Коинтеграция временных рядов

Определение: Пусть x_t и y_t временные ряды первого порядка интеграции I(1). Если существуют такие коэффициенты (α, β), что линейная комбинация процессов x_t и y_t : $Z_t = \alpha \cdot x_t + \beta \cdot y_t$ является стационарным процессом, то есть интеграции I(0), то ряды x_t, y_t называются **коинегрированными.** А вектор компонент (α, β) называется **коинтегрирующим вектором**.

Так оба процесса – есть DS – процессы, следовательно, они имеют стохастические трены. коинтеграция означает, что стохастические тренды обоих процессов ведут себя одинаково.

Коинтегрирующие соотношение соответствует тому, что между величинами есть долгосрочное равновесие.

ECM-модель $\Delta y_t = \alpha \cdot \Delta x_t + \beta \cdot (y_{t-1} - \gamma x_{t-1}) + v_t$ связывает между собой стационарные величины Δx_t и Δy_t, а также коинтегрирующее соотношение.

Поэтому, если процессы x_t и y_t не являются стационарными, но являются коинтегрируемыми, то между ними можно построить ADL и DL модели.

Причинность по Гренджеру

Если X_t - **причина по Гренджеру** для Z_t, то это означает, что между этими процессами есть причинно-следственная связь.

Для тестирования причинности по Гренджеру строят регрессию Z_t на его собственные предыдущие значения и на предыдущие значения процесса X_t

$$Z_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i Z_{t-i} + \sum_{i=1}^{k} \beta_i X_{t-i} + \varepsilon_t$$

Затем проверяем гипотезу

$$H_0: \quad \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$$

$$H_1: \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_k^2 > 0$$

Поверяют гипотезу на основе расчета F-статистик, которую сравнивают с критическими значениями Фишера.

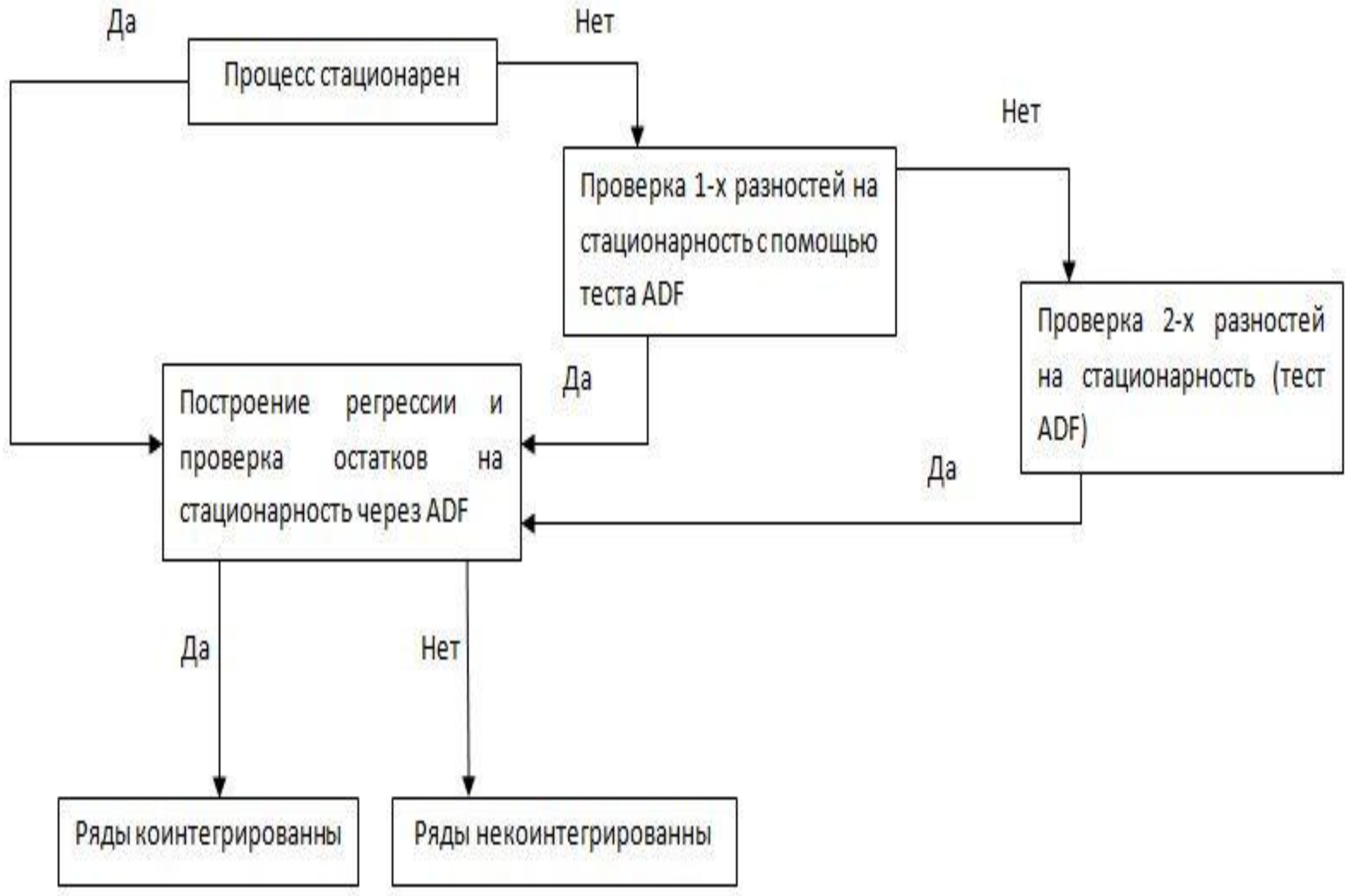
Если нулевая гипотеза отвергается, то X_t является причиной для Z_t.

Процедура Ингла-Гренджера

1. Определяют, являются ли процессы X_t и Y_t интегрируемыми первого порядка.
2. Строят обычную регрессию X_t на Y_t методом наименьших квадратов.
3. Проверяют остатки регрессии на стационарность с помощью теста Дики-Фуллера, но сравнивают DF-статистику с поправленными значениями, отличными от критических значений Мак-Кинона.
4. Делают выводы: если остатки стационарны то исходные ряды X_t и Y_t коинтегрированны, а построенная регрессия является коитегрирующей.

Если согласно процедуре имеется коитеграция, то в построенной регрессии можно учесть не только долгосрочное равновесие, но и за счет введения дополнительного регрессора – коинтегрирующего соотношения в предыдущий момент времени**. То есть построить модель ЕСМ.**

Схема процедуры Ингла-Гренджера



Случаи взаимодействия временных рядов

1. Экономические переменные, связанные DL или ADL моделями, стационарны.

2. Экономичесие переменные нестационарны и относятся к TS- процессам, тогда их взаимодействие можно учитывать в виде регрессии, дополнительно включив переменную времени *t* (метод отклонения от трендов).

3. Экономические переменные нестационарны и DL или ADL модели строятся на их стационарных разностях Δx_t и Δy_t .

4. Переменные нестационарные, но относятся к DS-процессам и имеют одинаковый порядок интеграции, можно построить для них регрессию при условии их коинтегрируемости.

Определение DL-моделей

Опр 1. Величина l, характеризующая запаздывание в воздействии фактора на результат называется лагом (или лагом запаздывания).

Опр 2. Переменные, сдвинутые на определенное количество времени (лагов) вперед или назад, называются лаговыми переменными.

Опр 3. Модели, характеризующие воздействие значений переменной в текущий период на бедующее значение результативной переменной, называется моделями с распределенными лагами (Distributed lags .**DL-модели)**. Подобные модели позволяют определить отсроченный эффект во времени воздействия факторной переменной на результат. Подобные модели содержат как текущее значение результативной (зависимой переменной y_t),так и лаговые значения независимой переменной (переменных $x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}, \ldots$).

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_t + \alpha_2 \cdot X_{t-1} + \alpha_3 \cdot X_{t-2} + \ldots + \alpha_{p+1} \cdot X_{t-p} \quad \textbf{(1)}$$

Здесь p – длина максимального лага запаздывания является порядком DL-модели (Обозначается:DL(p))

Примеры применения DL-моделей

- Определение отсроченного эффекта инвестиций (вложений) на прибыль предприятия.
- Определение отсроченного влияния рекламных издержек на спрос.
- Определение отсроченного влияния увеличения заработной платы на мотивацию труда (производительность труда или текучесть кадров)
- Влияние доходов на расходы.
- Влияние увеличения среднедушевых доходов на динамику демографических показателей

Классификация DL-моделей

- Модель с распределенными лагами с конечным лагом запаздывания p.

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_t + \alpha_2 \cdot X_{t-1} + \alpha_3 \cdot X_{t-2} + \ldots + \alpha_{p+1} \cdot X_{t-p}$$

- Модель с распределенными лагами с бесконечным лагом запаздывания $p \to \infty$.

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_t + \alpha_2 \cdot X_{t-1} + \alpha_3 \cdot X_{t-2} + \ldots + \alpha_{p+1} \cdot X_{t-p} + \ldots$$

Идентификация DL-модели

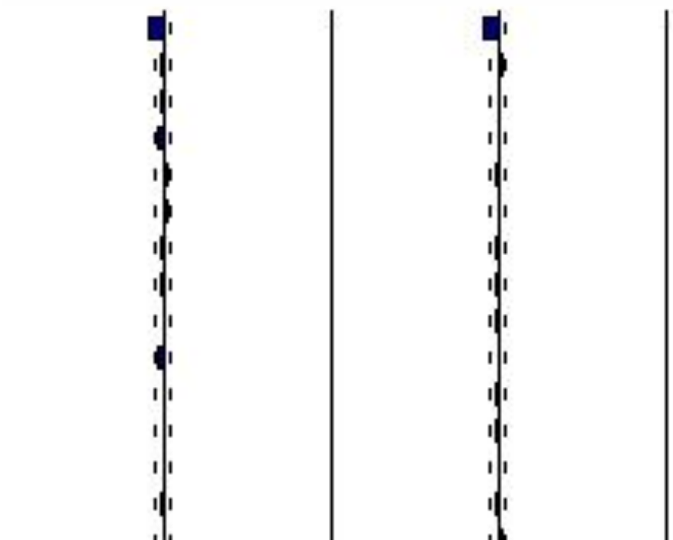
Опр. 4. Под идентификацией DL-модели (1) понимают определение ее порядка ***p***, то есть длину максимального лага запаздывания для значимой лаговой переменной.

Осуществить процедуру идентификации можно:

1. С Помощью критерия Стьюдента: Модель (1) можно рассматривать как многофакторную регрессию, где в качестве регрессоров выступают лаговые переменные, для которых можно проверить критерии значимости.
2. С помощью информационных критериев Акайке и Шварца: строят несколько уравнений DL-моделей для различной длины максимального лага запаздываниями выбирают ту модель, для которой значения информационных критериев будут минимальными.
3. Исходя из теоретических предпосылок экономической теории. Например, согласно закону ожидания Врума.
4. На основе анализа кросс-коррелограмм кросскорреляционной функций.

Понятие кросс-коррелограмм кросскорреляционной функций.

Опр. 5. Под кросскоррелограммами понимают графики кросскорреляционных функций, где по оси абсцисс откладываются лаги запаздывания, а по оси ординат коэффициенты корреляции с лаговыми переменными. Сдвинутыми на заданное количество лагов вперед и назад.



STDRES1^2,STDRES1(-i)	STDRES1^2,STDRES1(+i)	i	lag	lead
		0	-0.0748	-0.0748
		1	-0.0037	0.0203
		2	-0.0077	0.0111
		3	-0.0285	0.0090
		4	0.0349	-0.0028
		5	0.0289	0.0130
		6	-0.0043	-0.0021
		7	-0.0112	-0.0007
		8	0.0006	-0.0116
		9	-0.0379	0.0131
		10	0.0105	-0.0056
		11	0.0099	-0.0068
		12	0.0105	0.0097
		13	-0.0094	-0.0083
		14	0.0123	0.0197

Максимальную длину лага запаздывания определяют посчитывая количество значимых (выходящих за границы белого шума) коэффициентов кросскорреляционной функции.

Интерпретация параметров DL-моделей

1. Коэффициент a_1 в модели (1) характеризует среднее абсолютное изменение результативной переменной y_t при изменении значения независимой переменной x_t на единицу своего измерения в некоторый фиксированный момент времени t, без учета воздействий лаговых значений переменной x. Этот коэффициент называют краткосрочным мультипликатором.
2. В момент времени t+1 совокупное воздействие факторной переменной x_{t-} на результат y_t составит $a_1 + a_2$ условных единиц, В момент времени t+2 совокупное воздействие факторной переменной x_{t-} на результат y_t составит $a_1 + a_2 + a_3$ условных единиц. Такие суммы называются промежуточными мультипликаторами.
3. Общее изменение результата через р периодов времени называется долгосрочным мультипликатором и определяется как:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p = a$$

Интерпретация параметров DL-моделей

4. Определим относительные коэффициенты DL-модели α_j как:

$$A_j = \alpha_j / \alpha,$$ для $j = 1 : p+1$

Если все коэффициенты α_j имеют одинаковый знак, то для любого j:

$$0 < A_j < 1$$ и $$\sum_{j=1}^{p+1} A_j = 1$$

Относительные коэффициенты измеряют долю общего изменения результативного признака в момент времени $t+j$.

5. Средний лаг определяется как:

$$\bar{l} = \sum_{j=1}^{p+1} j \cdot A_j$$

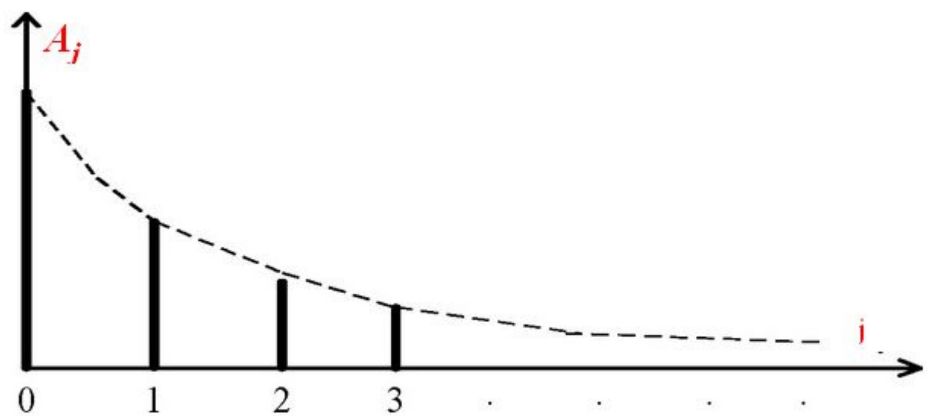
и измеряет средний период, в течении которого будет происходить изменение результата под воздействием изменения регрессионного фактора в момент времени t.

6. Медианный лаг l_{Me} характеризует период времени, в течении которого с момента времени t будет реализована половина общего воздействия лаговых факторов на результат, то есть для него справедливо:

$$\sum_{j=1}^{l_{Me}} A_j \approx 0{,}5$$

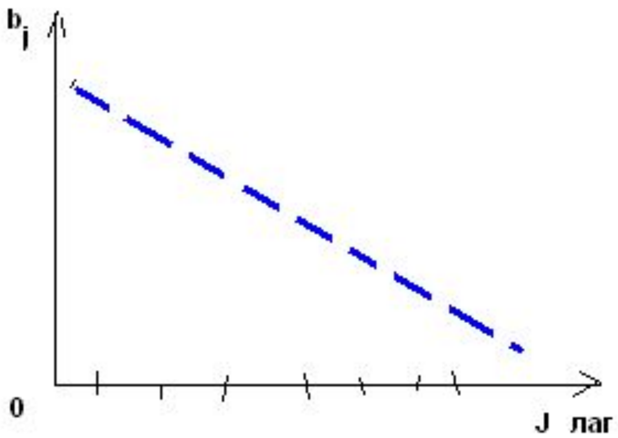
Изучение структуры лага

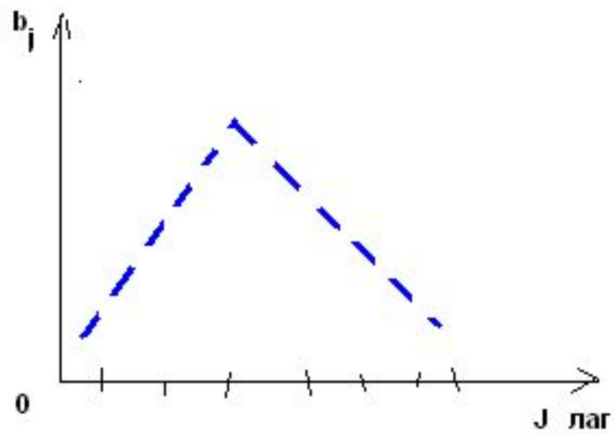
1. Если с ростом величины лага *p* коэффициенты при лаговых переменных A_j убывают, то имеет место линенйная структура лага.
2. Если с ростом величины лага *p* коэффициенты при лаговых переменных A_j сначала возрастают, а затем убывают. То это или треугольная или квадратичная структура лага.
3. Если с ростом величины лага *p* коэффициенты при лаговых переменных A_j сначала убывают, а затем возрастают. То это или V-образная или квадратичная структура лага.
4. Если структура лага ведет себя непостоянно , то убывая, то возрастая, то это скорее всего полиномиальная структура лага.
5. Для DL-моделей с бесконечным лагом имеет место. Как правило геометрическая структура лага.

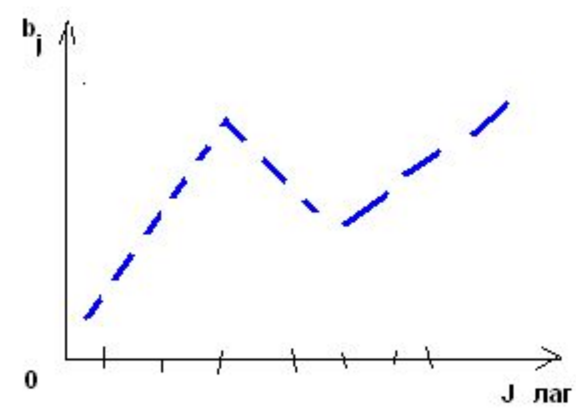


Примеры структуры лага DL-моделей

Для изучения структуры лага строят графики, где по оси абсцисс откладывается лаг запаздывания, а по оси ординат относительные коэффициенты DL-модели A_j.







Линейная структура ***Квадратичная*** ***Полиномиальная***

Сложности оценки DL-моделей

1. Существенная мультиколлинеарность, за счет введения лаговых переменных.
2. При большой величине лага запаздывания увеличивается количество независимых лаговых переменных в модели, и как следствие уменьшается число степеней свободы, соответственно. Общая значимость модели падает.
3. Проблема автокорреляции остатков, характерная для DL-моделей, снижает эффективность оценок модели.

Традиционный МНК при оценке DL-модели, как правило, дает недостоверные параметры.

Метод Алмон

Рассмотрим: $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot X_t + \alpha_2 \cdot X_{t-1} + \alpha_3 \cdot X_{t-2} + \ldots + \alpha_{p+1} \cdot X_{t-p}$

Пусть лаг имеет полиномиальную структуру. То есть представлен полиномом степени k: $\alpha_j = c_0 + c_1 \cdot j + c_2 \cdot j^2 + \ldots + c_k \cdot j^k$

Тогда каждый из коэффициентов (1) можно представить в виде:

***j*=0:**

$$\alpha_1 = c_0$$

***j*=1:**

$$\alpha_2 = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_k$$

***j*=2:** **(2)**

$$\alpha_3 = c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 + \ldots + c_k \cdot 2^k$$

…………………………………………………………

j=p: $\alpha_{p+1} = c_0 + c_1 \cdot p + c_2 \cdot p^2 + \ldots + c_k \cdot p^k$

Подставим в исходное уравнение (1) выражения (2)

$$Y_t = \alpha_0 + c_0 \cdot X_t + (c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_k) \cdot X_{t-1} + (c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 + \ldots + c_k \cdot 2^k) \cdot X_{t-2} + .$$

$$+ .. + (c_0 + c_1 \cdot p + c_2 \cdot p^2 + \ldots + c_k \cdot p^k) \cdot X_{t-p}$$

Метод Алмон

Перегруппируем:

$$Y_t = \alpha_0 + c_0 \cdot (X_t + X_{t-1} + \ldots + X_{t-p}) + c_1(X_{t-1} + 2X_{t-2} + .3X_{t-3} + .. + pX_{t-p}) +$$

$$+ c_2(X_{t-1} + 4X_{t-2} + 9X_{t-3} + .. + p^2 X_{t-p}) + .. + c_k \cdot (X_{t-1} + 2^k X_{t-2} + 3^k X_{t-3} + .. + p^k X_{t-p})$$

Обозначим:

$$z_0 = X_t + X_{t-1} + \ldots + X_{t-p} = \sum_{j=0}^{p} X_{t-j}$$

$$z_1 = X_{t-1} + 2X_{t-2} + .3X_{t-3} + .. + pX_{t-p} = \sum_{j=0}^{p} j \cdot X_{t-j}$$

(3)

$$z_2 = X_{t-1} + 4X_{t-2} + 9X_{t-3} + .. + p^2 X_{t-p} = \sum_{j=0}^{p} j^2 \cdot X_{t-j}$$

$$z_k = X_{t-1} + 2^k X_{t-2} + 3^k X_{t-3} + .. + p^k X_{t-p} = \sum_{j=0}^{p} j^k \cdot X_{t-j}$$

Подставив (3) в (1) получим:

(4)

$$Y_t = \alpha_0 + c_0 \cdot z_0 + c_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot z_2 + \ldots + c_k \cdot z_k$$

Процедура применения метода Алмон

1. Определяется максимальный лаг запаздывания p в модели (1)
2. Определяется степень полинома k, описывающий структуру лага модели
3. Определяются по системе (3) новые переменные z_k
4. Оценивается традиционным МНК новая модель:

$$Y_t = \alpha_0 + c_0 \cdot z_0 + c_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot z_2 + \ldots + c_k \cdot z_k \quad (4)$$

5. По полученным коэффициентам c_i и соотношениям (2) определяют параметры исходной модели (1) – α_J

В случае, когда DL-модель имеет бесконечную отдачу, то есть бесконечный лаг запаздывания, то предполагают, что структура лага имеет геометрический вид, то есть воздействие лаговых значений переменной на результат уменьшается с увеличением величины лага в геометрической прогрессии. В этом случае к оценке параметров такой DL-модели применяют подход Койка.

Авторегрессионные модели с распределенными лагами

Определение: Модель, для которой в качестве регрессоров рассматриваются лаговые значения как объясняемой, так и объясняющих величин, называется **авторегрессионной моделью с распределенными лагами ADL (*p*, *q*)**, где *p* – порядок авторегресси, равный максимальному лагу запаздывания в AR-структуре модели, а *q* – порядок распределенных лагов, равный максимальному лагу запаздывания в DL-структуре модели:

$$Y_t = \theta + \alpha_1 \cdot Y_{t-1} + \alpha_2 \cdot Y_{t-2} + \ldots + \alpha_p \cdot Y_{t-p} +$$
$$+ \beta_0 \cdot X_t + \beta_1 \cdot X_{t-1} + \beta_2 \cdot X_{t-2} + \ldots + \beta_q \cdot X_{t-q} + \varepsilon_t$$

В общем случае предполагают, что Y_t и X_t - стационарны!

Интерпретация

Для модели ADL (1, 1) $Y_t = \theta + \alpha_1 \cdot Y_{t-1} + \beta_0 \cdot X_t + \beta_1 \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t$

мультипликаторы (отклики) краткосрочные и долгосрочные выражаются как: β_0, $\beta_1 + \alpha_1\beta_0$, $\alpha_1\beta_1 + \alpha_1^2\beta_0$ и т.д.

Модель коррекции ошибки

Рассмотри ADL (1, 1): $Y_t = \theta + \alpha_1 \cdot Y_{t-1} + \beta_0 \cdot X_t + \beta_1 \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t$

Заменив: Y_t на $Y_{t-1} + \Delta Y_t$ и X_t на $X_{t-1} + \Delta X_t$

Получим: $\Delta Y_t = \theta + \beta_0 \cdot \Delta X_t - (1-\alpha_1) \cdot Y_{t-1} + (\beta_0 + \beta_1) \cdot X_{t-1} + \varepsilon_t$

Перегруппировав получим:

$$\Delta Y_t = \beta_0 \cdot \Delta X_t - (1-\alpha_1)\left[Y_{t-1} - \frac{\theta}{1-\alpha_1} - \frac{\beta_0 + \beta_1}{1-\alpha_1} X_{t-1} \right] + \varepsilon_t$$

Определение. Такое представление ADL-модели называется **моделью коррекции ошибки ECM.**

Выражение $\gamma = Y_{t-1} - \frac{\theta}{1-\alpha_1} - \frac{\beta_0 + \beta_1}{1-\alpha_1} X_{t-1}$ трактуется как отклонение от долгосрочного равновесия в момент времени t-1, так как долгосрочное равновесие определяется при γ=0. Поэтому γ>0 , если Y_{t-1} превышает равновесное значение X_{t-1} .

Модель коррекции ошибки

Модель ECM представляет текущее краткосрочное изменение Y в виде суммы мгновенного отклика на текущее (краткосрочное) изменение X и поправки на имевшее место отклонение от долгосрочного равновесия в предыдущий момент.

Для соблюдения условия стационарности Y_t требуется, чтобы $|\alpha_1| < 1$

Представление ADL(*p*, *q*) в виде ECM:

$$\Delta Y_t = \beta_0 \cdot \Delta X_t - \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{q-1} \gamma_i \Delta X_{t-i} + \alpha_p(1)\left[Y_{t-1} - \frac{\theta}{\alpha_p(1)} - \frac{\beta_q(1)}{\alpha_p(1)} X_{t-1} \right] + \varepsilon_t$$

В условиях, когда Y_t и X_t являются стационарными процессами к оценке параметров ADL и ECM моделей можно применять МНК (метод наименьших квадратов LS)

Здесь $\alpha_p(1)$ и $\beta_q(1)$ – операторы линейной комбинации коэффициентов при AR и DL –частях модели ADL(*p, q*).

Динамические модели и их спецификация

1. Модель статической регрессии

В этой модели на значение y_t влияет только значение x_t в тот же момент времени; предшествующие значения y_{t-1} и x_{t-1} не влияют на y_t.

Общий вид уравнения:

$$y_t = b_0 \cdot x_t + \text{K} + b_n \cdot x_t + \varepsilon_t$$

Такая модель обычно не характерна для данных, получаемых последовательно во времени, поскольку в таких ситуациях, как правило, случайные величины ε_t автокоррелированы.

2. Модель опережающего показателя

Общий вид уравнения:

$$y_t = b_1 \cdot x_{t-1} + \text{K} + b_q \cdot x_{t-q} + \varepsilon_t$$

Такие модели могут использоваться для прогнозирования, если изменения показателя y следуют с запаздыванием за изменениями показателя x с достаточной надежностью.

3. Модель с распределенными лагами

4. Модель коррекции ошибок

5. Авторегрессионная модель с распределенными лагами

6. Авторегрессионная модель с экзогенным переменными

Систему взаимосвязанных тождеств и регрессионных уравнений, в которой переменные могут одновременно выступать как результирующие в одних уравнениях и как объясняющие в других, принято называть системой одновременных (эконометрических) уравнений.

$$\begin{cases} Y_1 = a_0 + a_1 Y_2 + a_2 X_1 + \varepsilon_1 \\ Y_2 = b_0 + b_1 Y_1 + b_2 X_2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

Эндогенные переменные — это взаимозависимые переменные, которые определяются внутри модели (системы). Как правило, каждое уравнение модели определяет одну эндогенную переменную, стоящую в левой части уравнения. Таким образом, число уравнений в системе равно числу эндогенных переменных.

Экзогенные переменные — это независимые переменные, которые определяются вне системы.

В приведенной выше системе одновременных уравнений Y_1 и Y_2 являются эндогенными, а X_1 и X_2 — экзогенными переменными.

Предопределенные переменные — это экзогенные и лаговые (за предшествующие промежутки или моменты времени) эндогенные переменные системы.

Структурная форма модели — это система уравнений, отражающая взаимосвязь между переменными в соответствии с положениями экономической теории и характеризующая структуру экономики или ее сектора.

Параметры структурной формы модели называют структурными параметрами, в приведенной выше системе это параметры $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$.

Если модель содержит тождества, то без потери общности их можно назвать уравнениями, в которых структурные параметры при переменных равны 1.

Приведенная форма модели — это система уравнений, в которой каждая эндогенная переменная есть линейная функция от всех предопределенных переменных модели.

Векторная авторегрессия

Фактически VAR — это система эконометрических уравнений, каждая из которых представляет собой ADL-мод

$$y_t^i = a_0^i + \sum_{j=1}^{k} a_{1j}^i y_{t-1}^j + \sum_{j=1}^{k} a_{2j}^i y_{t-2}^j + \ldots + \sum_{j=1}^{k} a_{pj}^i y_{t-p}^j + \varepsilon_t^i.$$

$$y_t = (y_t^1, y_t^2, \ldots, y_t^k)$$

Если введем вектор временных рядов то

$$y_t = a_0 + A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \ldots + A_p y_{t-p} + \varepsilon_t = a_0 + \sum_{m=1}^{p} A_m y_{t-m} + \varepsilon_t,$$

где A_m — матрицы элементов a_{mj}^i.

При добавлении экзогенных переменных:

$$y_t = a_0 + \sum_{m=1}^{p} A_m y_{t-m} + \sum_{n=0}^{q} B_n x_{t-n} + \varepsilon_t.$$

Байесовская VAR

BVAR = VAR + Байесовский подход

VAR:

$$\begin{cases} y_t = \Phi_{const} + \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \ldots + \Phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \Sigma) \end{cases}$$

где Φ_{const} - вектор констант, Φ_i - авторегрессионные матрицы. Вектор ε_t - нормальный вектор ошибок, некоррелированный с объясняющими переменными.

Байесовский подход:

- Задача байесовского оценивания заключается в поиске апостериорных распределений параметров Σ, Φ_{const}, Φ_1, Φ_2, etc
- Использовать апостериорное распределение для прогнозирования.

Производные модели VAR

- 1. VARMA - добавляются элементы скользящей средней в систему уравнений
- 2. VECM- уравнения авторегрессии с распределёнными лагами ADL переписываются в виде моделей коррекции ошибки ECM