Раздел 1. Функции многих переменных

§ 1. Определение. Геометрический смысл.

Определение 1. Если каждой упорядоченной паре действительных чисел $(x,y) \in D$ по некоторому закону f поставлено, в соответствие хотя бы одно действительное число $z \in E$, то говорят, что задана функция $z = f(x,y)$ - функция 2-х переменных, при этом

D - область определения

E - область изменения (значения) функции.

Рассмотрим 3-х мерное пространство. Если точкам области поставить в соответствие точки в пространстве то все точки будут образовывать поверхность, которая проектируется в область D.

Геометрический смысл – это поверхность в 3-х мерном пространстве.

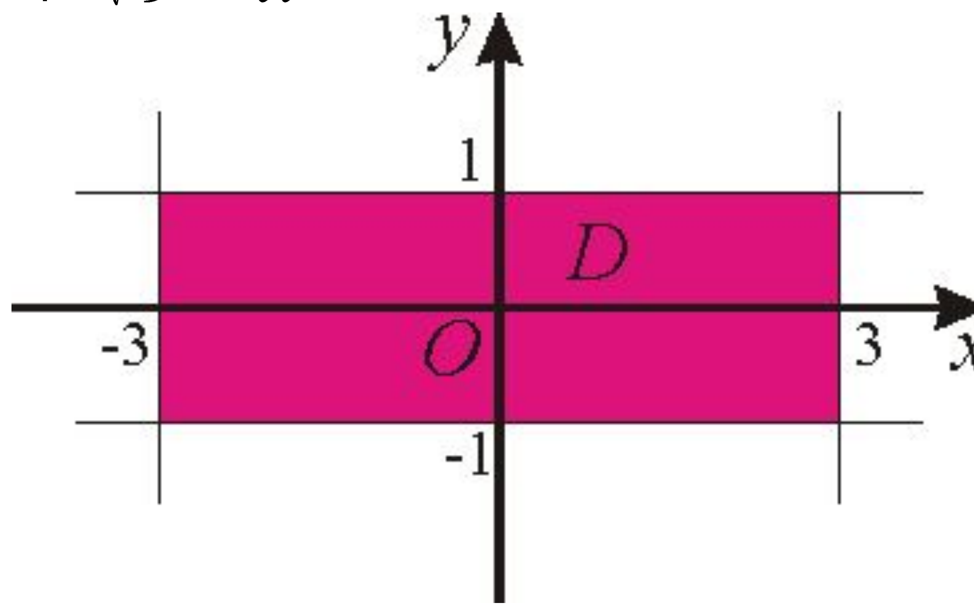
Определение 2. Если каждому упорядоченному набору действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ ставится по некоторому закону f в соответствие действительное число $z \in E$, то говорят, что задана функция $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - функция многих переменных (ФМП)

Замечание. Если ФМП задается аналитически, то под D понимают все те значения, при которых она имеет смысл.

Например: $z = \sqrt{1 - y^2} + \sqrt{9 - x^2}$

$$\begin{cases} y^2 \le 1 \\ x^2 \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| \le 1 \\ |x| \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ -3 \le x \le 3 \end{cases}$$



Для нахождения D ФМП приходится решать системы неравенств.

Замечание. Для ФМП с числом переменных > 2 нет геометрического аналога.

§ 2. Предел функции многих переменных. Непрерывность функции многих переменных.

Определение3. Число A называется пределом функции $z = f(x,y)$ в точке (x_0,y_0), если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$

$$\left(0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow \left| f(x, y) - A \right| < \varepsilon\right)$$

При этом пишут:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A$$

Замечание. Предел функции в точке не зависит от того, каким образом x и y стремятся к x_0 и y_0.

Согласно этому замечанию при вычислении пределов поступают следующим образом:

если предел зависит от способа приближения к точке (x_0,y_0), то в этом случае говорят, что предел не существует; если предел не зависит от способа стремления к точке (x_0,y_0), то предел существует.

<u>Определение 4.</u> Функция $z = f\,(x,y)$ называется бесконечно малой при $(x,y) \to (x_0,y_0)$, если $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$

$$\left(0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow \left|f(x,y)\right| < \varepsilon\right)$$

т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = 0$

<u>Определение 5.</u> Функция $z = f\,(x,y)$ называется бесконечно малой при $(x,y) \to (x_0,y_0)$, если $\forall\ \varepsilon > 0$

$$\left(0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow \left|f(x,y)\right| > \varepsilon\right)$$

т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\infty$

Определение 6. Функция $z = f(x,y)$ называется непрерывной в точке (x_0,y_0), если $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$

$$\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow \left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon\right)$$

т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

Если ввести приращение функции:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0),$$

то определение непрерывности можно записать следующим образом:

Определение 7. Функция $z = f(x,y)$ называется непрерывной в точке (x_0,y_0), если $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Замечание. Все теоремы, доказанные для функции одной переменной переносятся и на случай функций многих переменных.

§ 3. Производные функций многих переменных. Их геометрический смысл.

Пусть функция $z = f\,(x,y)$ определена в некоторой области D. Рассмотрим точку $(x_0,y_0) \in D$.
Дадим приращение Δx, такое, что $(x_0 + \Delta x,y_0) \in D$.
Рассмотрим разность $f\,(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f\,(x_0,y_0)$.
Назовём её частным приращением функции z и обозначим $\Delta_x z = f\,(x_0 + \Delta x,\, y_0) - f\,(x_0,y_0)$.

Рассмотрим отношение: $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$

Определение 8. Если существует конечный предел отношения $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, то этот предел называется частной производной функции z по переменной x и обозначается:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ произносится: частная производная функции z по переменной x.

Определение 9. Если существует конечный предел отношения $\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ к Δy при $\Delta y \to 0$, то этот предел называется частной производной функции z по переменной y и обозначается:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$$

Замечание: из определения видно, что при нахождении частной производной по переменной x, переменная y – константа; при нахождении частной производной по переменной y, x – константа.

Геометрический смысл частной производной

$\frac{\partial z}{\partial x}$ - это тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $z_1 = f(x, y_0)$, лежащему в плоскости $y = y_0$ с положительным направлением оси x.

$\frac{\partial z}{\partial y}$ - это тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $z_1 = f(x_0, y)$, лежащему в плоскости $x = x_0$ с положительным направлением оси y.

§ 4. Дифференцируемость. Дифференциал функции двух переменных.

<u>Определение 10.</u> Функция $z = f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке $M(x_0,y_0)$, если в некоторой окрестности точки M приращение этой функции представимо в виде:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y.$$

где A, B – зависят только от значений (x_0,y_0); и

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha(\Delta x,\Delta y) = 0 \qquad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta(\Delta x,\Delta y) = 0$$

<u>Определение 11.</u> Дифференциалом функции $z = f(x,y)$ в точке $M(x_0,y_0)$ называется главная линейная часть приращения функции. При этом вводится обозначение:

$dz = A\Delta x + B\Delta y$ – дифференциал функции двух переменных.

Необходимые условия дифференцируемости функции двух переменных.

<u>Теорема 1.</u> Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x_0,y_0)$, то она непрерывна в этой точке.

Без доказательства.

Теорема 2. Если функция $z = f\ (x,y)$ дифференцируема в окрестности точки $M(x_0,y_0)$, то в точке $M(x_0,y_0)$ существуют частные производные: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$

Без доказательства.

Замечание. Так как дифференциал функции $z = f\,(x,y)$ в точке $M(x_0,y_0)$ выражается в виде:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y,$$

То, в соответствии с теоремой 2:

$$dz = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot \Delta y$$

Замечание. Встречается обозначение:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial z}{\partial x}(M) \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \frac{\partial z}{\partial y}(M)$$

где: $M = M(x_0,y_0)$.

Если для функции одной переменной существование производной являлось достаточным условием дифференцируемости функции в точке, то для функции двух переменных это не так. Из существования производной не следует дифференцируемость функции. Функция будет дифференцируемой в точке, если выполняется условие следующей теоремы:

Теорема 3. (**Достаточное условие дифференцируемости**) Для того, чтобы функция $z = f(x,y)$ была дифференцируема в точке $M(x_0,y_0)$, достаточно, чтобы в окрестности точки $M(x_0,y_0)$ и в самой точке существовали непрерывные частные производные:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Без доказательства.

§ 5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала функций двух переменных.

Вспомним, что общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_0,y_0)$ задаётся формулой:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где: A,B,C – направляющие косинусы нормали к плоскости, т.е. $\vec{n} = (A,B,C)$.

Общее уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0,y_0)$ задаётся формулой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

где: m,n,p – косинусы направляющего вектора прямой, т.е. $\vec{l} = (m,n,p)$.

Определение 12. Плоскость называется касательной к поверхности $z = f\,(x,y)$ в точке $M(x_0,y_0)$, если поверхность и плоскость имеют одну общую точку $M(x_0,y_0)$.

Определение 13. Нормалью к поверхности $z = f\,(x,y)$ в точке $M(x_0,y_0)$, называется прямая, проходящая через точку $M(x_0,y_0)$, перпендикулярно к плоскости, касательной к поверхности в этой точке.

Определение 14. Нормальным вектором к поверхности называется вектор нормали касательной плоскости или направляющий вектор нормали.

Теорема 4. (Существование плоскости, касательной к поверхности) Если $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M(x_0,y_0)$, то существует плоскость, касательная к поверхности $z = f(x,y)$ в точке $M(x_0,y_0)$, причём:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(M)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M)\cdot(y - y_0)$$

Без доказательства.

Следствие 1. Так как координаты нормали к плоскости, касательной к поверхности $z = f(x,y)$ в точке $M(x_0,y_0)$ имеют вид:

$$\vec{n} = \left(1, -\frac{\partial z}{\partial x}(M), -\frac{\partial z}{\partial y}(M)\right)$$

то направляющий вектор нормали к поверхности имеет вид:

$$\vec{l} = \left(1, -\frac{\partial z}{\partial x}(M), -\frac{\partial z}{\partial y}(M) \right)$$

Следствие 2. Так как дифференциал функции $z = f(x,y)$ выражается:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(M) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M) \cdot (y - y_0)$$

и уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(M) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(M) \cdot (y - y_0)$$

то **геометрический смысл дифференциала – приращение аппликаты касательной плоскости**.

Ось z – это ось аппликат.

Обозначим: $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, тогда:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

§ 6. Дифференцирование сложных функций.

§ 7. Инвариантность формы записи первого дифференциала.

§ 8. Неявные функции.

§ 9. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

§ 10. Неинвариантность формы записи второго дифференциала.

§ 11. Формула Тейлора ФНП.

§ 12. Экстремумы функции многих переменных.

Определение 1. Точка $M(x_0, y_0)$ называется max (min) функции $z = f(x,y)$, если существует такая окрестность точки $M(x_0, y_0)$, что $\forall$ x $\in$ этой окрестности выполняется неравенство:

$$f(x,y) \le f(x_0, y_0) \text{ – для max;}$$

$$(f(x,y) \ge f(x_0, y_0) \text{ – для min).}$$

Определение 2. Точка $M(x_0, y_0)$ называется max (min) функции $z = f(x,y)$, если существует $\exists\delta$ >0 (сколь угодно малое), что для $\forall x,y$ из того, что: $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow$

(немедленно следует) $f(x,y) \le f(x_0, y_0)$ – для max;

Теорема 1. **(Необходимое условие существования точки экстремума)** Если точка $M(x_0,y_0)$, является точкой максимума или минимума функции $z = f(x,y)$, дифференцируемой в окрестности точки $M(x_0,y_0)$, то частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M)=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(M)=0$$

Без доказательства.

Замечание. Может оказаться, что существуют точки, в которых есть максимум или минимум, но производная в которых не существует.

Теорема 2. (Достаточное условие существования экстремума) Если в точке $M(x_0,y_0)$ – критической точке для функции $z = f(x,y)$, функция z дважды дифференцируема, то если:

1) выражение

$$\Delta(x_0,y_0) = f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0) - \left[f''_{xy}(x_0,y_0)\right]^2 > 0$$

при $f''_{xx} > 0$ или $f''_{yy} > 0$, то $M(x_0,y_0)$ – точка минимума.

при $f''_{xx} < 0$ или $f''_{yy} < 0$, то $M(x_0,y_0)$ – точка максимума.

2) Если выражение $\Delta(x_0,y_0) < 0$, то экстремума не существует.

3) Если выражение $\Delta(x_0,y_0) = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Без доказательства.

Понятие об условном экстремуме.

<u>Определение 3.</u> Точка $M(x_0,y_0)$ называется точкой условного экстремума функции $z = f(x,y)$, если существует окрестность точки M, такая, что для $\forall x \in$ окрестности точки M и удовлетворяющего уравнению: $\phi(x,y) = 0$, выполняется неравенство:

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0) \text{ – точка max;}$$

$$(f(x,y) \ge f(x_0,y_0) \text{ – точка min).}$$

При решении задач на условный экстремум применяется метод множителей Лагранжа. Суть его в следующем: Лагранж предложил ввести новую независимую переменную λ - множитель Лагранжа и вместо решения исходной задачи, исследовать на экстремум:

$$z^* = f(x,y) - \lambda \cdot \phi(x,y).$$

Схема дальнейшего исследования такая, какая и для исследования обычной функции на экстремум:

1) Находим критические точки:

$$\frac{\partial z^*}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial z^*}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial z^*}{\partial \lambda} = 0$$

2) Применяем достаточное условие экстремума и определяем характер критической точки.

Понятие о наибольшем и наименьшем значениях функции в области.

Если требуется найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x,y)$ в области D:

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ y = \varphi(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

То эта задача решается так:

1) Находим точки экстремума в области D.

2) На каждой границе области исследуем функцию на наибольшее и наименьшее значение. Для этого уравнение каждой границы подставляем в уравнение исходной функции исследуем функцию одной переменной:

$z_1 = f(x, f_1(x))$

$z_2 = f(x, \phi(x))$

$z_3 = f(x, 0)$.

3) Наибольшее и наименьшее значение функции z в области D будет находиться среди точек экстремума $\subset D$ и среди наибольших и наименьших значений, вычисленных на границе.