

Инвариант





Инвариант – величина, которая не изменяется в результате некоторых операций.

Задачи на инварианты делятся на несколько типов по способу решения:



- 1. ЗАДАЧИ НА ЧЁТНОСТЬ.**
- 2. ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ.**
- 3. ЗАДАЧИ С ПОЛУИНВАРИАНТАМИ.**
- 4. ЗАДАЧИ С НЕКЛАССИФИЦИРОВАННЫМИ ИНВАРИАНТАМИ.**

Чётность — одна из наиболее часто встречающихся идей при решении олимпиадных задач



- Какие числа называются чётными (нечётными)?
- Что означает термин «разная чётность»?

Число $x+2$ имеет ту же чётность, что и число x (или оба чётные, или оба нечётные), а при прибавлении единицы чётность числа меняется.

Лемма 1. Чётность суммы нескольких чисел совпадает с чётностью количества нечётных слагаемых.

Пример 1. Определить чётность числа:

а) $1 + 2 + 3 + \dots + 10$

б) $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

Лемма 2. Знак произведения нескольких (отличных от нуля) чисел определяется чётностью количества отрицательных сомножителей.

Пример 2. Определить знак произведения

а) $(-1)(-2)(-3)(-4)$

б) $(-1)^2(-3)^4(-5)$

Задача 1. На листе бумаги написано число 11. Шестнадцать учеников передают листок друг другу, и каждый прибавляет к числу или отнимает от него единицу – как хочет. Может ли в результате получиться число 0?

Задача 2. На столе 6 стаканов, Из них 5 стоят правильно, а один перевернут вверх дном. Разрешается переворачивать одновременно 4 любых стакана. Можно ли все стаканы поставить правильно?

Задача 3. Существует ли замкнутая 7-звенная ломаная, которая пересекает каждое своё звено ровно 1 раз?

Задача 4. Можно ли разменять 25 советских рублей на 8 купюр в 1, 3 и 5 советских рублей?

Самостоятельная работа

1. На вешалке висят 20 платков. 17 девочек по очереди подходят к вешалке и либо снимают, либо вешают платок. Может ли после ухода девочек остаться ровно 10 платков?

2. В столовой стоят 50 стаканов, из них 25 — вверх дном. Сможет ли дежурный, переворачивая по 4 стакана, получить все стаканы стоящими правильно, то есть на доньшке?

3. В ряд выписаны числа 1, 2, 3, ..., 100. Можно менять местами любые два числа, между которыми стоит ровно одно. Можно ли получить ряд 100, 99, 98, ..., 2, 1 ?

Решение:

1. После подхода первой девочки количество оставшихся платков либо 19, либо 21 (нечетное количество); после подхода второй девочки – либо 18, либо 20, либо 22 (четное количество); после подхода третьей девочки – либо 17, либо 21, либо 23, либо 19 (нечетное количество).

Инвариант: чётность кол-ва платков та же, что и чётность подхода. После подхода 17 девочки остается нечетное количество платков. Получается противоречие. Значит, 10 платков остаться не может.

2. Нет, так как в любом случае количество перевернутых вверх дном стаканов будет числом нечетным.
3. Заметим, что при разрешённых операциях меняются местами либо только чётные числа, либо только нечётные. При этом чётные числа всегда будут находиться на чётных местах. Значит, нельзя получить ряд, в котором на первом месте стоит 100.

Решение задач у доски.

1. У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взяли за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечётное число рук, чётно.
2. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки $+$ и $-$, чтобы получилось выражение, равное нулю?
3. На плоскости расположено 11 шестеренок, соединенных по цепочке (первая со второй, вторая с третьей ... 11-я с первой). Могут ли они вращаться одновременно?

Итог урока



- Какую цель мы ставили в начале урока?
- Получилось ли у нас реализовать ее?
- Какие этапы урока понравились?
- На каком из них испытывали трудности?
- Что надо знать для ликвидации затруднений?

Спасибо за работу!

