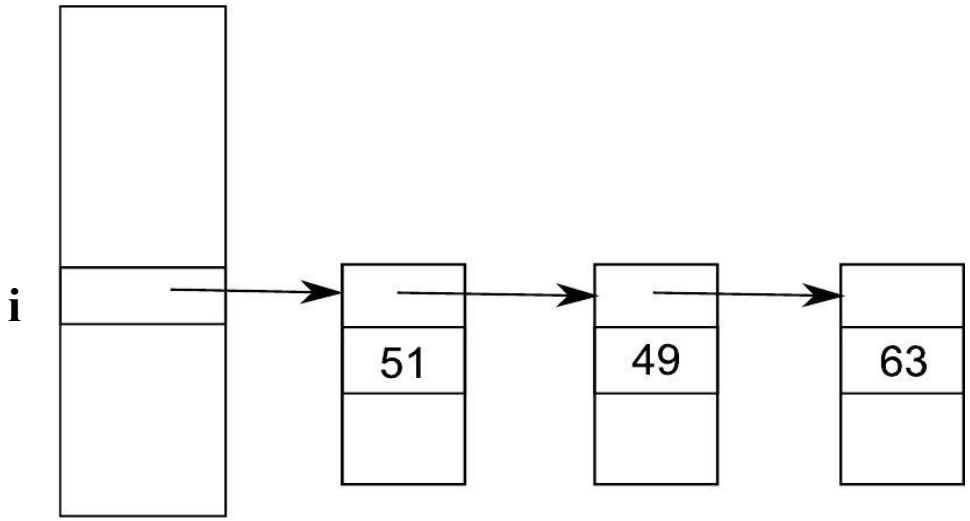
- Открытая адресация

Коллизии


T
U
(Пространство ключей)
K
(Реальные
ключи)
k_1
k_4
k_5
k_7
k_2
k_3
k_8
k_6

Метод цепочек

Идея: Хранить элементы множества с одинаковым значением хэш-функции в виде списка.



h(51) = h(49) = h(63) =
i

Анализ метода цепочек

Наихудший случай: если хэш-функция для всех элементов множества выдает одно и то же значение. Время доступа равно $\Theta(n)$, при $|U| = n$.

Средний случай: для случая, когда значения хэш-функции равномерно распределены.
Каждый ключ с равной вероятностью может попасть в любою ячейку таблицы, вне зависимости от того куда попали другие ключи.

Анализ метода цепочек

Пусть дана таблица *T[0..m - 1],* и в ней хранится *n* ключей.

Тогда, *α = n/m* - среднее количество ключей в ячейках таблицы.

Время поиска отсутствующего элемента – Θ(1 + α).
Константное время на вычисления значения хэш-функции плюс время на проход списка до конца, т.к. средняя длина списка - α, то результат равен Θ(1) + Θ(α) = Θ(1 + α)

Если количество ячеек таблицы пропорционально количеству элементов, хранящихся в ней, то n = O(m) и, следовательно, α = n/m = O(m)/m = O(1), а значит поиск элемента в хэш-таблице в среднем требует времени Θ(1).

Операции
- *вставка элемента в таблицу*
- *удаление*

также требуют времени O(1)

Выбор хэш-функции

- Ключи должны равномерно распределятся по всем ячейкам таблицы.

- Закономерность распределения ключей хэш-функции не должна коррелировать с закономерностями данных. (Например, данные – это четные числа).

Методы:

  - Метод деления

  - Метод умножения

Метод деления

$h(k) = k \bmod m$

Проблема маленького делителя m

Пример №1. $m = 2$ и все ключи четные ⇒ нечетные ячейки не заполнены.

Пример №2. $m = 2^r$ ⇒ хэш не зависит от битов выше r.

Метод деления: хорошая эвристика

Выбирать для m простое число не близкое к степеням 2 и 10.

Метод умножения

Пусть $m = 2^r$, ключи являются w-битными словами.

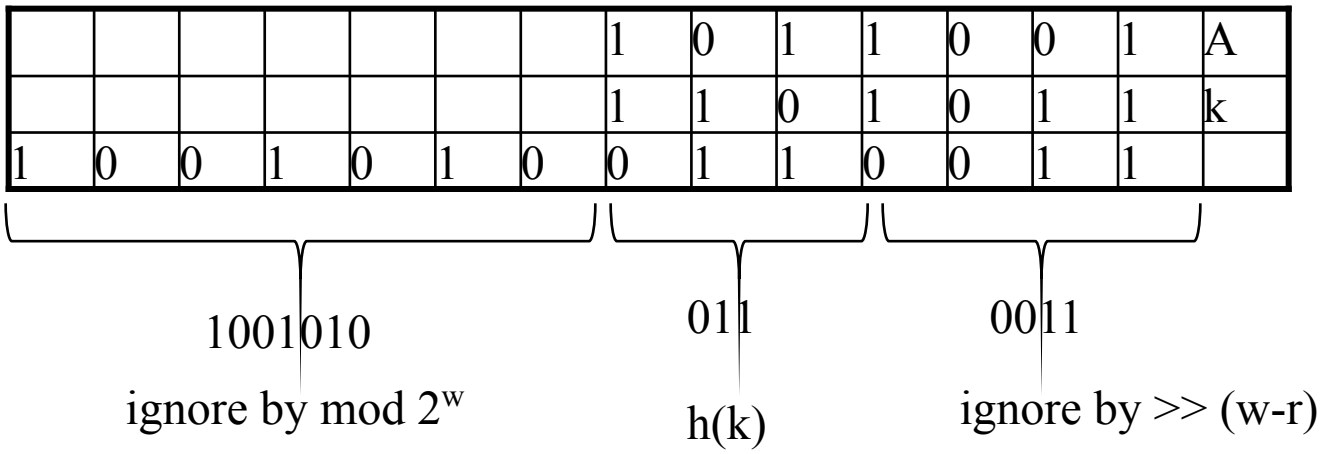
$h(k) = (A \bullet k \bmod 2^w) >> (w - r)$, где

$A \bmod 2 = 1 \cap 2^{w-1} < A < 2^w$

Не следует выбирать A близко к 2^{w-1} и 2^w

Метод умножения: пример

$m = 8 = 2^3$, $w = 7$



Разрешение коллизий: открытая адресация

- Не нужно хранить ссылки

- Будем последовательно проверять ячейки таблиц, пока не найдем пустую.

- $h : U \times \{0,1,\ldots,m-1\} \rightarrow \{0,1,\ldots,m-1\}$

- $(h(k,0), h(k,1),\ldots, h(k,m-1))$ – это перестановка $(0,1,\ldots,m-1)$

- $n < m$

Открытая адресация: пример вставки

Пусть дана таблица A:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	23	45			78				

Вставим $k = 89$:

1. h(89, 0) = 3
2. h(89,1) = 2
3. h(89, 2) = 9 – **Успех!**

Открытая адресация: поиск

- Поиск – также последовательное исследование

- Успех, когда нашли значение

- Неудача, когда нашли пустую клетку или прошли всю таблицу.

Стратегии исследования

- Линейная -
  $h(k, i) = (h'(k) + i) \bmod m$
  где $h'(k)$ – обычная хэш-функция

  Данная стратегия легко реализуется, однако подвержена проблеме первичной кластеризации, связанной с созданием длинной последовательности занятых ячеек, что увеличивает среднее время поиска.

- Квадратичная
  $h(k, i) = (h'(k) + c_1 i + c_2 i^2) \bmod m$
  где $h'(k)$ – обычная хэш-функция

- Двойное хеширование –
  $h(k,i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \bmod m.$

Двойное хеширование

Этот метод даёт отличные результаты, но $h_2(k)$ должен быть взаимно простым с m.
Этого можно добиться:
1) используя в качестве m степени двойки и сделав так, чтобы $h_2(k)$ выдавала только нечётные числа
$m = 2^r$ и $h_2(k)$ – нечетная.

2) m - простое число, значения *h_2 – целые положительные числа, меньшие m*
Для простого *m можно установить*

h1(k)=k mod m
h2(k)=1+(k mod m')

m' меньше m (m' = m-1 или m-2)

Открытая адресация: пример вставки

Пусть дана таблица A:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	79			69	98		72				50	

Двойное хеширование

$h(k,i) = (h_1(k) + i \bullet h_2(k)) \bmod m$

m=13

h1(k)=k mod 13

h2(k)=1+(k mod 11)

k=14

Куда будет встроен элемент?

Открытая адресация: пример вставки

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	79			69	98		72		14		50	

Анализ открытой адресации

Дополнительное допущение для равномерного хеширования: каждый ключ может равновероятно получить любую из m! перестановок последовательностей исследования таблицы независимо от других ключей.

Поиск отсутствующего элемента, добавление элемента

$$E[количество\,исследований] \le \frac{1}{1-\alpha},$$

$$где\,\alpha < 1 \Leftrightarrow n < m$$

α = *n/m, где n – число записей, m - размер таблицы.*

Число проб при успешном поиске

$$\frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\alpha}$$

Скорость работы поиска в хэш-таблице при открытой адресации

$a < 1 — const \Rightarrow O(1)$

Как же себя ведет *a:*

- Таблица заполнена 50% ⇒2 исследования
- Таблица заполнена на 90% ⇒ 10 исследований

Список литературы

- Ахо. А., Хопкрофт Д., Ульман Д. Структуры данных и алгоритмы. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2000 сс. 116-127

- Кормен Е., Лейзерсон Ч., Ривест., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание. - М. : Издательский дом «Вильямс», 2007. сс. 103-104, 282-315