26.05.20

Вычисление углов между прямыми и плоскостями с помощью скалярного произведения

Повторение (формулы уже были записаны)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

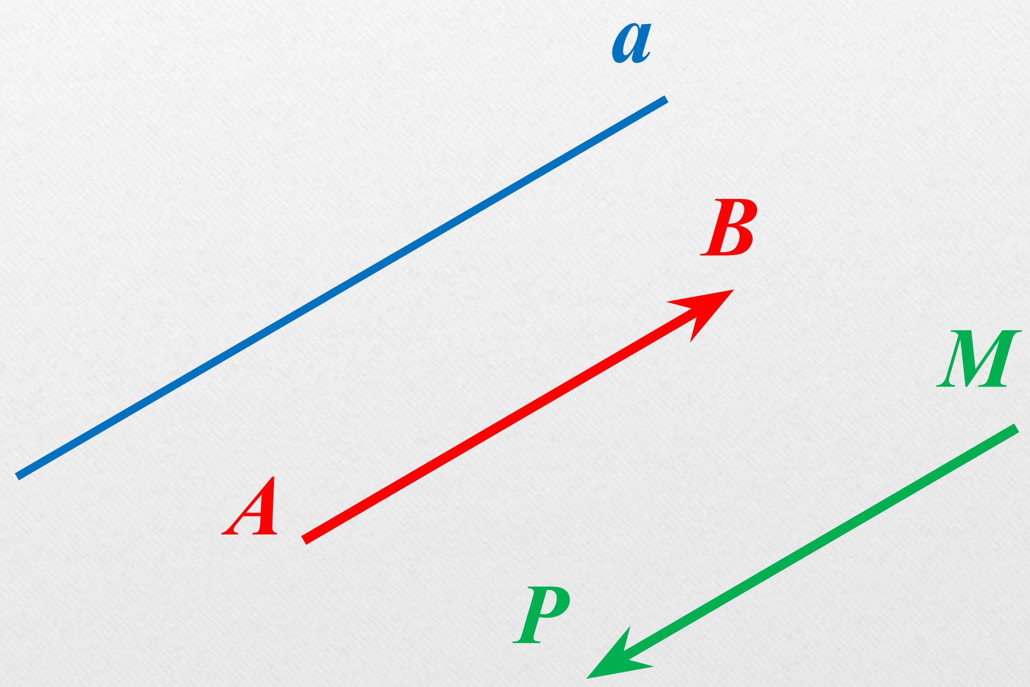
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

I. Угол между прямыми

1) Направляющий вектор прямой.

Ненулевой вектор называется направляющим вектором прямой, если он лежит на самой прямой, либо на прямой, параллельной ей.

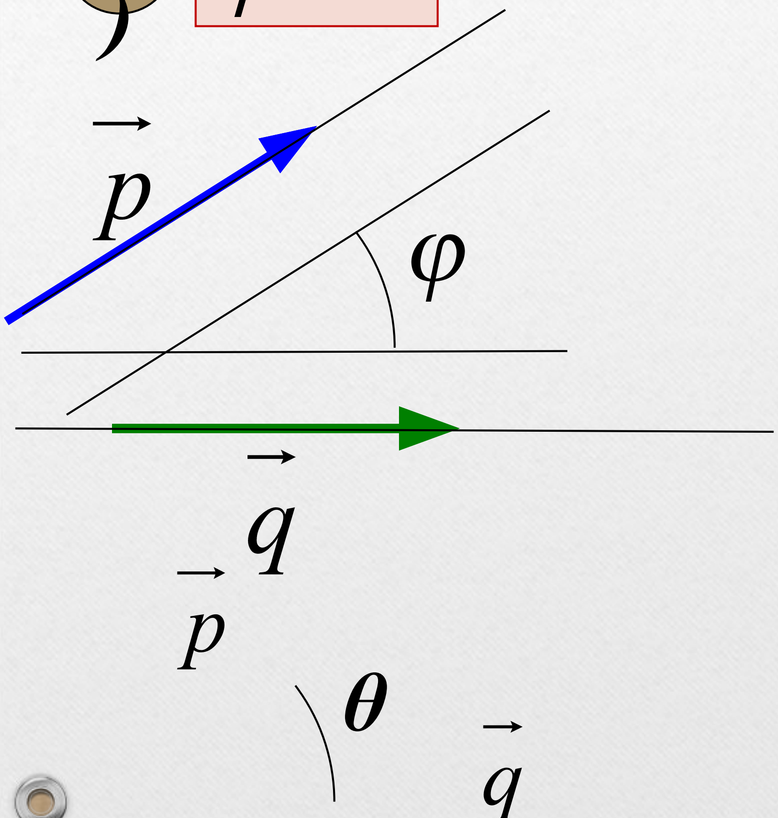


I. Угол между прямыми

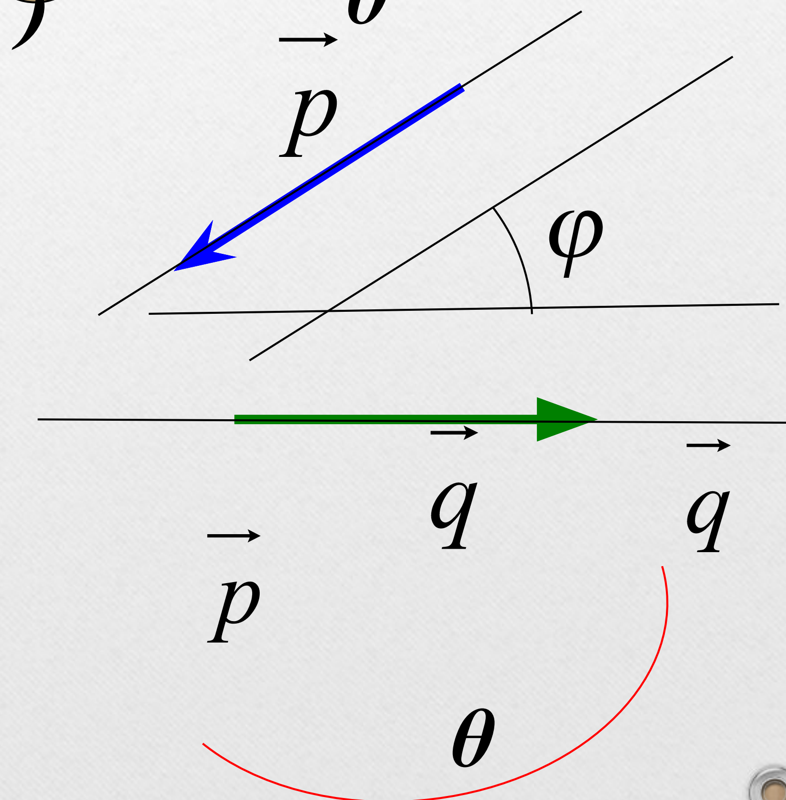
2) Задача. Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.

$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$

а) $\boxed{\varphi = \theta}$



б) $\boxed{\varphi = 180^0 - \theta}$



I. Угол между прямыми

Вывод: если

$\vec{p}$ *- направляющий вектор прямой a,* $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$

$\vec{q}$ *- направляющий вектор прямой b,* $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

то $\boxed{\varphi = \theta}$ *или* $\boxed{\varphi = 180^0 - \theta}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

Значит,

$$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

где $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$ - направляющие векторы прямых.

I. Угол между прямыми

Пример 1.

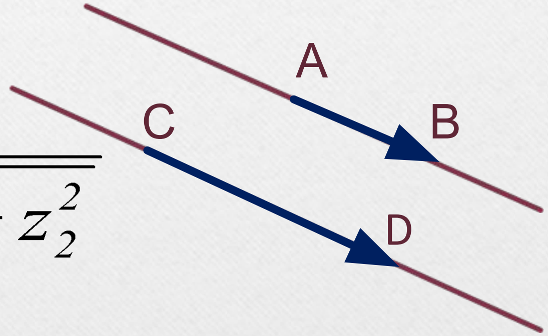
Вычислить угол между прямыми AB и CD, если:

а) A(5;-8;-1), B(6;-8;-2), C(7;-5;-11), D(7;-7;-9)

Решение.

1) Найдем координаты направляющих векторов прямых AB и CD.

$$\overrightarrow{AB}\{1;0;-1\} \qquad \overrightarrow{CD}\{0;-2;2\}$$



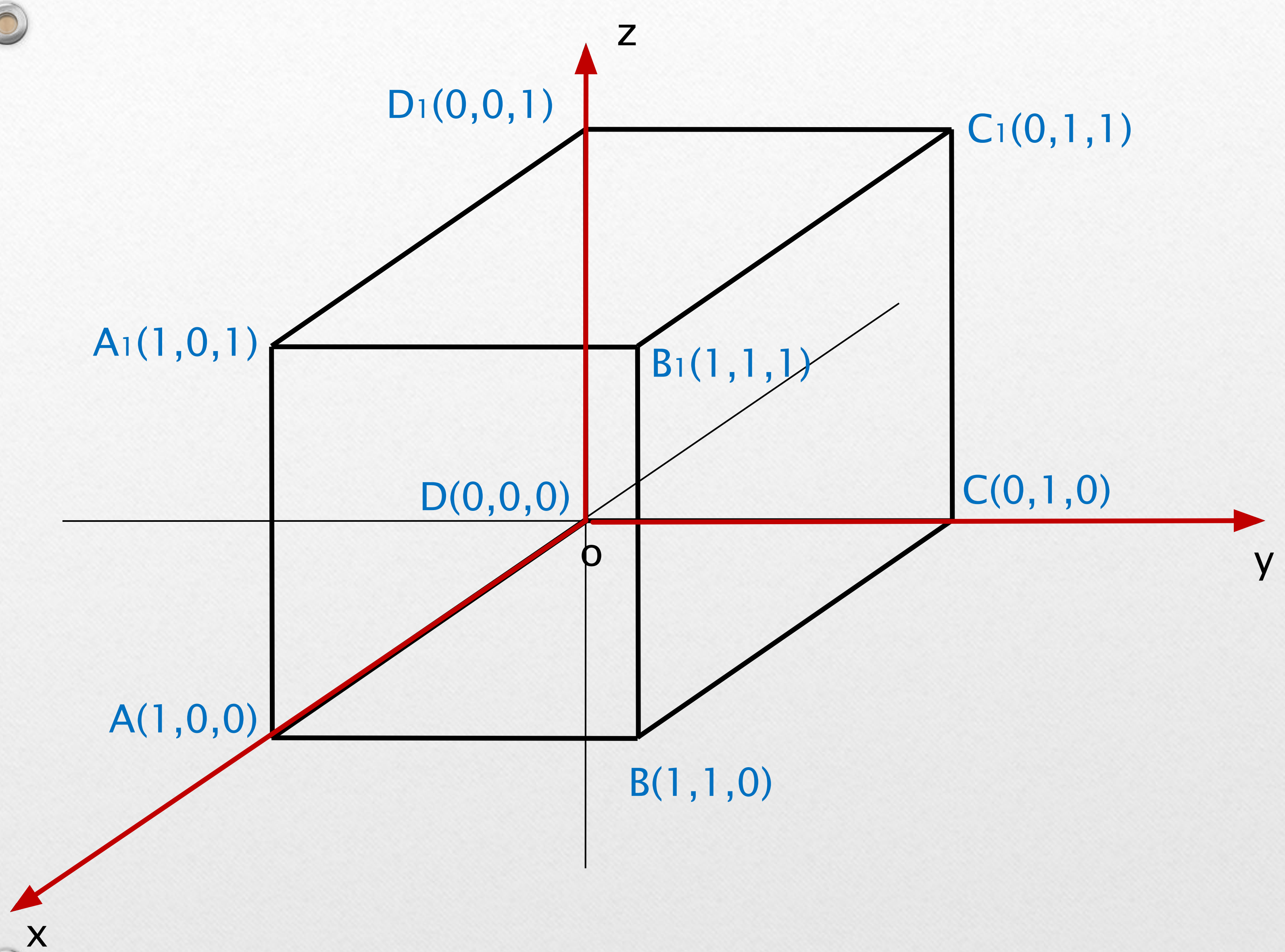
2) $$\cos\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 0 + 0\cdot(-2) + (-1)\cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2} \qquad \varphi = 60^0$$

б) A(1; 0; 2), B(2; 1; 0), C(0; -2; -4), D(-2; -4; 0);

в) A(-6; -15; 7), B(-7; -15; 8), C(14; -10; 9), D(14; -10; 7).



z
D1(0,0,1)
C1(0,1,1)
A1(1,0,1)
B1(1,1,1)
D(0,0,0)
C(0,1,0)
o
y
A(1,0,0)
B(1,1,0)
x

I. Угол между прямыми

Пример 2.

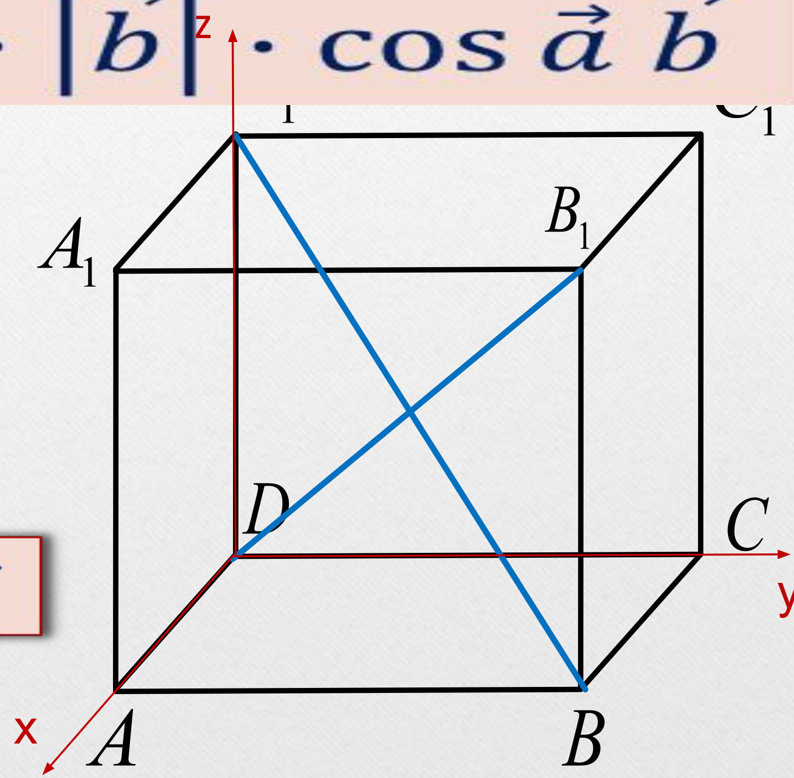
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1 - куб$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$



в) между прямыми AC и D_1B, AB_1 и BC_1, A_1D и AC_1;

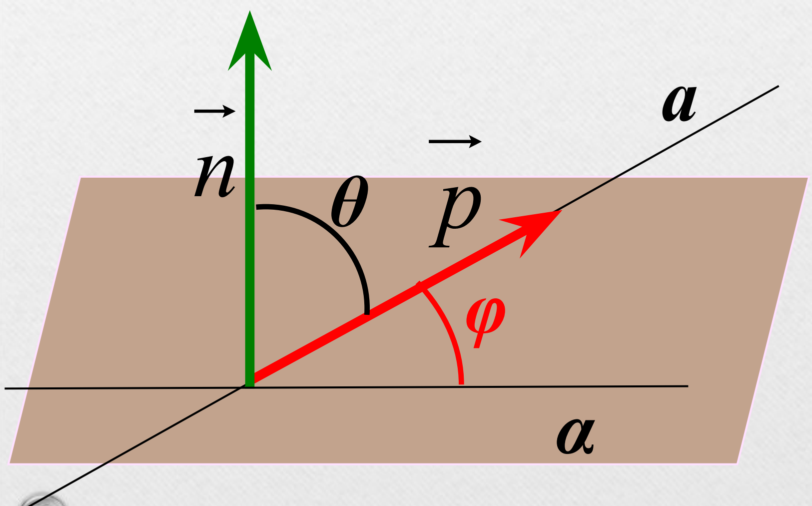
г) между прямыми A_1B и D_1N, где N – середина BB_1.

II. Угол между прямой и плоскостью

Задача 2. Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ и координаты ненулевого вектора $\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$ перпендикулярного к плоскости.

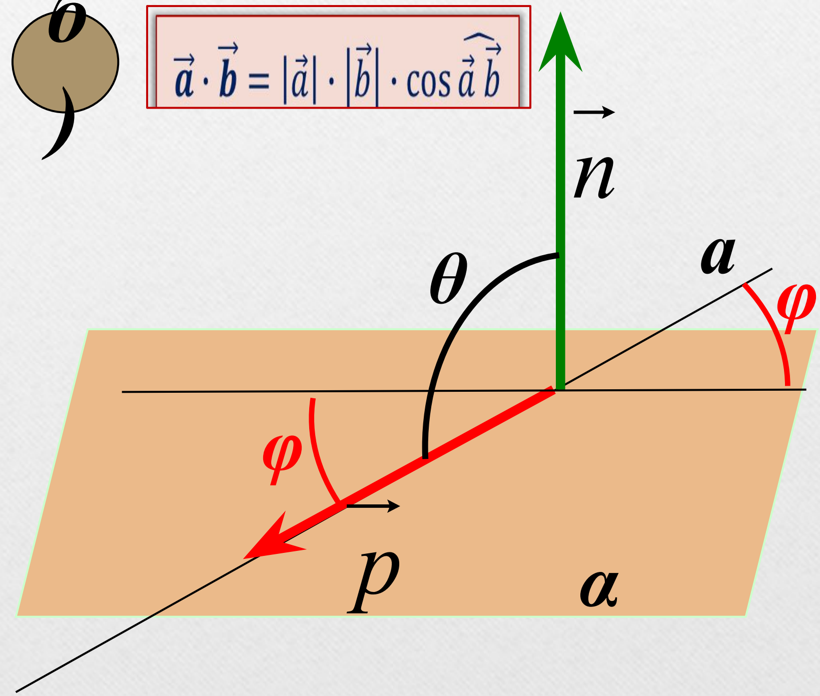
а)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$



б)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$



II. Угол между прямой и плоскостью

Вывод: если

$\vec{p}$ *- направляющий вектор прямой a,* $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$

$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

то $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ ***или*** $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

Значит, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$$

где $\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$.

II. Угол между прямой и плоскостью

Пример 3.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1 - куб$ M – середина AA_1.

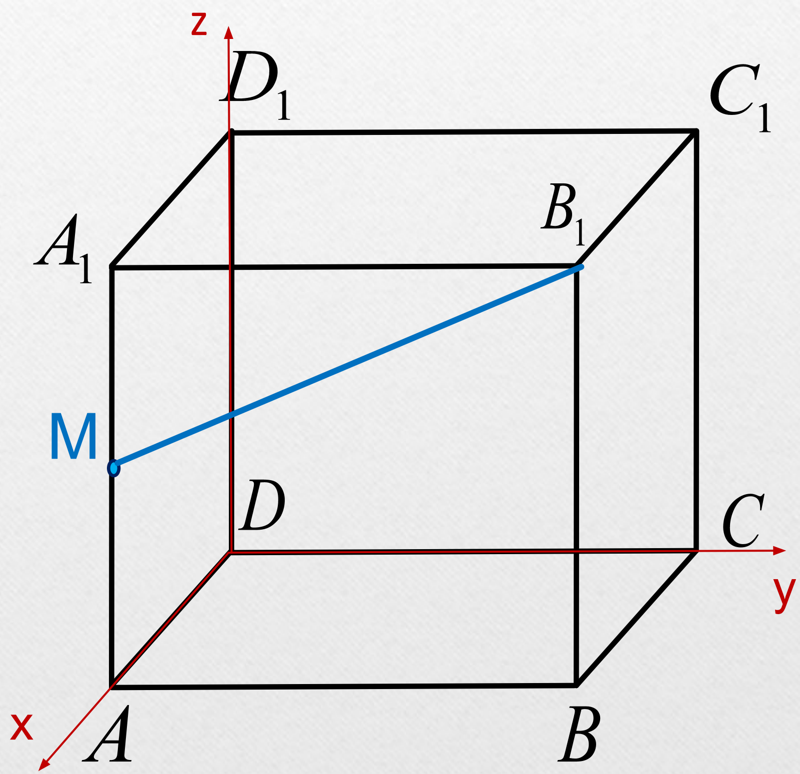
Найти: а) угол между прямой B_1M и плоскостью BB_1C_1C.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$

(1; 1; 0)

0; 1; 0 }

$$\sin\varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$



sin (B_1M; BB_1C_1C) = …

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$$