Дисциплина

«Основы компьютерного проектирования и моделирования радиотехнических систем »

Лекция №2

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТИПОВЫХ РАДИОУСТРОЙСТВ

Цель:

1. Формирование теоретических основ по общим вопросам, связанным с технологиями параметрического моделирования .
2. Изучить концепцию линейного предсказания, типовые модели сигналов, используемые в моделях РТС и связанные с ними методы параметрической оптимизации преобразователей .

Учебные вопросы:

1. Общие вопросы параметрического моделирования.
2. Линейное предсказание.
3. Вопросы, связанные с генерацией сигналов в моделях.
4. Методы параметрической оптимизации

Задание на самоподготовку:

Проработать материал лекции по [1] с.115-125 , дополнить конспект лекций методами генерации случайных чисел, используемых в компьютерных моделях РТС [1].

1. Общие вопросы параметрического моделирования

Под **параметрическим моделированием** понимаются выбор некоторой математической модели случайного процесса и последующий подбор параметров этой модели для обеспечения максимального соответствия между сигналом, формируемым моделью, и имеющейся в наличии реальной выборкой данных.

Одной из широко используемых на практике является **авторегрессионная (AR) модель**, в которой случайный сигнал формируется путем пропускания **дискретного белого шума через "чисто рекурсивный"** (то есть не использующий задержанных отсчетов входного сигнала) формирующий фильтр.

Если в нашем распоряжении имеется оценка комплексного коэффициента передачи системы на различных частотах, можно построить реализуемую модель системы, **частотная характеристика** которой будет максимально близкой к измеренной. **Под реализуемостью** системы здесь подразумевается представимость ее **функции передачи** в виде дробно-рациональной функции с заданными порядками полиномов числителя и знаменателя.

Параметрическое моделирование в данном случае **сводится к нахождению оптимальных коэффициентов полиномов числителя и знаменателя функции передачи**.

2. Линейное предсказание

Сигналы в РТС для минимизации ошибок представляются в **ортогональном базисе** через линейную композицию:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot P(t)_i$$

Для реализации процедуры ортогонального представления исходных данных необходимо выдерживать следующие правила:

- относительно цифровых сигналов для минимизации ошибок представления необходимо использовать отображение в пространстве дискретных базисов (базис функций Уолша или реализация метода главных компонент);
- относительно радиосигналов необходимо решать задачу представления в одном из непрерывных базисов конечных сигналов (базис полиномов Лежандра или полиномов Чебышева или разложение в ряд Тейлора);
- применение спектрального представления наблюдаемого радиосигнала посредством гармонических попарно ортогональных функций может быть эффективно при применении известных методов параметрической идентификации в условиях предварительного выравнивания отдельных искажений, связанных с анализом огибающей и исключением режимов интерференции сигналов в точке приема.

2. Линейное предсказание

Пусть в качестве ортогонального представления используется механизм полиномов (такой подход применим для всех рассмотренных выше ортогональных представлений). Тогда исходный сигнал, назовем его y во временном представлении будет иметь следующий вид:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot P(t)_i ,$$

где a_i - коэффициенты разложения, а $P(t)_i$ - значения i-х базисов в момент времени t.

Для доказательства состоятельности утверждения относительно ортогональности получаемого разложения используют его определение:

$$\int_a^b P(t)_i \cdot P(t)_j \cdot dx = 0 .$$

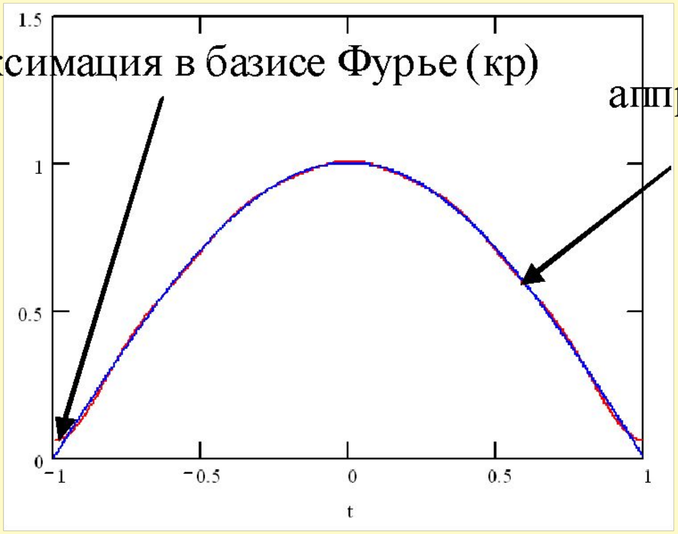
Ключевым здесь являются значения границ представленного интеграла и характер изменения весовых коэффициентов. Относительно первого замечания необходимо сказать, что для конечных сигналов границы должны выступать в качестве конкретных значений (обычно их принимают равными -1 и 1) и не содержать ∞ (как в полиномах Эрмита и Лагера).

2. Линейное предсказание

Для нахождения коэффициентов разложения сигналов используется следующее интегральное представление (для сигнала, наблюдаемого в течении времени T):

$$a_i = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\cdot P(t)_i\,dt .$$

Необходимо сразу сказать, что симметричность интервала наблюдения обусловлена равным весовым участием центрированного относительно середины наблюдения сигналом и при изменении, например, на $[0, T]$ приведет к изменению всех коэффициентов (в частности при гармоническом



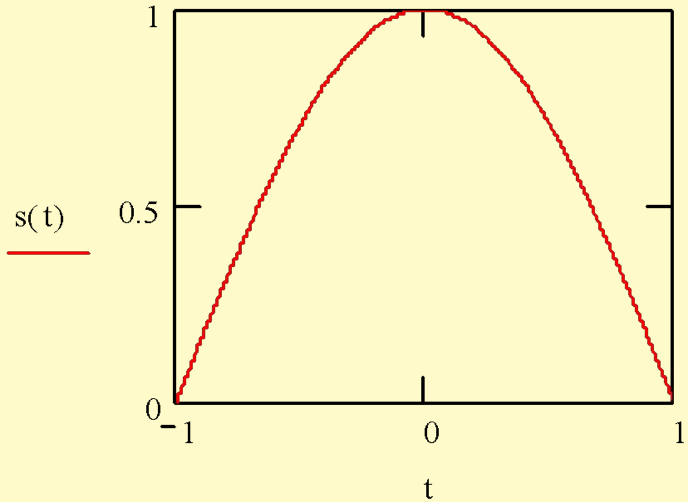
2. Линейное предсказание

Использование базиса Фурье

$$s(t) := \sin\left(\frac{t+1}{2}\cdot\pi\right)$$

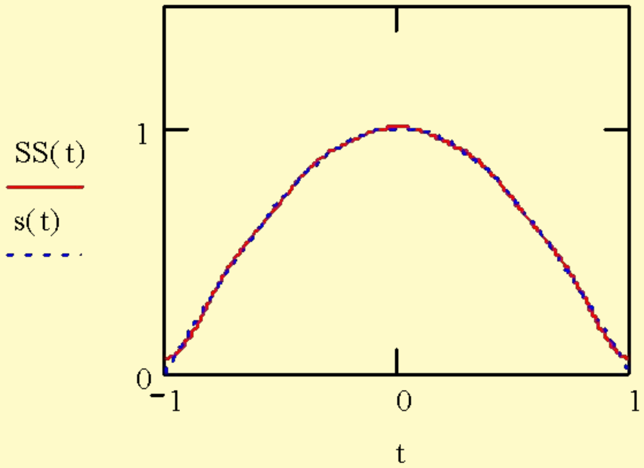
$$a(i) := \frac{2}{T}\cdot\int_{-1}^{1} s(t)\cdot\cos(i\cdot w\cdot t)\,dt \qquad a(0) = 1.273$$

$$b(i) := \frac{2}{T}\cdot\int_{-1}^{1} s(t)\cdot\sin(i\cdot w\cdot t)\,dt \qquad b(1) = 0$$



$$SS(t) := \frac{a(0)}{2} + \sum_{i=1}^{5}\left(a(i)\cdot\cos(i\cdot w\cdot t) + b(i)\cdot\sin(i\cdot w\cdot t)\right)$$

$$T := 2 \qquad w := 2\cdot\frac{\pi}{T}$$



2. Линейное предсказание

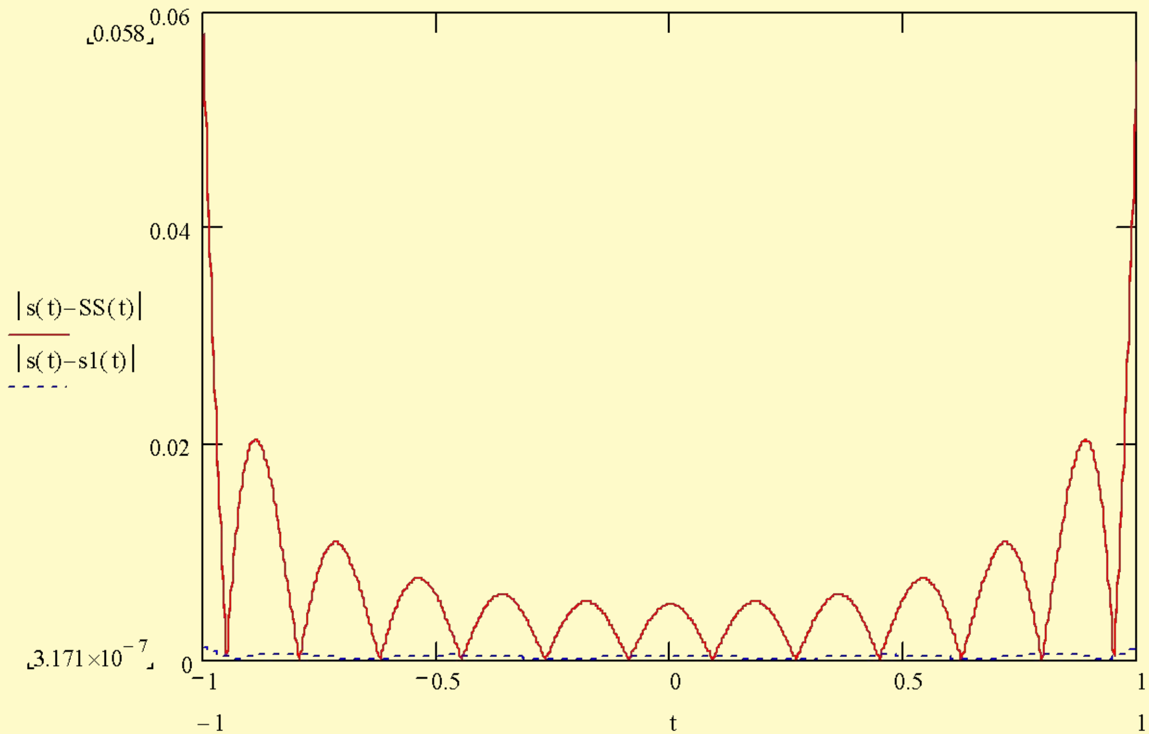
Использование базиса Лежандра

$$P(i,x) := \begin{array}{|l} a \leftarrow \dfrac{1}{2^i \cdot i!} \cdot \dfrac{d^i}{dx^i}\left(x^2-1\right)^i \quad \text{if } i>0 \\ a \leftarrow 1 \quad \text{if } i=0 \\ P \leftarrow a \end{array}$$

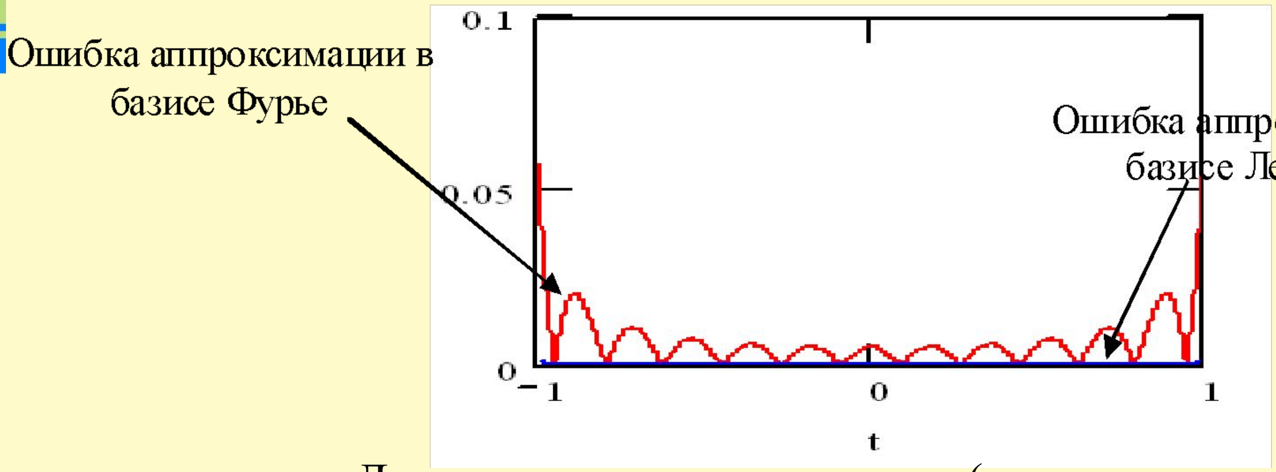
$$P(6,x) \rightarrow x^6 + \frac{15}{2}\cdot\left(x^2-1\right)\cdot x^4 + \frac{45}{8}\cdot\left(x^2-1\right)^2\cdot x^2 + \frac{5}{16}\cdot\left(x^2-1\right)^3$$

$$c(i) := \frac{2\cdot i+1}{2}\cdot\int_{-1}^{1} s(x)\cdot P(i,x)\,dx$$

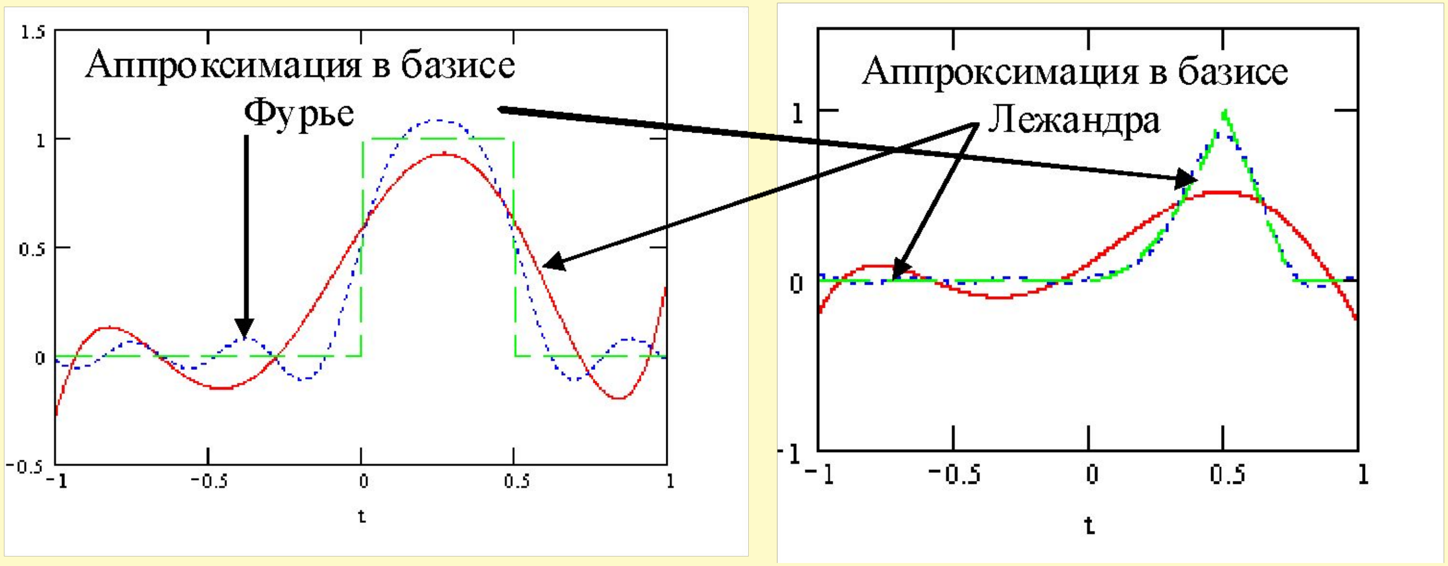
$$s1(t) := \sum_{k=0}^{5} cc(k)\cdot P(k,t)$$



2. Линейное предсказание



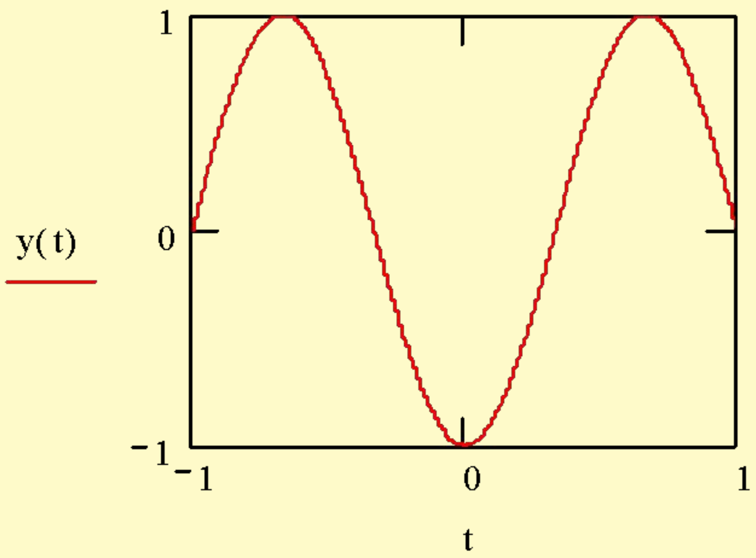
Применение полиномов Лежандра к другим сигналам (негармонической формы) превосходства не дает даже относительно их гармонического представления



2. Линейное предсказание

Использование базиса Чебышева

$$y(t) := \sin\left[\left(3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot (t + 1)\right]$$



$$T(n, x) := \cos(n \cdot \operatorname{acos}(x))$$

$$T(0, x) \rightarrow 1$$

$$T(1, x) \rightarrow x$$

2. Линейное предсказание

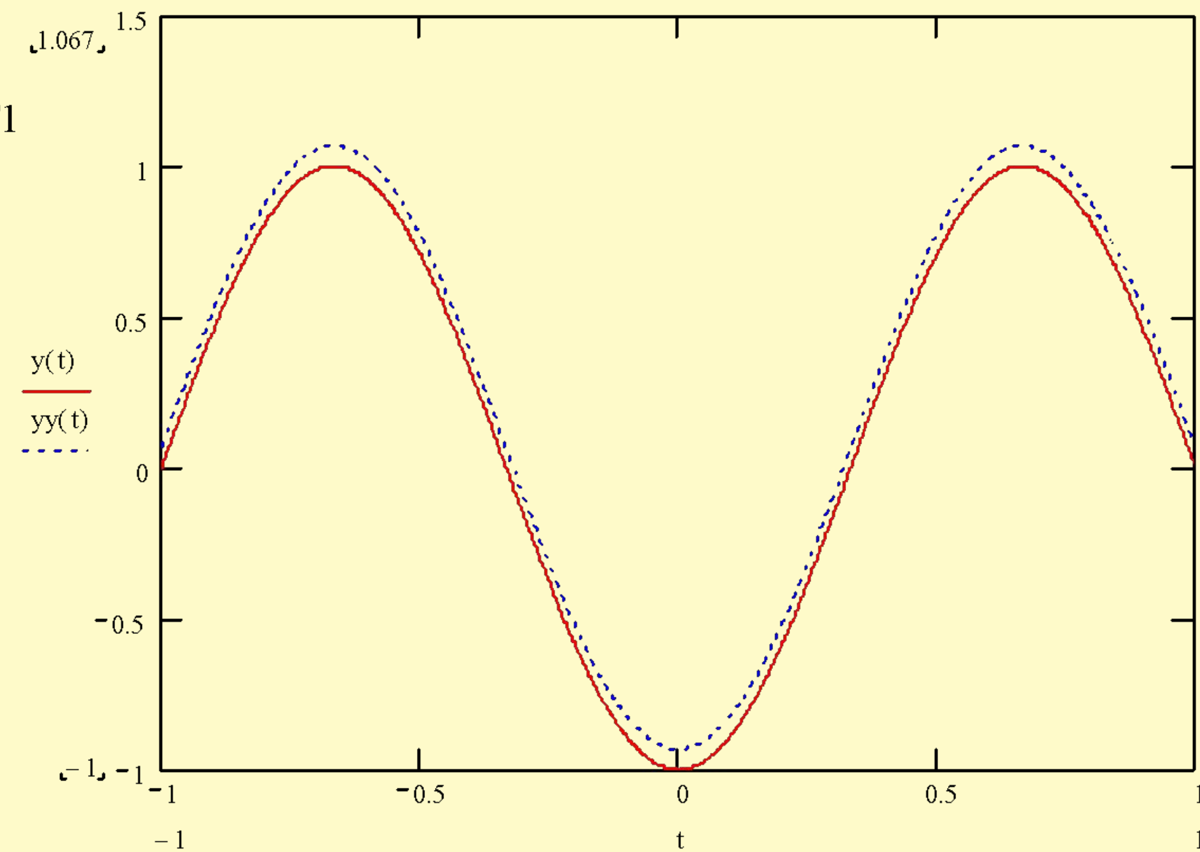
Использование базиса Чебышева

$$
T(n,x) := \left|
\begin{array}{l}
T1 \leftarrow 1 \\
T2 \leftarrow x \\
\text{for } i \in 3..n \\
\quad \left| \begin{array}{l} TT \leftarrow 2\cdot x\cdot T2 - T1 \\ T1 \leftarrow T2 \\ T2 \leftarrow TT \end{array} \right. \\
T \leftarrow 1 \ \text{ if } n = 1 \\
T \leftarrow x \ \text{ if } n = 2 \\
T \leftarrow TT \ \text{ if } n \ge 3
\end{array}
\right.
$$

$$T(4,x) \rightarrow 2\cdot x\cdot\left(2\cdot x^2 - 1\right) - x$$

$$c(i) := \int_{-1}^{1} \frac{y(t)\cdot T(i,t)}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{2}{\pi}\,dt$$

$$yy(t) := \left(\sum_{i=0}^{10} c(i)\cdot T(i,t)\right) - 0.2$$



2. Линейное предсказание

Однако, при выявлении характеристик гармонических составляющих исследуемых сигналов разложение по полиномам Лежандра приводит к следующему. Известный способ анализа таких составляющих, основывающийся на использовании двойного ортогонального базиса: $\sin(x)$ *и* $\cos(x)$ имеет предел по достижимой точности демодуляции в зависимости от действующего значения отношения мощности сигнала к спектральной плотности помехи. Сама по себе процедура использования евклидовой нормы в качестве входного аргумента для демодулятора обуславливает целесообразность использования n-мерного пространства ортогональных базисов в качестве основы для представления сигнала при анализе на приемной стороне разложении изменение приводит к пропорциональному изменению фаз базисных гармоник).

При представлении сигналов на приемной стороне в виде векторов, содержащих значения мгновенных амплитуд, возможна процедура отыскания приближенных значений коэффициентов при базисных ортогональных полиномах, участвующих в разложении исходного сигнала, через решение следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} y(t_1) = a_1 * f_1(t_1) + a_2 * f_2(t_1) + .. + a_n * f_n(t_1), \\ y(t_2) = a_1 * f_1(t_2) + a_2 * f_2(t_2) + .. + a_n * f_n(t_2), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dots \\ y(t_n) = a_1 * f_1(t_n) + a_2 * f_2(t_n) + .. + a_n * f_n(t_n). \end{cases},$$

где $y(t_1),..y(t_n)$ - значения амплитуд сигнала на приемной стороне в моменты времени $t_1,...t_n$ соответственно, $f_1(t),...f_n(t)$ значения ортогональных полиномов в соответствующие значения времени - t, а $a_1,...a_n$ - искомые значения коэффициентов.

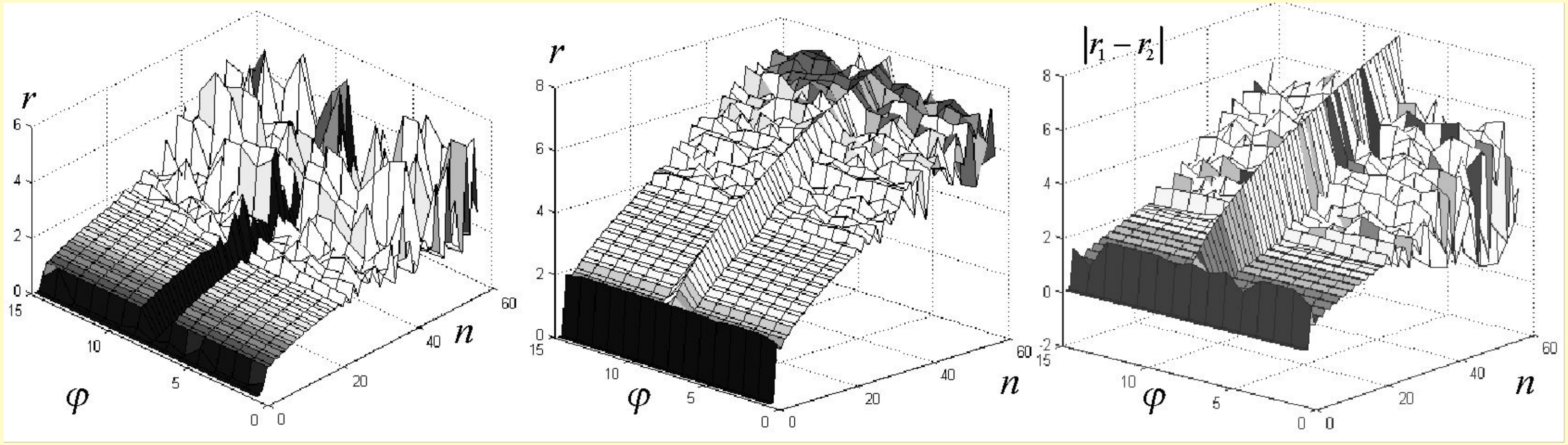
2. Линейное предсказание

Для равной значимости получаемых оценок значений коэффициентов a_i, необходима их предварительная нормировка. Одним из способов такой нормировки может служить процедура деления на плечо соответствующего (k –ого) коэффициента:

$$w_k = \frac{a_k i - a_k j}{(a_k \max - a_k \min)}$$

Например, для относительной фазовой манипуляции с двумя информационными сигналами-образами значение евклидова расстояния, без учета ошибки синхронизации и воздействия помехи, соответствует:

- при несовпадении ($a_k i \neq a_k j$) образов $r_j = \sqrt{n}$,
- при совпадении образов $w_k = 0$.



при совпадении образов | при несовпадении образов | разница $|r_1 - r_2|$

Значения Евклидова расстояния для разных ситуаций и их потенциальная разница

3. Вопросы, связанные с генерацией сигналов в моделях

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i * \cos(i * w_0 * t) + b_i * \sin(i * w_0 * t)) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i * \cos(i * w0 * t + \varphi_i)$$

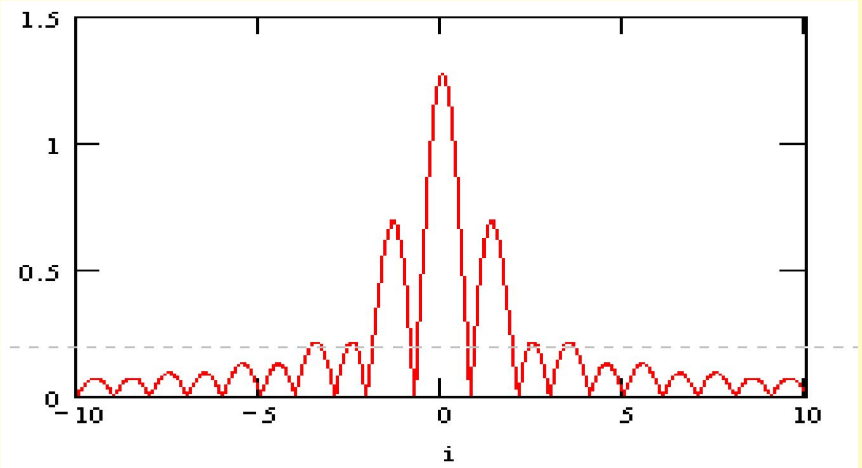
$$a_i = \frac{2}{T} * \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) * \cos(i * w0 * t)dt$$

$$A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

$$w0 = \frac{2 * \pi}{T}$$

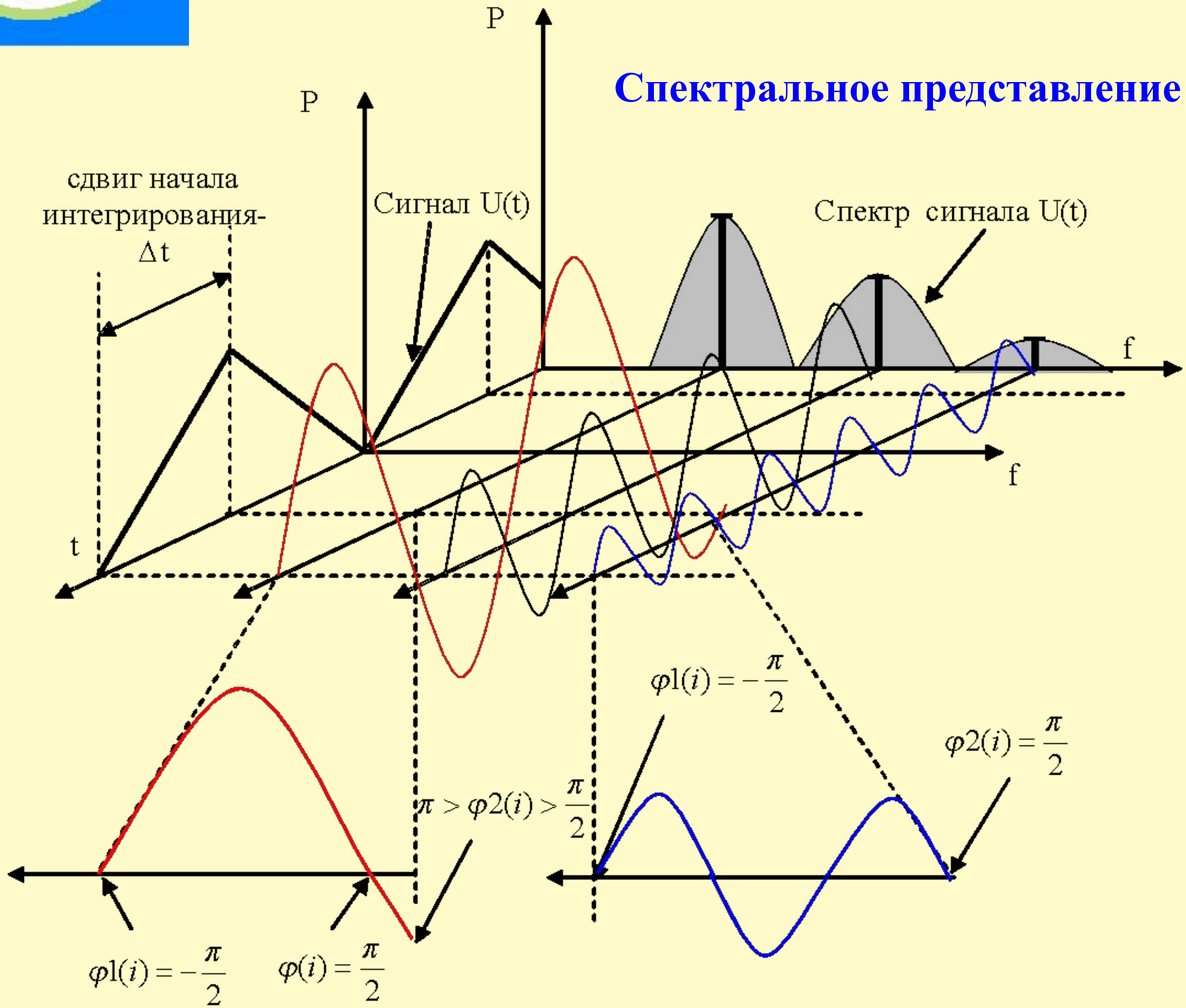
$$b_i = \frac{2}{T} * \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) * \sin(i * w0 * t)dt$$

$$\varphi_i = ar\tan\left(\frac{b_i}{a_i}\right)$$



3. Вопросы, связанные с генерацией сигналов в моделях

Спектральное представление любого сигнала



4. Методы параметрической оптимизации

Для параметрической оптимизации существует множество **расстояний.** Пусть два объекта X и S заданы соответствующими множествами признаков -

$$\{x_1,\ldots,x_n\} \text{ и } \{s_1,\ldots,s_n\}.$$

Тогда расстояние между точками можно определить

как Евклидово расстояние:

$$r(X,S)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-s_i)^2},$$

как расстояние Минковского:

$$r(X,S)=\sqrt[\lambda]{\sum_{i=1}^{n}(x_i-s_i)^{\lambda}}.$$

Расстояние между модулями соответствующих разностей:

$$r(X,S)=\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-s_i\right|,$$

которое также не абсолютно в силу следующих обстоятельств:

- во-первых, модуль является неалгебраическим выражением, что делает практически невозможным решение задачи в функциональном смысле,

- во-вторых, размерность признаков при такой схеме интеграции должна быть одинакова, что заведомо (при неизвестной природе таких признаков в случае ортогонального разложения) доказать трудно.

Для ослабления второго ограничения можно использовать либо весовую схему участия каждой разницы, либо использовать расстояние по Камберру:

$$r(X,S)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left|x_i-s_i\right|}{\left|x_i+s_i\right|}$$

4. Методы параметрической оптимизации

Алгоритм покоординатного спуска

Исходные данные:

(u_i^k, y_k), *где* $u^k - m+1$ *мерный вектор*, $y_k \in \{0,1\}$

И коэффициент скорости обучения $\beta = [0 \,..\, 1]$

И выходной параметр: $w \in R^{m|1}$ $w = (w_0, ..., w_m)$

Шаг 0: проинициализировать весовые коэффициенты w_i, для $i = 0...m$, небольшими случайными значениями. Положить $k = 1$.

Шаг 1: Подать на вход функции обучающий вектор u^k и вычислить его выход вектор y.

Шаг 2: Если $y = y^k$, то есть выход правильный, то перейти к шагу 4. В противном случае вычислить ошибку $d = y_k - y$.

Шаг 3: Весовые коэффициенты модифицируются по формуле: $w_i = w_i + \beta \cdot d \cdot u_i^k$

Шаг 4: $k = k + 1 - N[k / N]\ goto 1$.