

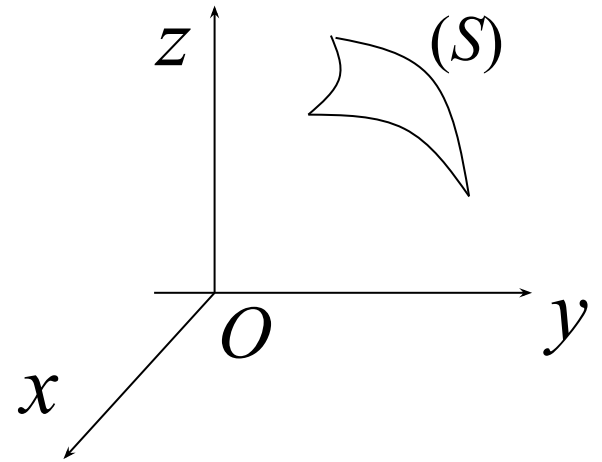
**Лекция 2.** Плоскость как поверхность первого порядка. Уравнения плоскости и их исследование. Прямая в пространстве, взаимное расположение прямых в пространстве, плоскости и прямой в пространстве. Прямая на плоскости, уравнения прямой на плоскости, расстояние от точки до прямой на плоскости. Кривые второго порядка; вывод канонических уравнений, исследование уравнений и построение кривых. Поверхности II порядка, исследование канонических уравнений поверхностей. Метод сечений.

# Элементы аналитической геометрии

## § 1. Плоскость.

Имеем  $OXYZ$  и некоторую поверхность  $S$

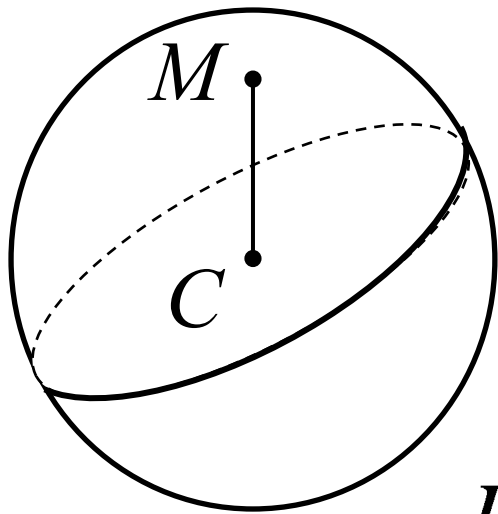
$$F(x,y,z) = 0$$



**Определение 1:** уравнение с тремя переменными называется **уравнением поверхности  $S$  в пространстве**, если этому уравнению удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности и не удовлетворяют координаты ни одной точки не лежащей на ней.

## Пример.

Уравнение  $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$  ( $R > 0$ ) определяем сферу с центром в точке  $C(a, b, c)$  и радиусом  $R$ .



$M(x, y, z)$  – переменная  
точка  $M \in (S) \Leftrightarrow |CM| = R$

$$R = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

**Определение 2:** Поверхность  $S$  называется поверхностью  $n$ -того порядка, если в некоторой декартовой системе координат она задается алгебраическим уравнением  $n$ -той степени

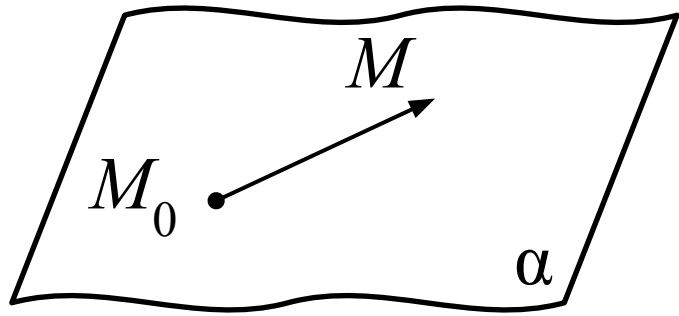
$$F(x,y,z) = 0 \quad (1)$$

В примере ( $S$ ) - окружность, поверхность второго порядка.

Если  $S$  - поверхность  $n$ -того порядка, то  $F(x,y,z)$  - многочлен  $n$ -той степени относительно  $(x,y,z)$

Рассмотрим единственную поверхность 1-го порядка – **плоскость**.

Составим уравнение плоскости проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , с вектором нормали  $\vec{n} = (A, B, C)$



Пусть  $M(x,y,z)$  - это произвольная (текущая) точка плоскости.

$$M \in \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}, \text{ где } \vec{n} \perp \alpha.$$

$$(\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}) = 0$$

или в координатной форме:

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2) - уравнение плоскости проходящей через точку  $M$  с данным вектором нормали  $\vec{n}$

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(-Ax_0 - By_0 - Cz_0)}_D = 0$$

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \quad (*)$$

$Ax + By + Cz + D = 0$  (3) - полное уравнение  
плоскости

### **Неполное уравнение плоскости.**

Если в уравнении (3) несколько коэффициентов (но не  $A, B, C$  одновременно) = 0, то уравнение называется неполным и плоскость  $\alpha$  имеет особенности в расположении.

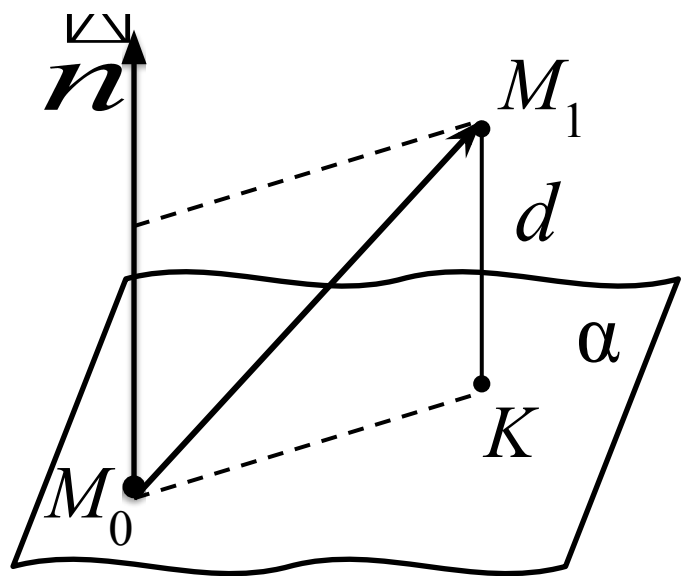
**Например** если  $D = 0$ , то  $\alpha$  проходит через начало координат.

# Расстояние от точки $M_1$ до плоскости $\alpha$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\left( \begin{array}{l} D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \\ M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha \end{array} \right)$$



$$\text{èç (3)} \Rightarrow \vec{n} = (A, B, C)$$

приложим  $\vec{n}$  к точке  $M_0$

$$d = \left| \text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M_1} \right|$$

$$\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_0 M_1} = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1}}{|\vec{n}|}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) =$$

$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ - расстояние от точки } M_1 \text{ до плоскости } \alpha$$

## Уравнение плоскости «в отрезках»

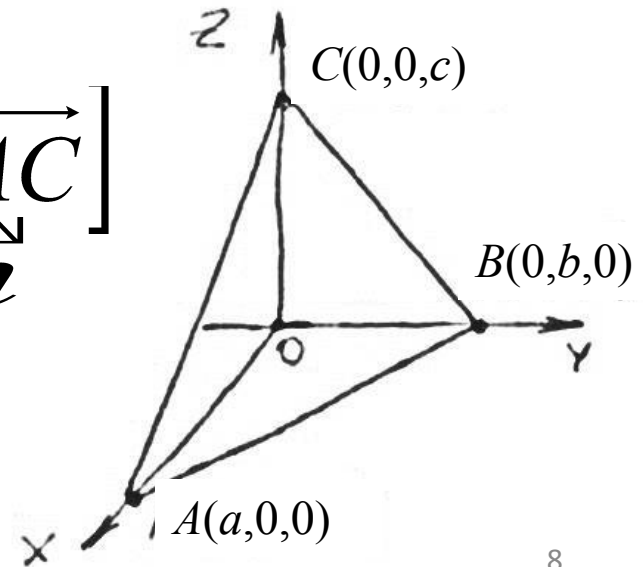
Составим уравнение плоскости отсекающей на координатных осях ненулевые отрезки с

величинами  $a, b, c$  ( $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ )

В качестве  $\vec{n}$  возьмем  $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$

Составим уравнение для т.  $A$  с  $\vec{n}$

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$$





$$\left[ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = \vec{i}bc + \vec{j}ac + \vec{k}ab$$

$$\boxtimes \vec{n} = (bc, ac, ab)$$

$bc(x - a) + ac(y - 0) + ab(z - 0) = 0$  - уравнение

$$bcx + acy + abz = abc$$

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

- уравнение  
плоскости  $\alpha$   
"в отрезках"

плоскости,  
проходящей  
через точку  $A$ ,  
перпенди-  
кулярно  
вектору  
нормали  $\vec{n}$  <sup>9</sup>

## §2. Общее уравнение прямой.

Прямую в пространстве можно задать пересечением 2-х плоскостей.

$$\alpha_1 \cap \alpha_2 = h$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \text{ уравнение} \\ \text{прямой} \end{array}$$

Система вида (1) определяет прямую в пространстве, если коэффициенты  $A_1, B_1, C_1$  одновременно непропорциональны  $A_2, B_2, C_2$ .

# Параметрические и канонические уравнения прямой

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{s} = (m, n, p)$$

$M(x, y, z)$  - произвольная точка прямой

точка  $M \in \alpha \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$

$$\exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{M_0M} = \vec{s}t \quad (2)$$

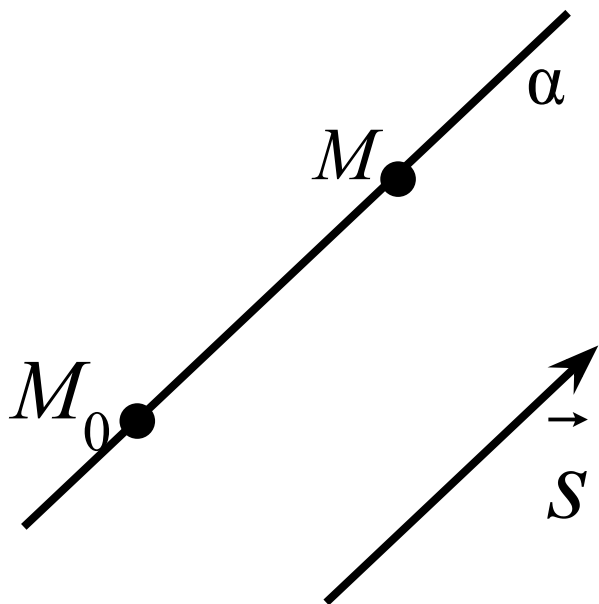
$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\vec{s}t = (mt, nt, pt)$$

Параметрическое уравнение

$$\begin{cases} x - x_0 = mt \\ y - y_0 = nt \\ z - z_0 = pt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} (3),$$

$$t \in ]-\infty; +\infty[ \quad t - \text{параметр}$$



Исключив  $t$  получим:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (4) - \text{каноническое уравнение}$$

Система (3) определяет движение материальной точки, прямолинейное и равномерное из начального положения  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  со скоростью

$$V = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$

в направлении вектора  $\vec{S}$ .

# Расстояние от точки до прямой

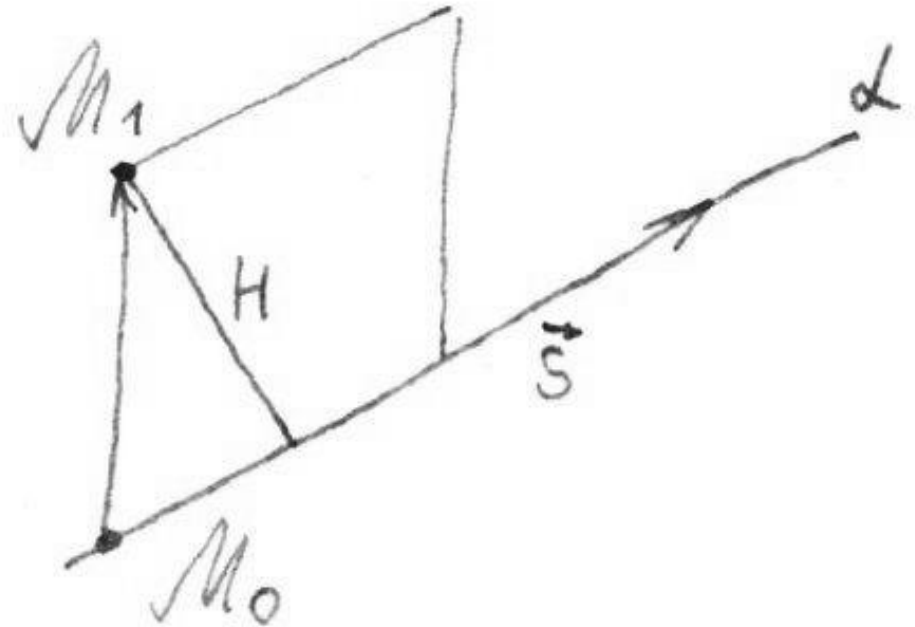
$$M_1(x_1, y_1, z_1)$$

$\alpha$

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{s} = (m, n, p)$$

$$H = \frac{\vec{s} \square}{|\vec{s}|} = \frac{\left| \left[ \overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s} \right] \right|}{|\vec{s}|}$$



-расстояние от точки  $M_1$   
до прямой  $\alpha$

## Угол между прямыми в пространстве.

### Условия параллельности и перпендикулярности.

Пусть в пространстве две прямые  $L_1$ ,  $L_2$  заданы своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

Тогда задача определения угла между этими прямыми сводится к определению угла  $\phi$  между

их направляющими векторами:

$$\bar{q}_1 = (l_1; m_1; n_1), \bar{q}_2 = (l_2; m_2; n_2)$$

Пользуясь определением скалярного

произведения  $\bar{q}_1 \bar{q}_2 = |\bar{q}_1| |\bar{q}_2| \cos \varphi$  и  
выражением в координатах указанного  
скалярного произведения и длин векторов  $q_1$  и  
 $q_2$ , получим для нахождения  $\varphi$ :

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} = \frac{\bar{q}_1 \bar{q}_2}{|\bar{q}_1| |\bar{q}_2|}$$

**Условие параллельности** прямых  $l_1$  и  $l_2$  соответствует коллинеарности  $\square q_1$  и  $\square q_2$ , заключается в пропорциональности координат этих векторов, т.е. имеет вид:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

**Условие перпендикулярности** следует из определения скалярного произведения и его равенства нулю (при  $\cos \phi = 0$ ) и имеет вид:

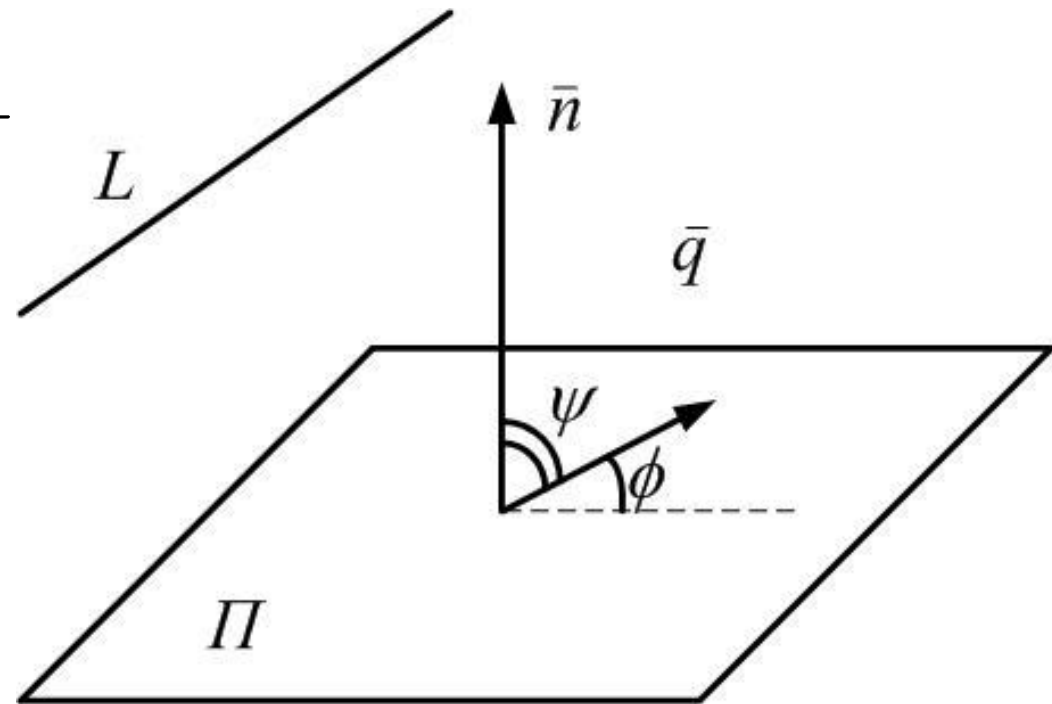
$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$



# Угол между прямой и плоскостью: условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Рассмотрим плоскость  $\Pi$ , заданную общим уравнением:  $Ax + By + Cz + D = 0$ , и прямую  $L$ , заданную каноническим уравнением:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$



Т.к. угол  $\phi$  между прямой  $L$  и плоскостью  $\Pi$  является дополнительным к углу  $\psi$  между направляющим вектором прямой  $\vec{q} = (l, m, n)$  и нормальным вектором плоскости  $\vec{n} = (A, B, C)$ , то из определения скалярного произведения  $\vec{q} \cdot \vec{n} = |\vec{q}| |\vec{n}| \cos \phi$  и равенства  $\cos \psi = \sin \phi$  ( $\phi = 90 - \psi$ ), получим:

$$\sin \phi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{q}}{|\vec{n}| |\vec{q}|} = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

**Условие параллельности** прямой  $L$  и плоскости  $\Pi$  (включающее в себя принадлежность  $L$  к  $\Pi$ ) эквивалентно условию перпендикулярности векторов  $\vec{q}$  и  $\vec{n}$  и выражается = 0 скалярного произведения этих векторов:  $\vec{q} \cdot \vec{n} = 0$ :

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

**Условие перпендикулярности** прямой  $L$  и плоскости  $\Pi$  эквивалентно условию параллельности векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{q}$  и выражается пропорциональностью координат этих векторов:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

## Условия принадлежности двух прямых к одной плоскости

Две прямые в пространстве  $L_1$  и  $L_2$  могут:

- 1) пересекаться;
- 2) быть параллельными;
- 3) скрещиваться.

В первых двух случаях прямые  $L_1$  и  $L_2$  лежат в одной плоскости.

Установим условие принадлежности к одной плоскости двух прямых, заданных каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

Очевидно, что для принадлежности двух указанных прямых к одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы три вектора  $\vec{M_1M_2}, \vec{M_1A_1}, \vec{M_1A_2}$  были компланарны, для чего в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение указанных трех векторов  $= 0$

$\square q_1 = (l_1, m_1, n_1)$  и  $\square q_2 = (l_2, m_2, n_2)$ , были компланарны, для чего в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы смешанное произведение указанных трех векторов  $= 0$

Записывая смешанные произведения указанных векторов в координатах получаем необходимое и достаточное условие принадлежности двух прямых  $L_1$  и  $L_2$  к одной плоскости:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

# Условие принадлежности прямой к плоскости

Пусть есть прямая

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

и плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

Эти условия имеют вид:

$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$  и  $Al + Bm + Cn = 0$ ,  
первое из которых означает, что точка  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  
через которую проходит прямая, принадлежит плоскости,  
а второе – условие параллельности прямой и плоскости.

## Кривые второго порядка.

### § 1. Понятие об уравнении линии на плоскости.

Уравнение  $f(x, y) = 0$  называется уравнением линии  $L$  в выбранной системе координат, если ему удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней.

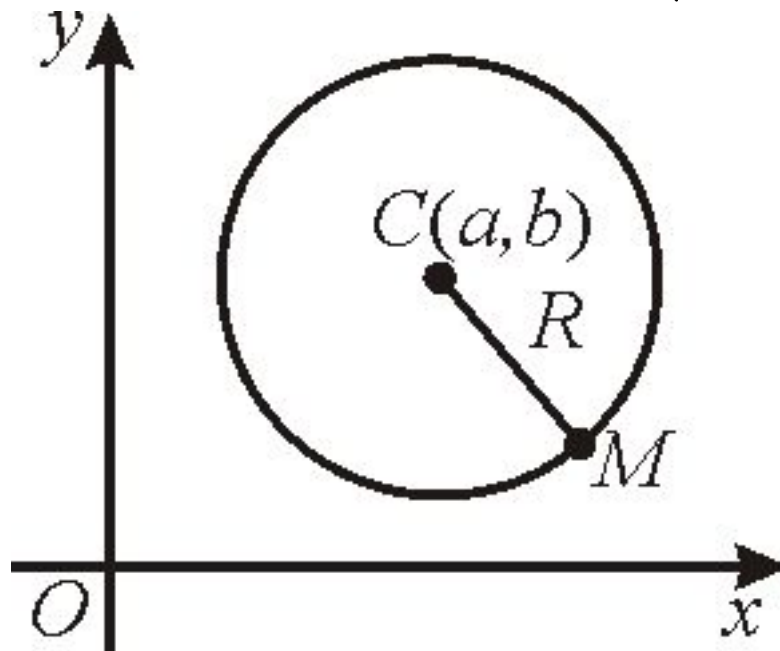




**Пример:**  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  ( $R > 0$ ) –  
уравнение окружности радиуса  $R$  и центром в  
точке  $C(a, b)$ .

Если 1.)  $\forall M(x, y) \in O \Rightarrow |CM| = R$

2.)  $\forall M(x, y) \notin O \Rightarrow |CM| \neq R$



Линия  $L$  называется линией  $n$ -того порядка, если в некоторой декартовой системе координат она задается алгебраическим уравнением  $n$ -той степени относительно  $x$  и  $y$ .

Мы знаем единственную линию 1-го порядка – прямую:  $Ax + By + D = 0$

Мы будем рассматривать кривые 2-го порядка: эллипс, гиперболу, параболу.

Общее уравнение линий 2-ого порядка имеет вид:

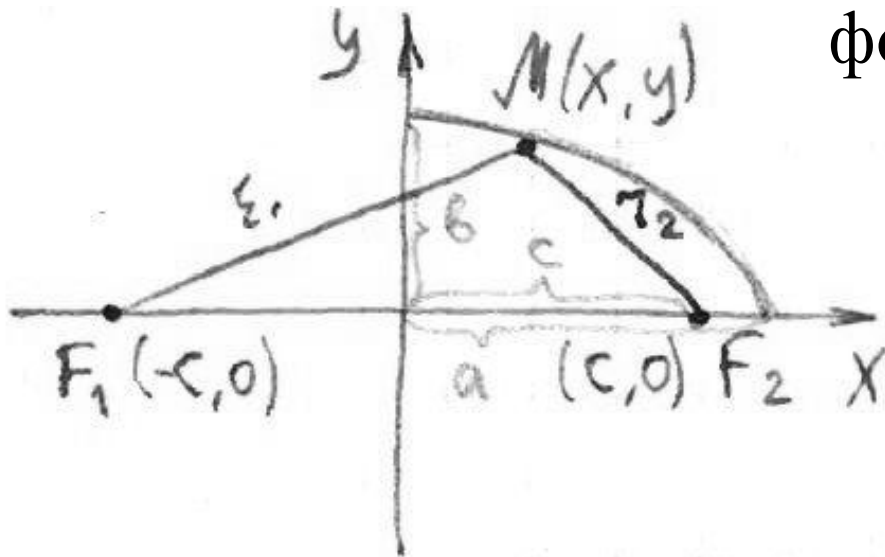
$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

# Эллипс (Э)

**Определение. Эллипс** – множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух фиксированных точек плоскости  $F_1$  и  $F_2$ , называемых фокусами, есть величина постоянная и большая расстояния между фокусами.

Обозначим постоянную  $2a$ , расстояние между фокусами  $2c$  ( $a > c, a > 0, c > 0$ ).

Проведем ось  $X$  через фокусы, ось  $Y$  через середины фокусного расстояния.



Пусть  $M$  – произвольная точка эллипса,

т.  $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow r_1 + r_2 = 2a$  (1),  
где  $r_1, r_2$  – фокальные радиусы Э.

Запишем (1) в координатной форме:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (2)$$

Это уравнение эллипса в выбранной системе координат.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (3)$$

Упрощая (2) получим :

$$b^2 = a^2 - c^2$$

(3) – каноническое уравнение эллипса.

Можно показать, что (2) и (3) эквивалентны:

$$\sqrt{y^2 - b^2} + \sqrt{b^2 + y^2} = \sqrt{y+b} \left( \sqrt{y-b} + \sqrt{y+b} \right) = 2a$$

# Исследование формы эллипса по каноническому уравнению

1) Эллипс – кривая 2-го порядка

2) Симметрия эллипса.

т.к.  $x$  и  $y$  входят в (3) лишь в четных степенях, то эллипс имеет 2 оси и 1 центр симметрии, которые в выбранной системе координат совпадают с выбранными осями координат и точкой  $O$ .

$$y + b(y - b + 2(y - b) + y + b) = 4a^2 \quad y + b(4y + 2b)$$
$$y + 4by + 2b^2 = 2b(2y + b) + y$$

### 3) Расположение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}; \quad x^2 \leq a^2; \quad |x| \leq a; \quad |y| \leq b,$$

Т.е. весь Э расположен внутри прямоугольника, стороны которого  $x = \pm a$  и  $y = \pm b$ .

### 4) Пересечение с осями.

$$\text{С } OX: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; & x^2 = a^2 \\ y = 0; & x = \pm a \end{cases}$$

$$A_1(-a;0); \quad A_2(a;0);$$

***вершины эллипса***

$$\text{С } OY: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}; & y^2 = b^2 \\ x = 0; & y = \pm b \end{cases}$$

$$B_1(0;b); \quad B_2(0;-b);$$

В силу симметрии эллипса рассмотрим его поведение ( $\uparrow\downarrow$ ) лишь в I четверти.

Разрешив (3) относительно  $y$  получим:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2}} < 0, \quad \text{т.е.}$$

в I четверти  $x > 0$  и эллипс убывает.

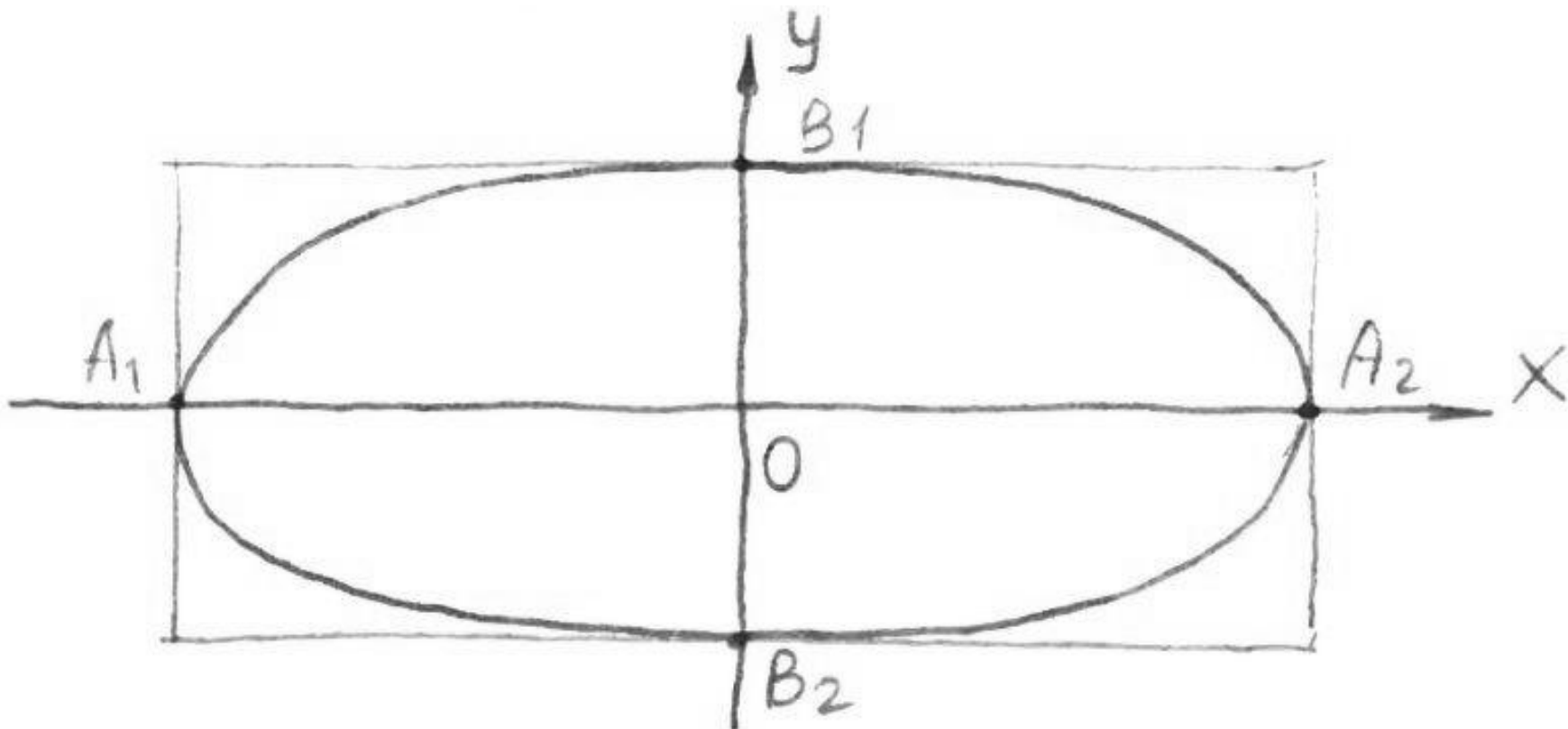
**Вывод:** Э – замкнутая кривая, овальная, имеющая четыре вершины.

### **План построения Э.**

- 1) Строим прямоугольник со сторонами  $2a$ ,  $2b$
- 2) Вписываем выпуклую овальную линию

$$y^2 = b^2 - \frac{x^2 b^2}{a^2} = \left( \frac{b - xb}{a} \right) \cdot \left( \frac{b + xb}{a} \right) = \left( \frac{b(a - x)}{a} \right) \left( \frac{b(a + x)}{a} \right) = \left( \frac{b}{a} \right)^2 \cdot (a^2 - x^2)$$

# Построение эллипса





# Гипербола (Г)

Определение :  $\Gamma$  – множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний которых до 2-х фиксированных точек плоскости  $F_1, F_2$  есть величина постоянная и  $<$  этого расстояния.

$$2a, |F_1 F_2| = 2c$$

Выберем систему координат.

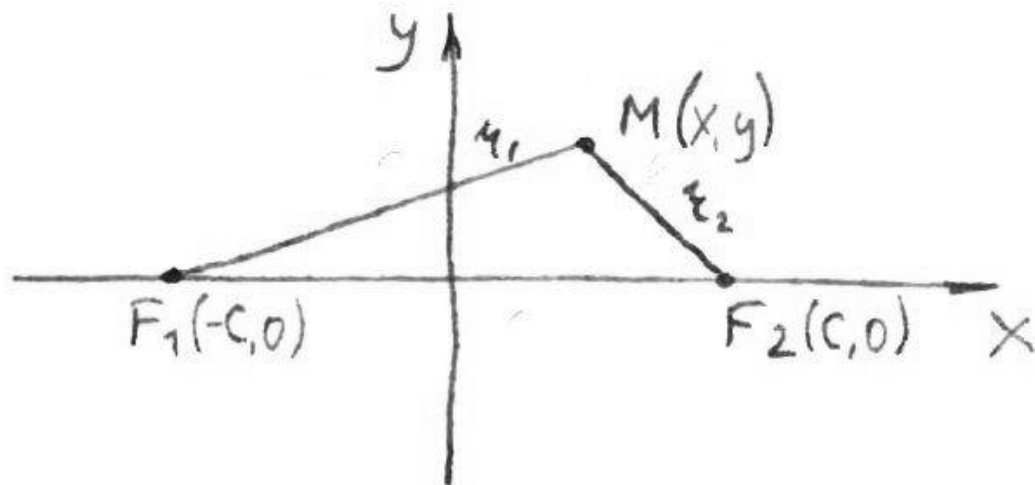
точка  $M \in \Gamma \Leftrightarrow |r_1 - r_2| = 2a$

$$r_1 - r_2 = \pm 2a$$

В координатной форме:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \quad (1)$$

(1) – уравнение  $\Gamma$  в выбранной системе координат



Упрощая (1):  $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$  (2)  $b^2 = c^2 - a^2$

(2) – каноническое уравнение Г.

(1) и (2) – эквивалентны.

## Исследование гиперболы по каноническому уравнению

1) Г- линия 2-го порядка

2) Г имеет две оси и один центр симметрии, которые в нашем случае совпадают с координатными осями и началом координат.

3) Расположение гиперболы.

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \quad x^2 \geq a^2 \quad |x| \geq a$$

$\begin{matrix} \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \\ & \geq 1 & \end{matrix}$

Гипербола расположена вне полосы между прямыми  $x = a, x = -a$ .

4) Точки пересечения с осями.

$$OX: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; & x = \pm a \\ y = 0; \end{cases}$$

$$OY: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \\ x = 0; \end{cases} \text{ не имеет решений}$$

$A_1(-a;0); A_2(a;0)$  – действительные вершины  $\Gamma$

$B_1(0;b); B_2(0;-b)$  – мнимые вершины  $\Gamma$

$2a$  – действительная ось  $\Gamma$

$2b$  – мнимая ось  $\Gamma$

## 5) Асимптоты гиперболы.

В силу симметрии  $\Gamma$  рассмотрим ее часть в I четверти .  
Разрешив (2) относительно  $y$ , получим:

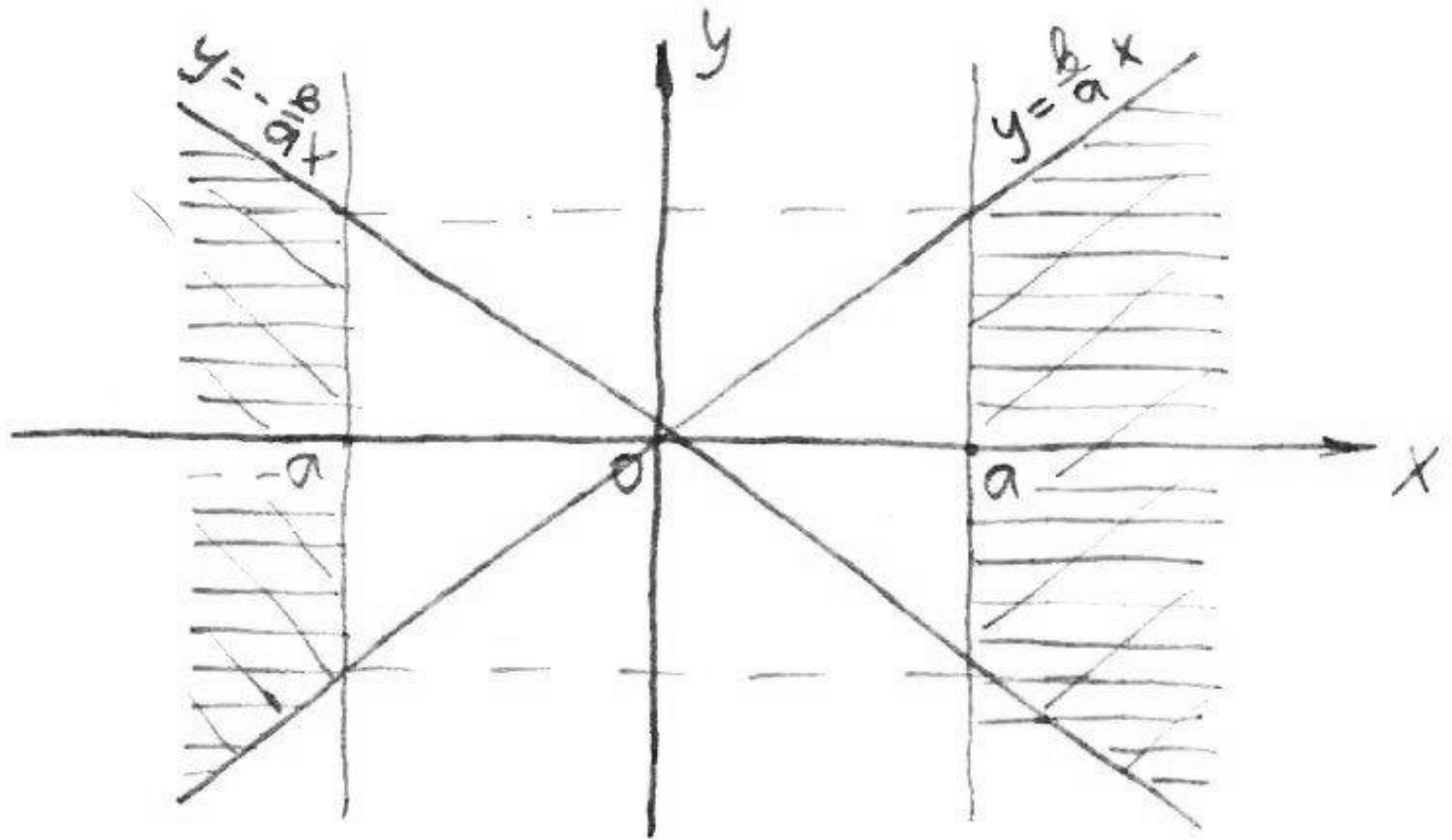
$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{уравнение } \Gamma \text{ в I четверти } x \geq 0$$

Рассмотрим прямую:  $y = \frac{b}{a} \cdot x$

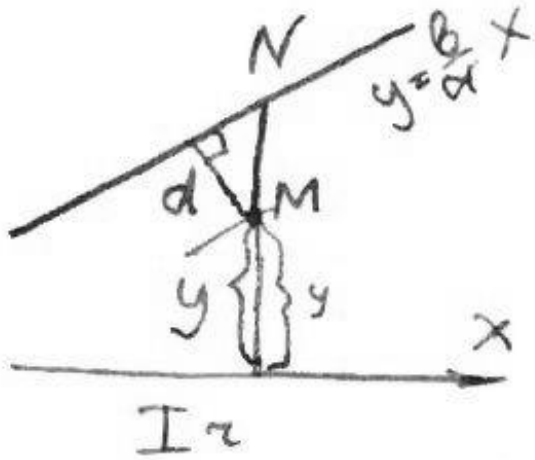
т.к. в I четверти  $x > 0$ , то  $\frac{b}{a} \cdot x > \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$  т.е. в I четверти при одной и той же абсциссе, ордината прямой  $>$  ординаты соответствующей точки  $\Gamma$ , т.е. в I четверти  $\Gamma$  лежит ниже этой прямой.

Вся  $\Gamma$  лежит внутри вертикального угла со сторонами

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$$



Покажем, что при неограниченном удалении от начала координат  $\Gamma$  приближается к прямым  $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$ .



$$d < |MN| \quad (*)$$

$$\begin{aligned} MN &= Y_{-\infty} - y_{+\infty} = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \\ &= \frac{b}{a} \left( x - \sqrt{x^2 - a^2} \right); \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (Y - y) = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |MN| = 0 \quad \text{из } (*) \rightarrow \text{при } x \rightarrow \infty \quad \alpha \rightarrow 0$$

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x - \text{асимптоты } \Gamma$$

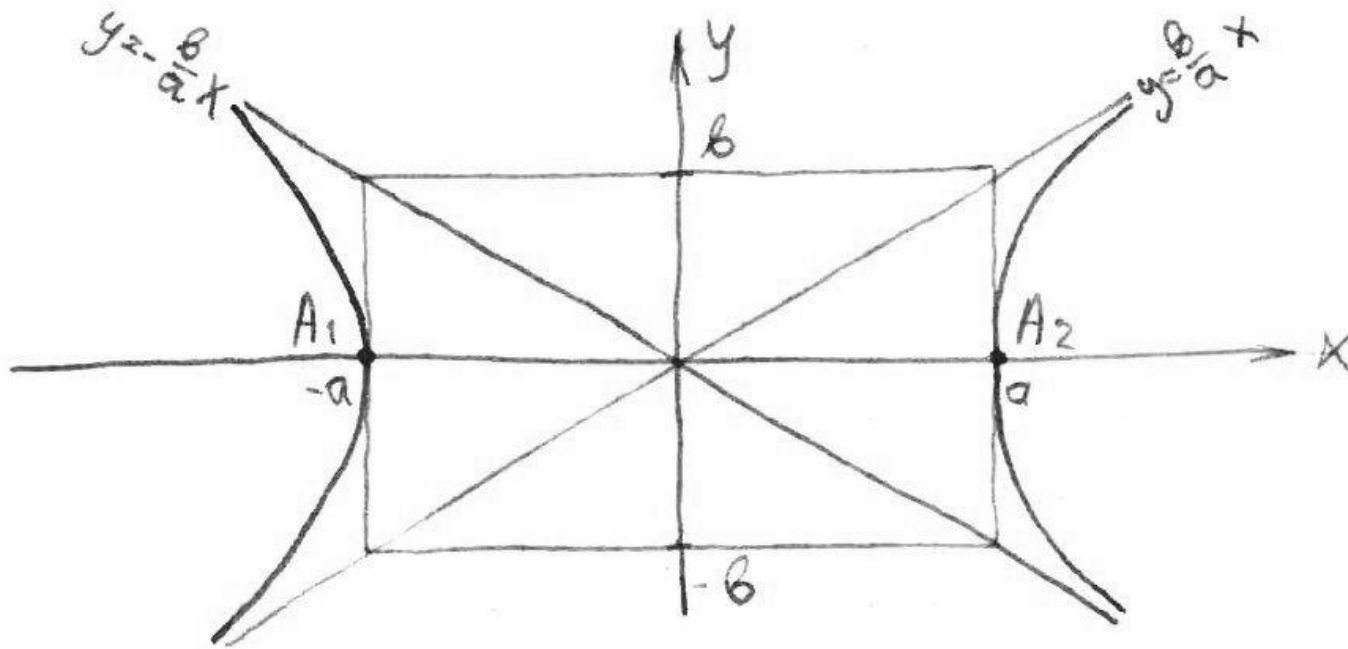
6) Можно показать, что в I ч.  $\Gamma$  возрастает

7) План построения  $\Gamma$

а) строим прямоугольник  $2a, 2b$

б) проводим его диагонали

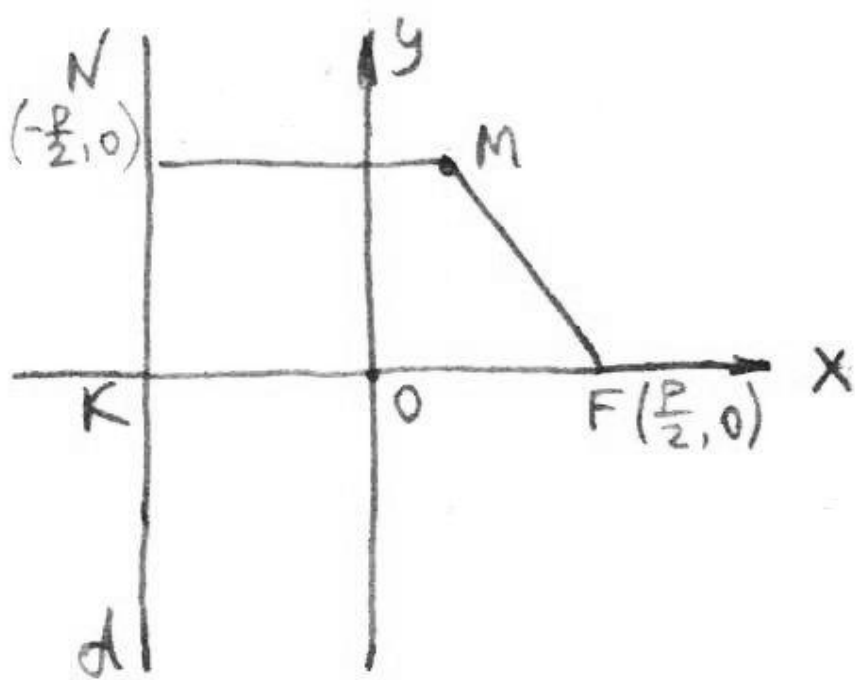
в) отметим  $A_1, A_2$  – действительные вершины  $\Gamma$  и  
впишем эти ветви



## Парабола (П)

Рассмотрим  $d$  (директрису) и  $F$  (фокус) на плоскости.

**Определение. П** – множество всех точек плоскости, равноудаленных от прямой  $d$  и точки  $F$  (фокус)



$d$ -директриса

$F$ -фокус

$XOY$

$$|KF| = p \quad (p > 0)$$

$$Z\left(\frac{p}{2}, 0\right) \quad M(x, y)$$

точка  $M \in \Pi$  тогда,  $|MF| = |MN|$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} \quad (1)$$

уравнение  $\Pi$ , выбранной в системе координат

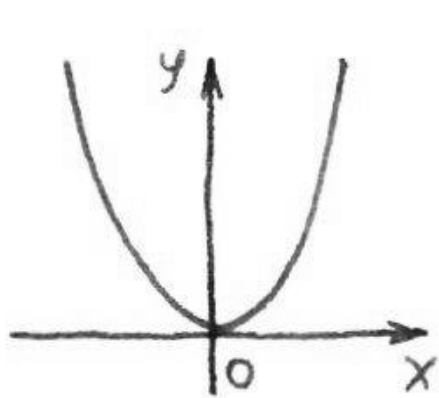
Упрощая (1) получим

$$\boxed{y^2 = 2px} \quad (2) \text{ – каноническое уравнение } \Pi.$$

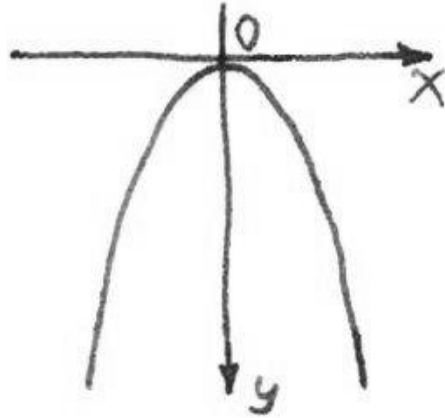
(1) и (2) эквивалентны



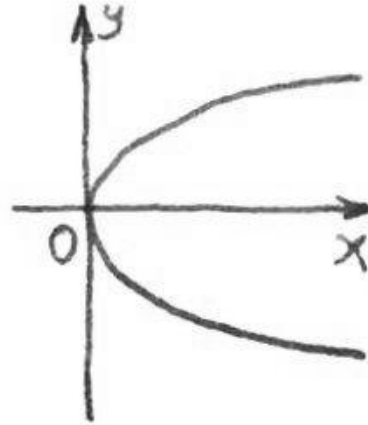
# Исследование II по каноническому уравнению



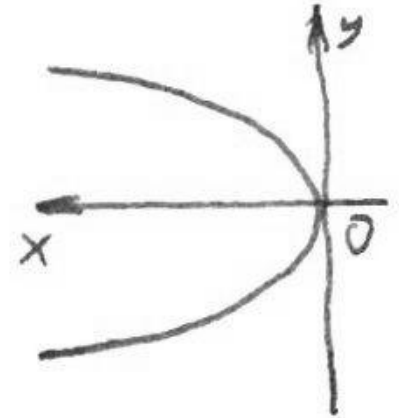
$$x^2 = 2py$$



$$x^2 = -2py$$



$$y^2 = 2px$$



$$y^2 = -2px$$

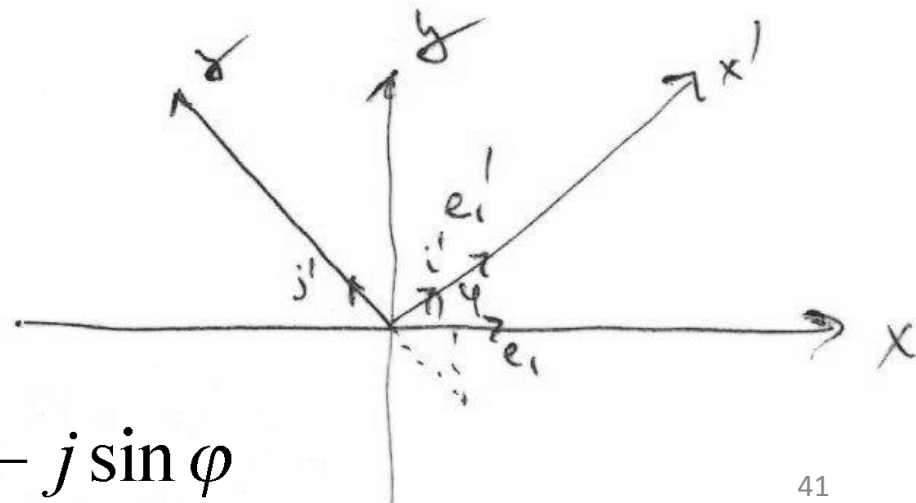
$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

$$e'_1 = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$$

$$xi + yj = (x'i' + y'j') \cdot i$$

$$x = x'(i' \cdot i) + y'(j \cdot i) = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$



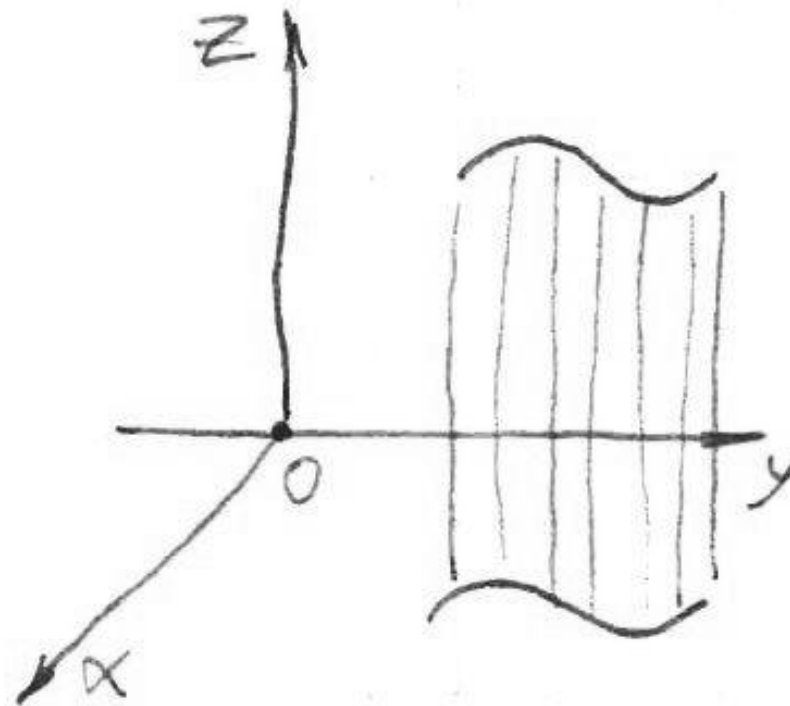
## §4. Цилиндры.

### Цилиндрические поверхности с образующими, параллельными координатным осями

Через точку  $x$  линии  $L$  проведем прямую параллельную оси  $OZ$ . Поверхность, образованная этими прямыми называется цилиндрической поверхностью или цилиндром (Ц).

Любая прямая параллельная оси  $OZ$  называется образующей.

$l$  - направляющая цилиндрической поверхности плоскости  $XOY$ .



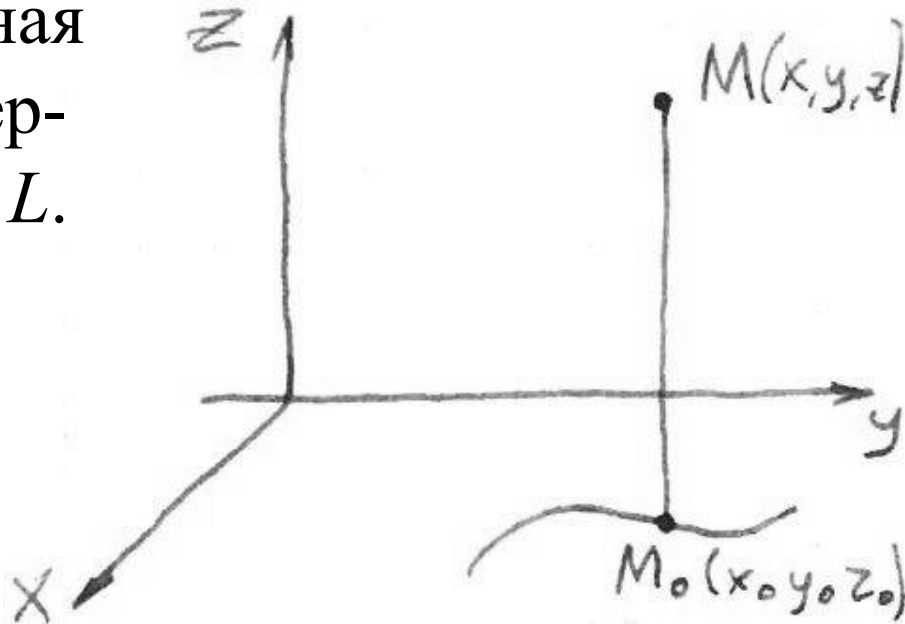
$$Z(x,y) = 0 \quad (1)$$

Пусть  $M(x,y,z)$  – произвольная точка цилиндрической поверхности. Спроецируем ее на  $L$ .

$$M_0 \in L \Rightarrow Z(x_0, y_0) = 0 \quad (2)$$

$$x = x_0 \Rightarrow Z(x, y) = 0 \quad M \in \text{Ц}$$

$$y = y_0 \Rightarrow M_0 \in L$$



то есть координаты  $M$  удовлетворяют (1) очевидно, что если  $M \notin \text{Ц}$ , то она не проектируется в точку  $M_0 \in L$  и следовательно, координаты  $M$  не будут удовлетворять уравнению (1), которое определяет  $\text{Ц}$  с образующей параллельной оси  $OZ$  в пространстве.

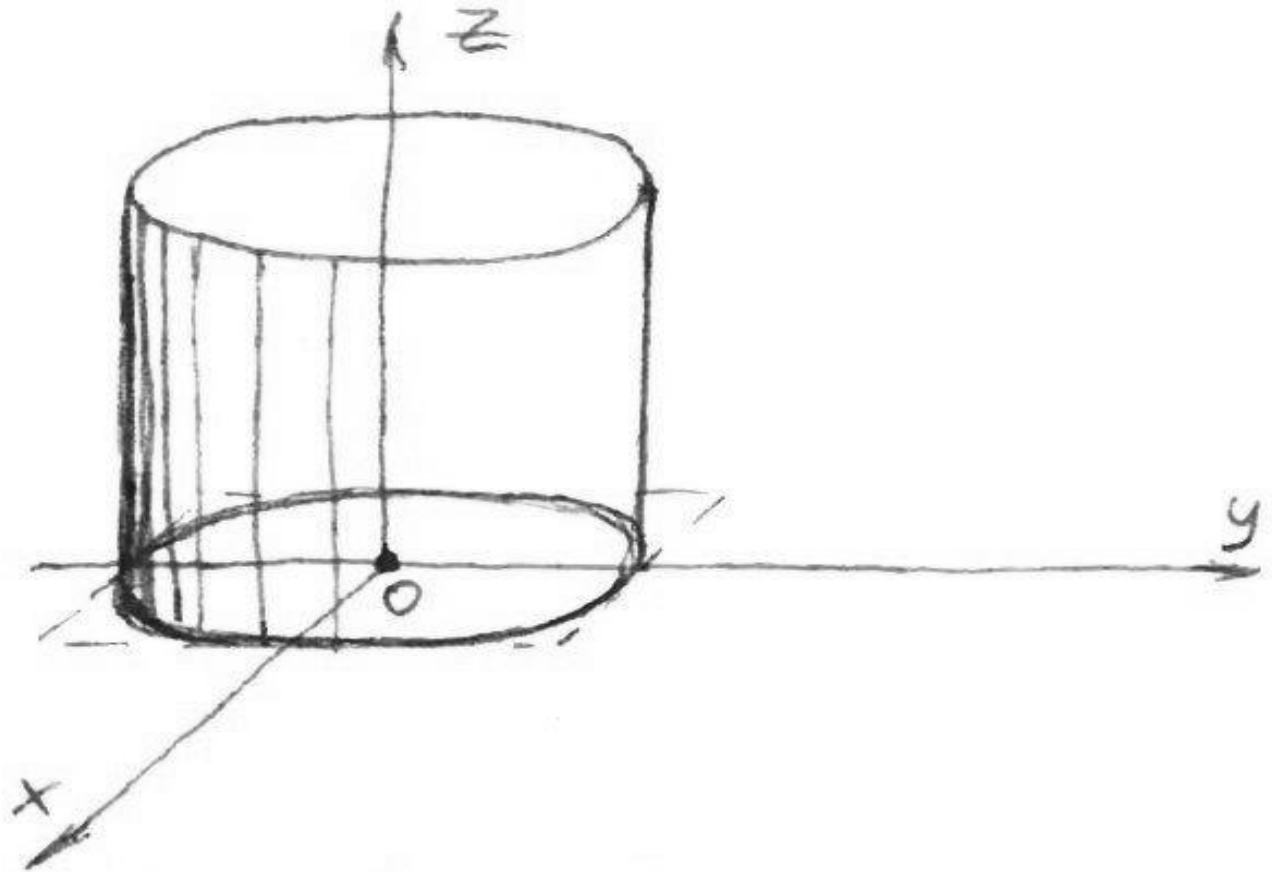
Аналогично можно показать, что :

$\Phi(x,z) = 0$  в пространстве  $\text{Ц} \parallel OY$

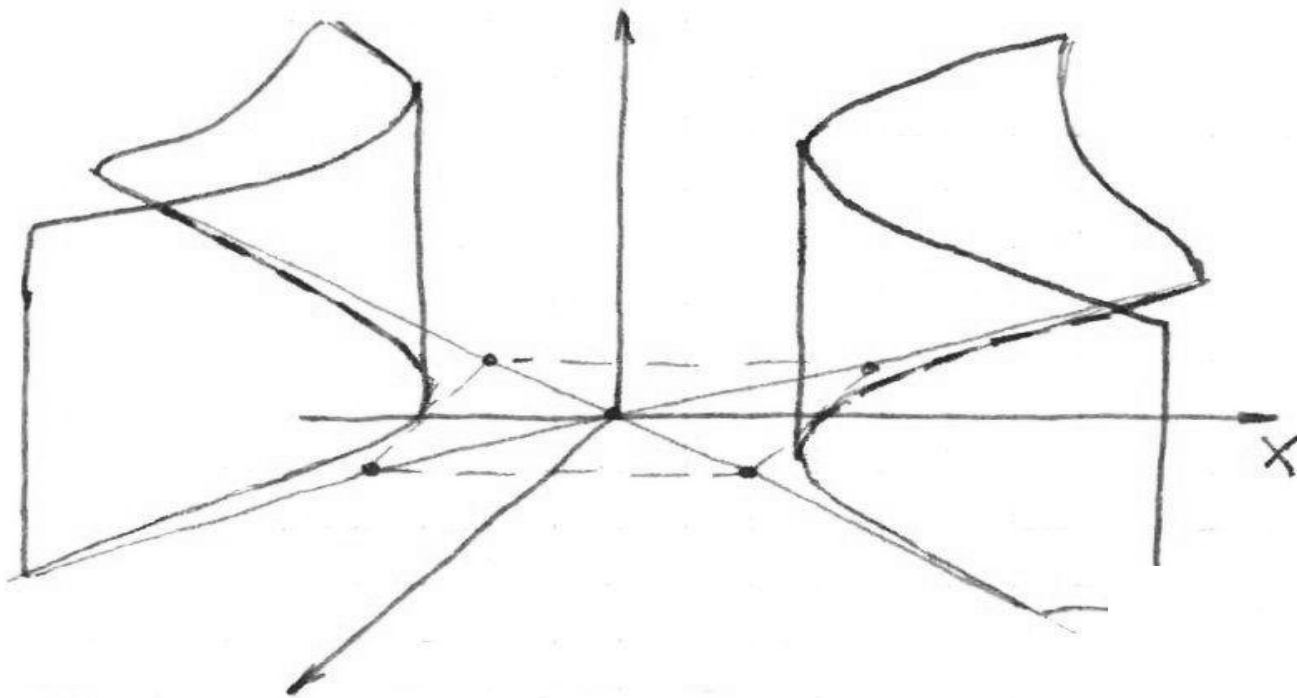
$\phi(y,z) = 0$  определяет в пространстве  $\text{Ц} \parallel OX$

# Примеры цилиндров второго порядка

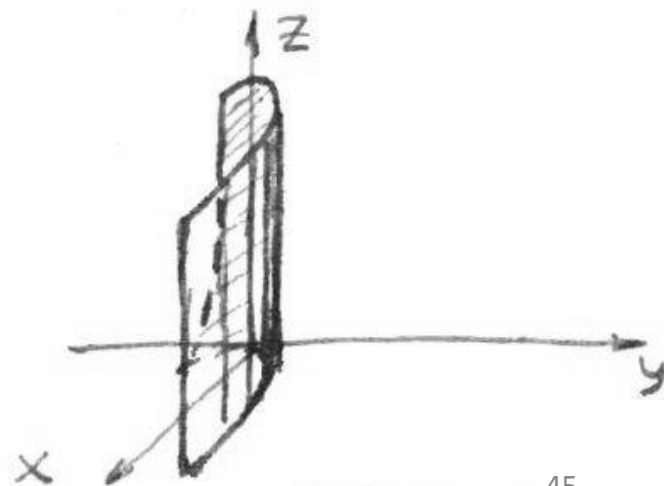
1) Эллиптический  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



2) Гиперболический  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



3) Параболический  $y^2 = 2px$



# Проекция пространственной линии на координатной плоскости

Линию в пространстве можно задать параметрически и пересечением поверхностей. Одну и ту же линию можно задать  $\cap$  различных поверхностей.

Пусть пространственная линия  $L$  задается  $\cap$  двух поверхностей  $\alpha$ :

$$S_1: \Phi_1(x, y, z) = 0$$

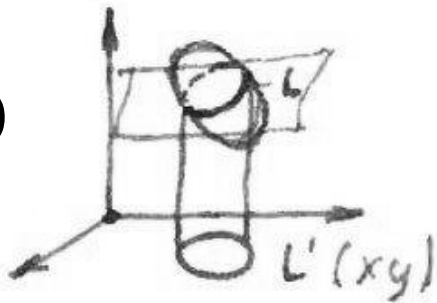
$$S_2: \Phi_2(x, y, z) = 0$$

$$\text{уравнение } L \quad \begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Найдем проекцию  $L$  на плоскость  $XOY$  из уравнения (1) исключаем  $Z$ . Получим уравнение:  $Z(x, y) = 0$  – в пространстве это уравнение  $\square$  с образующей  $\parallel OZ$  и направляющей  $L$ .

Проекция:

$$L'xy \quad \begin{cases} Z(x, y) = 0 \\ Z = 0 \end{cases}$$



## Поверхности второго порядка

Эллипсоид – каноническое уравнение поверхности

имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \begin{pmatrix} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{pmatrix}$$

- 1) Эллипсоид – поверхность второго порядка.
- 2)  $X, Y, Z$  входят в уравнение лишь в четных степенях  $\Rightarrow$  поверхность имеет 3 плоскости и 1 центр симметрии, которые в выбранной системе координат совпадают с координатными плоскостями и началом координат.

### 3) Расположение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \quad x^2 \leq a^2$$
$$|x| \leq a$$

Поверхность заключена между  $\parallel$  плоскостями с уравнениями  $x = a, x = -a$ .

Аналогично  $|y| \leq b, |z| \leq c,$

т.е. вся поверхность заключена внутри прямоугольного параллелепипеда.

$$x = \pm a, y = \pm b, z = \pm c.$$

Будем исследовать поверхность методом сечений –

пересекая поверхность координатными плоскостями и плоскостями  $\parallel$  координатным. В сечении будем получать линии, по форме которых будем судить о форме поверхности.



Пересечем поверхность плоскостью  $XOY$ . В сечении получим линию.

$$L: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow L: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{- эллипс } a \text{ и } b \text{ -} \\ \text{полуоси} \end{array}$$

Аналогично с плоскостью  $YOZ$

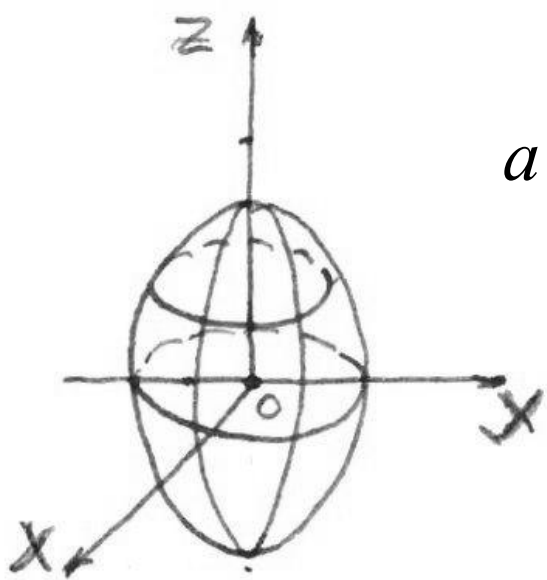
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{-ЭЛЛИПС с} \\ \text{полуосями } b \text{ и } c \end{array}$$

Плоскость  $\parallel XOY$

$$\begin{cases} z = h & |z| \leq c \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \\ z = h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = h \end{cases} \quad \begin{array}{l} a^* = a \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \\ b^* = b \sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \end{array}$$

Если  $h(0, c)$ , то оси эллипса убывают от  $a$  и  $b$  до 0.



$a = b = c$  - сфера

## Параболоиды

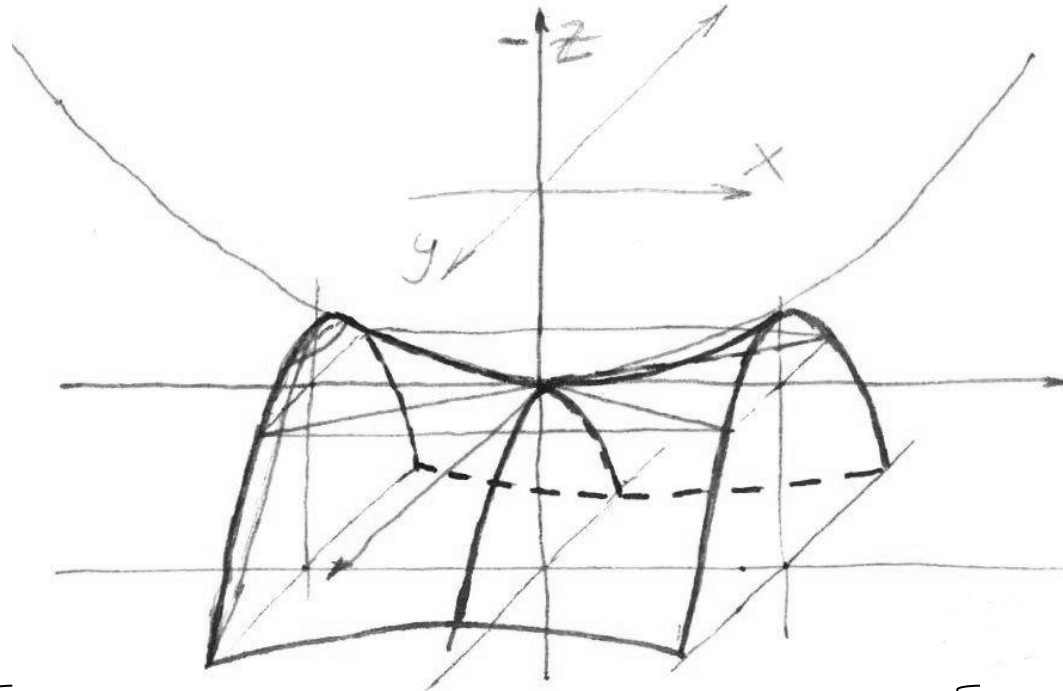
а) Гиперболический параболоид – поверхность с каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad \begin{array}{l} pq > 0 \\ p > 0, q > 0 \end{array}$$

1) Поверхность второго порядка


2) Так как  $x, y$  входят в уравнение лишь в четных степенях, то поверхность имеет плоскости симметрии, которые при данном выборе координат совпадают с плоскостями  $XOZ, YOZ$ .

### 3) исследуем поверхность методом сечения




седло

пл.  $XOZ$   $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 2pz \\ y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{x^2}{2p} \\ y = 0 \end{array} \right.$



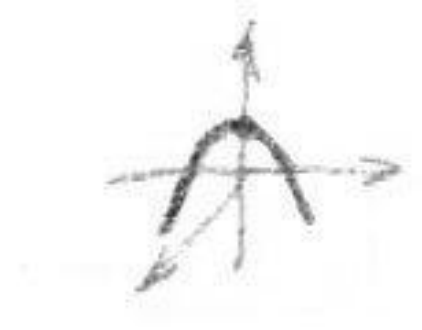
В сечении парабола симметричная оси  $OZ$ , восходящая.

пл.  $YOZ$   $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2 = -2qz \\ x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = -\frac{y^2}{2q} \\ x = 0 \end{array} \right.$



пл.  $\parallel YOZ$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{y^2}{2q} + \frac{h^2}{2p} \\ x = h \end{cases}$$



пл.  $\parallel XOZ$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ y = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{x^2}{2p} - \frac{h^2}{2q} \\ y = h \end{cases}$$



пл.  $XOY$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

В сечении пара прямых, проходящих через начало координат

пл.  $\parallel XOY$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = h \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \\ z = h \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h \end{array} \right.$$

при  $h > 0$  гиперболы, с действительной полуосью вдоль  $OX$ , при  $h < 0$  гиперболы, с действительной полуосью вдоль оси  $Y$ .

## Эллиптический параболоид

$$\boxed{\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z}$$

$$pq > 0$$

1) поверхность второго порядка

$$p > 0, q > 0$$

2) имеет 2 плоскости симметрии, которые совпадают с  $XOZ$  и  $YOZ$

3) левая часть уравнения неотрицательна  $\Rightarrow z \geq 0$ , то есть, вся поверхность расположена над  $XOY$ .

4) исследуем поверхность методом сечения

пл.  $XOY$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad 0(0,0,0)$$

пл.  $\parallel XOY$

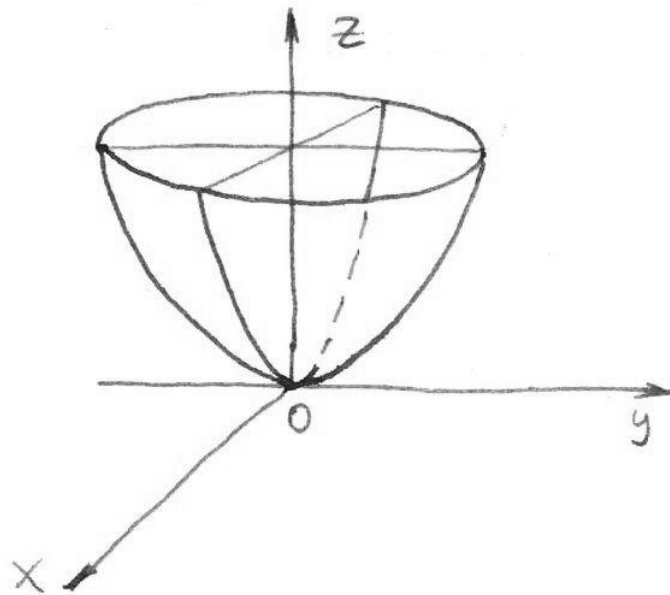
$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ z = h(h \geq 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2ph} + \frac{y^2}{2qh} = 1 \\ z = h \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{эллипс} \\ a^* = \sqrt{2ph}; b^* = \sqrt{2qh} \end{array}$$

пл.  $YOZ$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} y^2 = 2qz \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{парабола восходящая} \\ \text{с вершиной в начале} \\ \text{координат} \end{array}$$

пл.  $XOZ$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{парабола восходящая с} \\ \text{вершиной в начале} \\ \text{координат} \end{array}$$



## Гиперболоиды

а) Однополосный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\begin{pmatrix} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{pmatrix}$$

- 1) поверхность второго порядка
- 2) имеет 3 плоскости и 1 центр симметрии
- 3) метод сечений

пл.  $XOY$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{в сечении эллипс с} \\ \text{полуосями } a \text{ и } b - \\ \text{горловой} \end{array}$$

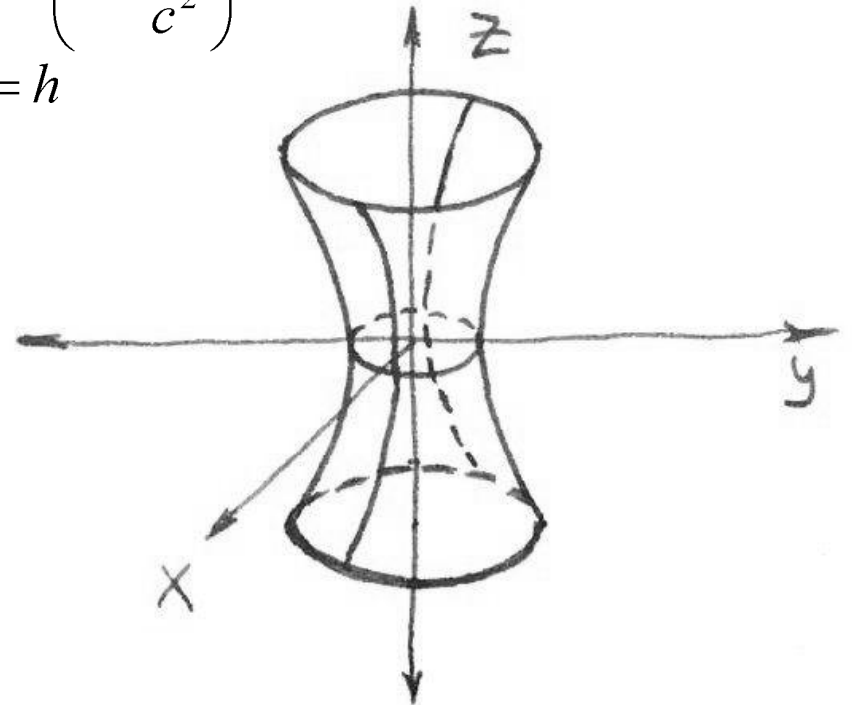
пл.  $\parallel XOY$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = h \\ z = h \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \\ z = h \end{array} \right.$$

$$a^* = a \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$$

$$b^* = b \sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$$

при  $|h| \rightarrow \infty$  от  $a$  и  $b$  до  $\infty$ .





## б) Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

1) поверхность второго порядка

2) имеет 3 плоскости и 1 центр симметрии

3) расположение поверхности

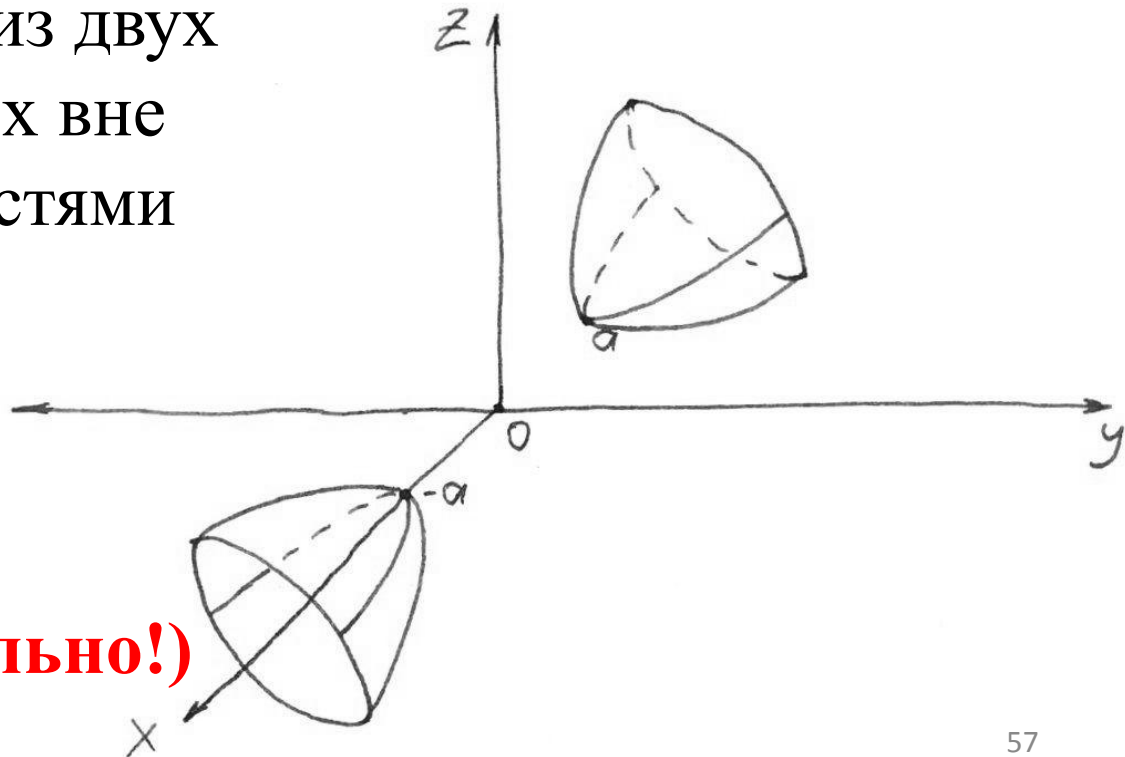
$$x^2 \geq a^2 ; |x| \geq a ; (a, b, c > 0)$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

Поверхность состоит из двух частей, расположенных вне полосы между плоскостями с уравнениями

$$x = a, x = -a$$

4) исследуем методом сечений **(Самостоятельно!)**



# Конус второго порядка

Конусом второго порядка называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$(a, b, c > 0) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

- 1) поверхность второго порядка
- 2) имеет 3 плоскости и 1 центр симметрии
- 3) исследуем методом сечений  
пл.  $XOY$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \end{array} \right. \quad O(0,0,0)$$

пл.  $\|XOY$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = h \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = h \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z = h \\ \frac{x^2}{a^2 \cdot \frac{h^2}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2 \cdot \frac{h^2}{c^2}} = 1 \end{array} \right.$$

$$a^* = a \frac{|h|}{c} \quad b^* = b \frac{|h|}{c} \quad |h| \rightarrow \infty \text{ от } 0 \text{ до } \infty$$

пл.  $YOZ$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \left( \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) \left( \frac{y}{b} - \frac{z}{c} \right) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \\ x = 0 \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \end{array} \right.$$

пара прямых, проходящих через начало координат

пл.  $XOZ$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \\ y = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{пара прямых,} \\ \text{проходящих через} \\ \text{начало координат} \end{array}$$

