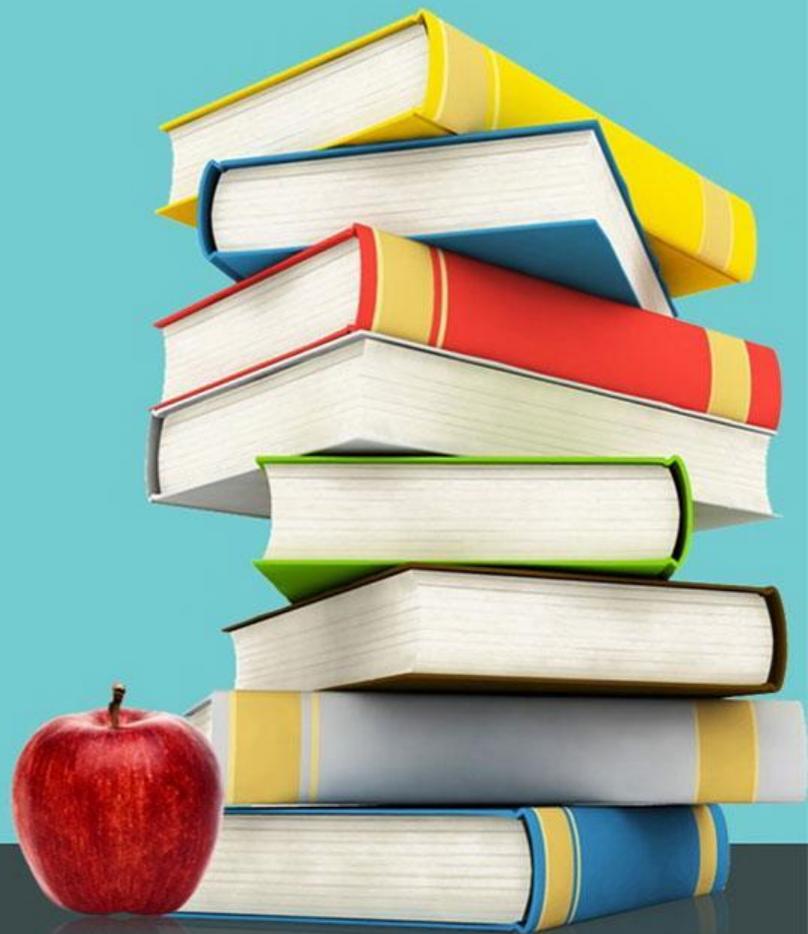


Иррациональные уравнения

Методы решения



Устно:

1. Упростить выражения:

$$\sqrt{x^2}; \left(\sqrt{x}\right)^2; \sqrt[3]{x^3}; \sqrt[3]{(-x)^3}; \sqrt[3]{-x^3}; \sqrt[4]{(-x)^4}; \sqrt[5]{x^{10}}; \sqrt{x^8}; \sqrt[3]{x^9}.$$

2. Решить уравнения:

а) $x^4 - 8 = 0$; б) $x^3 + 4 = 0$; в) $x^5 - 1 = 0$;

3. Повторить формулы сокращенного умножения:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$



Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную под знаком радикала, а также под знаком возведения в дробную степень.

$$\sqrt{2x-3} = x+1$$

$$\sqrt[3]{x+5} - 12\sqrt{x-4} = 5$$

$$3x^{\frac{4}{7}} - \sqrt{x+8} = 15$$



Методы решения иррациональных уравнений

- *Возведение в степень обеих частей уравнения*
- *Введение новой переменной*
- *Разложение на множители*
- *Анализ уравнения (метод «пристального взгляда»)*
- *Использование монотонности функции*



Возведение в степень обеих частей уравнения

Алгоритм решения:

- ✓ **Избавиться от корня возведением в степень.** *Если в иррациональном уравнении содержится два или более радикала, то сначала изолируется один из радикалов, затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень, и повторяют операцию возведения в степень до тех пор, пока не получится рациональное уравнение.*
- ✓ **Решить полученное уравнение.**
- ✓ **Выполнить проверку.**



Решить уравнения:

$$\sqrt{15 - 2x} = 3$$

$$\sqrt{x + 2} = x$$

$$\sqrt[4]{x + 3} + 2 = 0$$



Использование равносильных переходов

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 (g(x) \geq 0) \end{cases}$$



Решите уравнение $\sqrt{2x - 3} = 4 - x$

$$\begin{cases} 2x - 3 = (4 - x)^2 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 19 = 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 = 5 - \sqrt{6}$$

$$x_2 = 5 + \sqrt{6} > 4 - \text{посторонний корень}$$

Ответ: $x = 5 - \sqrt{6}$.



Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{x}$

$$\begin{cases} x^2 - 2 = x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$x = -1 < 0$ – посторонний корень

$$x = 2$$

Ответ: 2.



Решите уравнение: $\sqrt{3x^2 - x - 2} = x - 1$

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ 3x^2 - x - 2 = (x - 1)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1, \\ 3x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$x_1 = 1.$$

$$x_2 = -1,5$$

- Ответ : $x_1 = 1.$



Решите уравнение

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{x-2} = 3$$

$$\sqrt{3x-1} = 3 + \sqrt{x-2}$$

$$3x-1 = 9 + 6\sqrt{x-2} + x-2$$

$$3x-1 = 7 + x + 6\sqrt{x-2}$$

$$2x-8 = 6\sqrt{x-2}$$

$$x-4 = 3\sqrt{x-2}$$

$$x^2 - 8x + 16 = 9(x-2)$$

$$x^2 - 17x + 34 = 0$$

$$D = 17^2 - 4 * 1 * 34 = 289 - 136 = 153$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{153} = \sqrt{9 * 17} = 3\sqrt{17}$$

$$x = \frac{17 + 3\sqrt{17}}{2} \in \text{ОДЗ}$$

$$x = \frac{17 - 3\sqrt{17}}{2} < 4 \notin \text{ОДЗ} - \text{посторонний корень}$$

Ответ: $\frac{17+3\sqrt{17}}{2}$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$$



Иррациональные уравнения на ЕГЭ

1. Решите уравнение

$$\sqrt{7-6x} = 7.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{4-3x} = 4.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{7+6x} = 7.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{9+8x} = 9.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{19-6x} = \sqrt{7}.$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{20-3x} = \sqrt{5}.$$

7. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1}{3-2x}} = 0,5.$$

8. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1}{3-4x}} = \frac{1}{3}.$$

9. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1}{7-6x}} = 0,25.$$

10. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x}{5-x}} = 2.$$

Проверка:

-7

-4

7

9

2

5

-0,5

-1,5

-1,5

4



Иррациональные уравнения на ЕГЭ

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите **больший** из них.

$$\sqrt{7-6x} = -x.$$

$$\sqrt{x+6} = -x.$$

$$\sqrt{11+5x} = x+3.$$

Решите уравнение $\sqrt{x^2+16} = 2x-1$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите **произведение** корней.



Проверка:

- 7
- 2
1
3



Иррациональные уравнения на ГГО

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите **МЕНЬШИЙ** из них.

$$\sqrt{5x+9} = 2x.$$

$$\sqrt{x+12} = x.$$

$$\sqrt{x^2+9} = 2x-3.$$

$$\sqrt{10+3x} = x+4.$$



Проверка:

2,25

4

4

- 3



Анализ уравнений (метод «пристального взгляда»)

- *Все корни четной степени являются арифметическими, то есть если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла;*
- *если подкоренное выражение равно нулю, то корень так же равен нулю;*
- *если подкоренное выражение положительно, то значение корня положительно.*



$$\sqrt{x + 1} + \sqrt{20} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{x + 1} = -\sqrt{5}$$

Арифметический корень не может быть отрицательным числом, значит уравнение не имеет корней.



$$\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 9} = 4$$

$$\sqrt{x^2 + 4} \geq 2$$

$$\sqrt{x^2 + 9} \geq 3$$

Уравнение не имеет решений.



Уравнения на ЕГЭ в профильной части

Найти наибольший корень уравнения

$$\sqrt{x^2 + 12x + 36} = x^2 - 36$$

$$\sqrt{(x + 6)^2} = x^2 - 36$$

$$|x + 6| = x^2 - 36$$

$$1) \begin{cases} x + 6 < 0 \\ -x - 6 = x^2 - 36 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 6 \geq 0 \\ x + 6 = x^2 - 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -6 \\ x^2 + x - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -6 \\ x^2 - x - 42 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -6 \\ x = 5 \\ x = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -6 \\ x = -6 \\ x = 7 \end{cases}$$

Ответ: наибольший корень уравнения $x = 7$.



Источники:

- источник шаблона: <http://ppt4web.ru>
- При создании шаблона использованы Google картинки: <https://www.google.ru/imghp?hl=ru&tab=wi>

