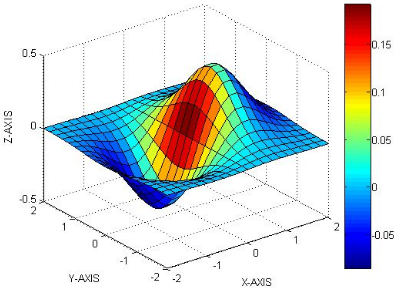
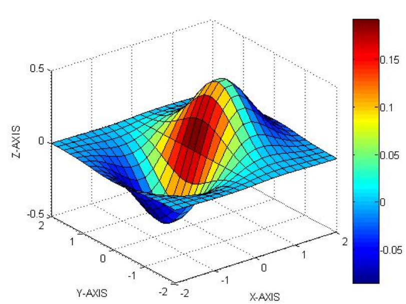
Лекция 7

Методы расщепления.



Содержание

- **Понятие о методах расщепления.**
- Локально-одномерные схемы.
- Послойные схемы расщепления.
- Расщепление по физическим процессам.
- Расщепление с факторизацией.
- Методы «предиктор-корректор»



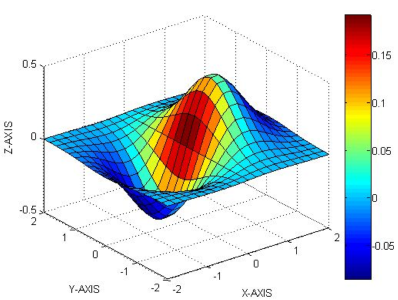
Методы расщепления

- Дифференциальная задача
  - Уравнение в частных производных
  - Постоянные коэффициенты уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{A}u = 0; x \in \Omega_x,\ t \in \Omega_t,\ u|_\Gamma = u_\Gamma, u(t_0) = u_0.$$

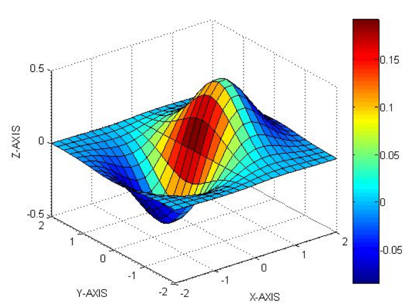
$\mathbf{A} \geqslant 0$ $\qquad$ Γ — граница области Ω_x

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = 0, u^0 = u_0$$



Содержание

- Понятие о методах расщепления.
- **Локально-одномерные схемы.**
- Послойные схемы расщепления.
- Расщепление по физическим процессам.
- Расщепление с факторизацией.
- Методы «предиктор-корректор»



Методы расщепления

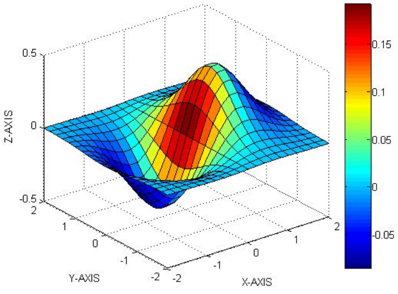
- Разобьем промежуток на два: $[t^n, t^{n+1/2}], [t^{n+1/2}, t^{n+1}]$

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau/2} + \Lambda u^n = 0,$$ (явная схема)

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau/2} + \Lambda u^{n+1} = 0.$$ (неявная схема)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda^n \frac{u^{n+1} + u^n}{2} = 0$$

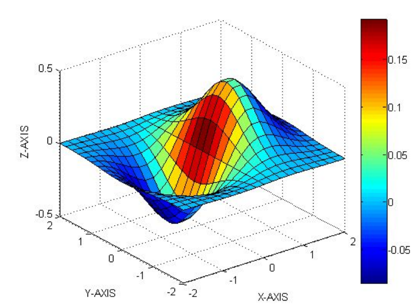
$$u^{n+1} = (\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda^n)^{-1}(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda^n)u^n$$



Локально-одномерные схемы

- Дифференциальный оператор можно представить в виде суммы операторов, каждый из которых содержит производные только по одной пространственной переменной;
- Разностный оператор содержит разности только вдоль одного направления.

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A}_i, \Lambda = \sum_{i}^{N} \Lambda_i.$$



Расщепление по направлениям

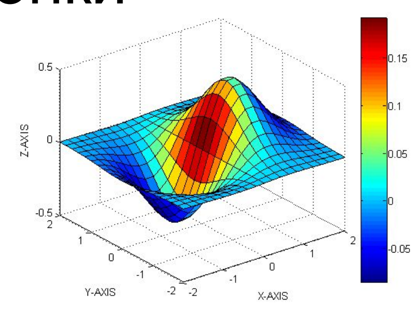
$$\frac{u^{n+1/N} - u^n}{\tau} + \Lambda_1 u^{n+1/N} = 0,$$

$$\frac{u^{n+2/N} - u^{n+1/N}}{\tau} + \Lambda_2 u^{n+2/N} = 0,$$

$$\cdots$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+(N-1)/N}}{\tau} + \Lambda_N u^{n+1} = 0.$$

- Схема для однородной задачи
- Система может быть решена методом прогонки
- Имеет место суммарная аппроксимация



Расщепление по направлениям

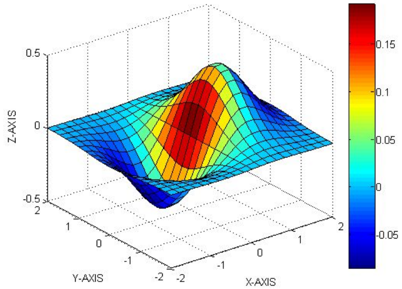
$$\frac{u^{n+1/N}-u^n}{\tau}+\Lambda_1 u^{n+1/N}=0,$$

$$\frac{u^{n+2/N}-u^{n+1/N}}{\tau}+\Lambda_2 u^{n+2/N}=0,$$

$$\cdots$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+(N-1)/N}}{\tau}+\Lambda_N u^{n+1}=f^n.$$

- Схема для неоднородной задачи
- Может быть заменена на введение правой части во все уравнения (с весовыми множителями)
- Схемы расщепления по направлениям абсолютно устойчивы



Устойчивость схемы

$$\mathbf{A} \geqslant 0 \qquad (\Lambda_n u, u) \geqslant 0,$$

$$u^{n+1} = (\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda^n)^{-1}(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda^n)u^n$$

$$\frac{(u^{n+1}, u^{n+1}) - (u^n, u^n)}{2\tau} + \left(\Lambda^n \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \frac{u^{n+1} + u^n}{2}\right) = 0$$

$$\left\|u^{n+1}\right\| \leqslant \left\|u^n\right\|$$

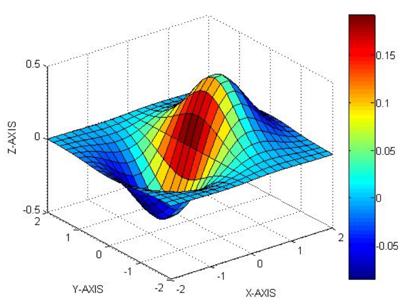


Схема Кранка-Никольсон

$$\Lambda = \sum_i^N \Lambda_i \qquad\qquad \Lambda = \Lambda(t^{n+1/2})$$

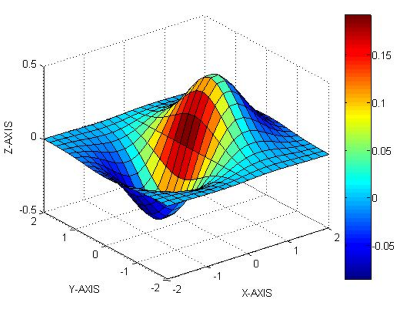
$$\frac{u^{n+1/2}-u^n}{\tau} + \Lambda_1 \frac{u^{n+1/2}+u^n}{2} = 0$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau} + \Lambda_2 \frac{u^{n+1}+u^{n+1/2}}{2} = 0$$

$$u^{n+1} = \mathbf{T}^n u^n$$

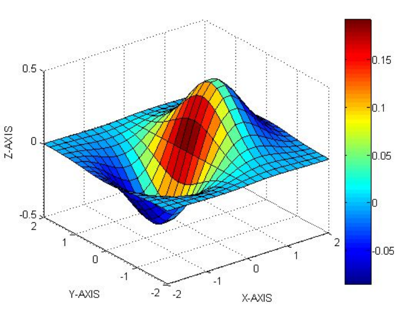
$$\mathbf{T}^n = (\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_2)^{-1}(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_2)(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1)^{-1}(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_1)$$

$\frac{\tau}{2}\,\|\Lambda_i\| < 1$ (условие устойчивости)



Содержание

- Понятие о методах расщепления.
- Локально-одномерные схемы.
- **Послойные схемы расщепления.**
- Расщепление по физическим процессам.
- Расщепление с факторизацией.
- Методы «предиктор-корректор»



Общая схема методов расщепления

$$\frac{u^{n+1/N}-u^n}{\tau}+\mathbf{\Lambda}_{10}u^n+\mathbf{\Lambda}_{11}u^{n+1/N}=0,$$

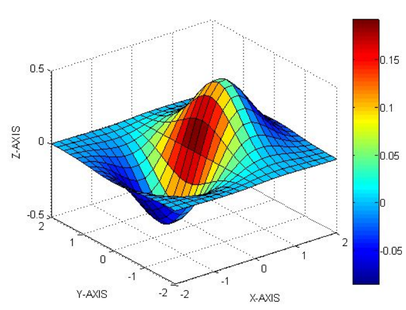
$$\frac{u^{n+2/N}-u^{n+1/N}}{\tau}+\mathbf{\Lambda}_{20}u^n+\mathbf{\Lambda}_{21}u^{n+1/N}+\mathbf{\Lambda}_{22}u^{n+2/N}=0,$$

$$\cdots$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+\frac{N-1}{N}}}{\tau}+\mathbf{\Lambda}_{N0}u^n+\mathbf{\Lambda}_{N1}u^{n+1/2}+\ldots+\mathbf{\Lambda}_{NN}u^{n+1}=0.$$

$\|C_iC_{i-1}\ldots C_1\|\leqslant 1+c\tau, \quad c=\mathrm{const},$ (условие устойчивости)

$C_i=(\mathbf{E}+\tau\Lambda_{ii})^{-1}(\mathbf{E}+\tau\Lambda_{i,i-1}), i=1,2,\ldots,N$



Двуслойная схема расщепления

- Двуслойная схема расщепления с весовыми коэффициентами

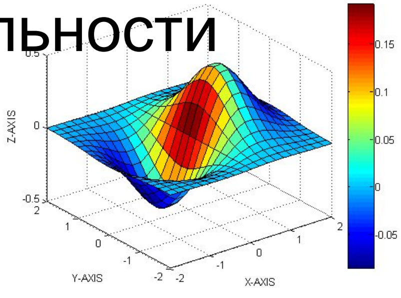
$$\frac{u^{n+1/N}-u^{n}}{\tau}+\Lambda_1\left[(1-\sigma)u^{n}+\sigma u^{n+1/N}\right]=0,$$

$$\frac{u^{n+2/N}-u^{n+1/N}}{\tau}+\Lambda_2\left[(1-\sigma)u^{n+1/N}+\sigma u^{n+2/N}\right]=0,$$

$$\cdots$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+\frac{N-1}{N}}}{\tau}+\Lambda_N\left[(1-\sigma)u^{n+\frac{N-1}{N}}+\sigma u^{n+1}\right]=0.$$

- Схема абсолютно устойчива при положительности всех разностных операторов



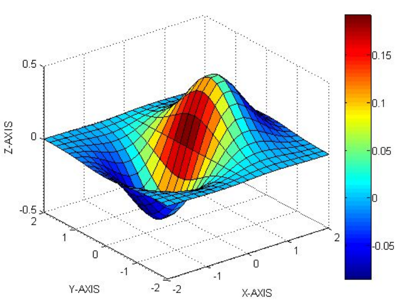
Расщепление уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, t \in \Omega_t, \{x, y, z\} \in \Omega.$$

$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y + \mathbf{A}_z \qquad \Lambda = \Lambda_{xx} + \Lambda_{yy} + \Lambda_{zz}$$

$$\Lambda_{xx} = \frac{u_{m-1,jk} - 2u_{mjk} + u_{m+1,jk}}{h_x^2}$$



Расщепление уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, t \in \Omega_t, \{x, y, z\} \in \Omega.$$

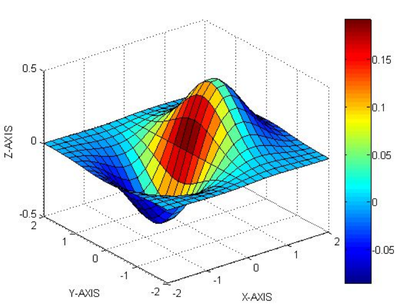
$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$$

Локально-одномерная схема

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} + \Lambda_{xx} u^{n+1/3} = 0,$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} + \Lambda_{yy} u^{n+2/3} = 0,$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} + \Lambda_{zz} u^{n+1} = 0.$$



Расщепление уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, t \in \Omega_t, \{x, y, z\} \in \Omega.$$

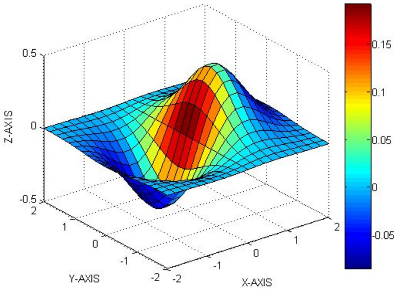
$$\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$$

Схема с весами

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} + \Lambda_{xx}\left[(1-\sigma)u^n + \sigma u^{n+1/3}\right] = 0,$$

$$\frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} + \Lambda_{yy}\left[(1-\sigma)u^{n+1/3} + \sigma u^{n+2/3}\right] = 0,$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} + \Lambda_{zz}[(1-\sigma)u^{n+2/3} + \sigma u^{n+1}] = 0.$$



Методы двуциклического покомпонентного расщепления

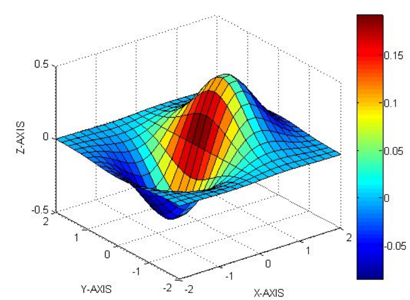
$$\frac{u^{n-1/2}-u^{n-1}}{\tau}+\Lambda_1\frac{u^{n-1/2}+u^{n-1}}{2}=0,$$

$$\frac{u^{n}-u^{n-1/2}}{\tau}+\Lambda_2\frac{u^{n}+u^{n-1/2}}{2}=0,$$

$$\frac{u^{n+1/2}-u^{n}}{\tau}+\Lambda_2\frac{u^{n+1/2}-u^{n}}{2}=0,$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau}+\Lambda_1\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{2}=0.$$

- Рассматривается численное решение на двух последовательных шагах $[t^{n-1}, t^{n+1}]$
- Разностные операторы явно зависят от времени $\Lambda_i = \Lambda_i(t^n)$



Методы двуциклического покомпонентного расщепления

$$u^{n+1} = \mathbf{T}^n u^{n-1}$$

$$\mathbf{T}^n = \left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)^{-1}\left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)^{-1}\left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) \times$$

$$\times\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)^{-1}\left(\mathbf{E}-\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)^{-1}\left(\mathbf{E}-\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) = \mathbf{E} - 2\tau\Lambda + \frac{(2\tau)^2}{2}(\Lambda)^2 + \ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{A}u = f \qquad\qquad f^n = f(t_n)$$

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) u^{n-1/2} = \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) u^{n-1},$$

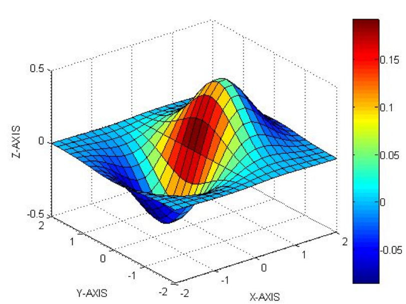
$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)(u^n - \tau f^n) = \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) u^{n-1/2},$$

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) u^{n+1/2} = \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)(u^n + \tau f^n),$$

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) u^{n+1} = \left(\mathbf{E} - \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) u^{n+1/2},$$

$$u^{n+1} = \mathbf{T}^n u^{n-1} + 2\tau \mathbf{T}_1^n \mathbf{T}_2^n f^n$$

$$\mathbf{T}_i^n = \left(\mathbf{E} + \tfrac{\tau}{2}\Lambda_i^n\right)^{-1}\left(\mathbf{E} - \tfrac{\tau}{2}\Lambda_i^n\right)$$



Пример: трехмерное уравнение диффузии

- Нестационарное уравнение диффузии
- Область интегрирования – параллелепипед
- Коэффициент диффузии в вертикальной плоскости зависит от координаты

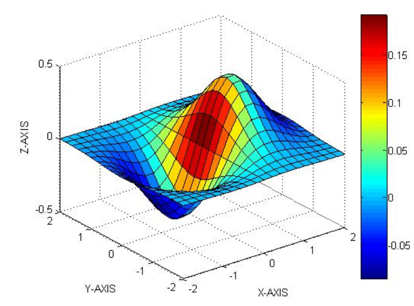
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\gamma\frac{\partial u}{\partial z} + \mu\Delta u + f$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\gamma\frac{\partial u_1}{\partial z} + f$$

Задача для вертикальной плоскости

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \frac{\partial u_3}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}$$

Задачи для координат в горизонтальной плоскости



Пример: трехмерное уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)u = f, \text{где}$$

$$\Lambda_1 u = -\frac{\mu}{h_x^2}(u_{m,j,k+1} - 2u_{mjk} + u_{m,j,k-1}),$$

$$\Lambda_2 u = -\frac{\mu}{h_y^2}(u_{m,j-1,k} - 2u_{mjk} + u_{m,j+1,k}),$$

$$\Lambda_3 u = \frac{1}{h_z}\left[-\frac{\gamma_{m+1/2,jk}}{h_z}(u_{m+1,jk} - u_{mjk}) + \frac{\gamma_{m-1/2}}{h_z}(u_{mjk} - u_{m-1,jk})\right]$$

$$\frac{u^{n+1/6} - u^n}{\tau} + \Lambda_1 \frac{u^{n+1/6} + u^n}{2} = 0,$$

$$\frac{u^{n+2/6} - u^{n+1/6}}{\tau} + \Lambda_2 \frac{u^{n+2/6} + u^{n+1/6}}{2} = 0,$$

$$\frac{u^{n+3/6} - u^{n+2/6}}{\tau} + \Lambda_3 \frac{u^{n+3/6} + u^{n+2/6}}{2} = \frac{f^{n+1/2}}{2},$$

$$\frac{u^{n+4/6} - u^{n+3/6}}{\tau} + \Lambda_3 \frac{u^{n+4/6} + u^{n+3/6}}{2} = \frac{f^{n+1/2}}{2},$$

$$\frac{u^{n+5/6} - u^{n+4/6}}{\tau} + \Lambda_2 \frac{u^{n+5/6} + u^{n+4/6}}{2} = 0,$$

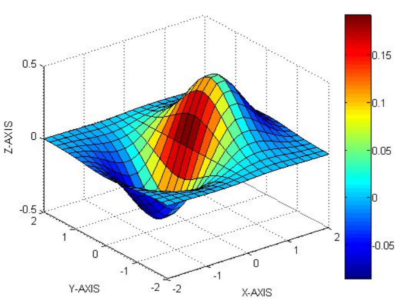
$$\frac{u^{n+1} - u^{n+5/6}}{\tau} + \Lambda_1 \frac{u^{n+1} + u^{n+5/6}}{2} = 0.$$

Пример: сопряженное уравнение переноса и диффузии

- Нестационарное уравнение переноса и диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3)u = f$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial(v_1 u)}{\partial x} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{\partial(v_2 u)}{\partial y} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \mathbf{A}_3 = \frac{\partial(v_3 u)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\gamma\frac{\partial u}{\partial z} + \sigma u$$



Пример: сопряженное уравнение переноса и диффузии

$$\frac{u^{n+1/6}-u^n}{\tau}+\Lambda_1\frac{u^{n+1/6}+u^n}{2}=0,$$

$$\frac{u^{n+2/6}-u^{n+1/6}}{\tau}+\Lambda_2\frac{u^{n+2/6}+u^{n+1/6}}{2}=0,$$

$$\frac{u^{n+3/6}-u^{n+2/6}}{\tau}+\Lambda_3\frac{u^{n+3/6}+u^{n+2/6}}{2}=\frac{f^{n+1/2}}{2},$$

$$\frac{u^{n+4/6}-u^{n+3/6}}{\tau}+\Lambda_3\frac{u^{n+4/6}+u^{n+3/6}}{2}=\frac{f^{n+1/2}}{2},$$

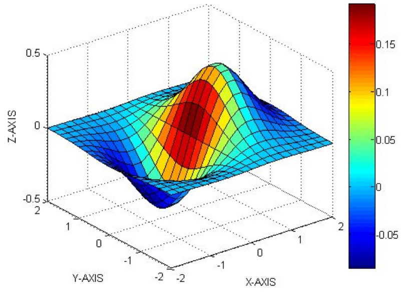
$$\frac{u^{n+5/6}-u^{n+4/6}}{\tau}+\Lambda_2\frac{u^{n+5/6}+u^{n+4/6}}{2}=0,$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+5/6}}{\tau}+\Lambda_1\frac{u^{n+1}+u^{n+5/6}}{2}=0,$$

$$\Lambda_1 u=-\frac{\mu}{h_x^2}(u_{m+1,jk}-2u_{mjk}+u_{m-1j,k})+\frac{(v_1u)_{m+1,jk}-(v_1u)_{m-1,jk}}{2h_x},$$

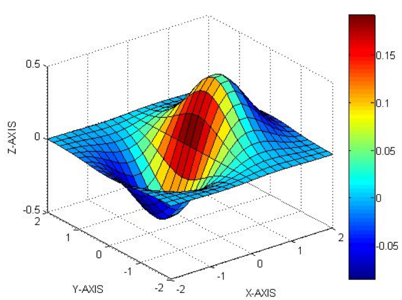
$$\Lambda_2 u=-\frac{\mu}{h_y^2}(u_{m,j+1,k}-2u_{mjk}+u_{m,j-1,k})+\frac{(v_2u)_{m,j+1,k}-(v_2u)_{m,j-1,k}}{2h_y},$$

$$\Lambda_3 u=\frac{1}{h_z}\left[-\frac{\gamma_{m+1/2,jk}}{h_z}(u_{m+1,jk}-u_{mjk})+\frac{\gamma_{m-1/2}}{h}(u_{mjk}-u_{m-1,jk})\right]+$$
$$+\frac{(v_3u)_{m,j,k+1}-(v_3u)_{m,j,k-1}}{2h_z}+\sigma u_{mjk}.$$



Содержание

- Понятие о методах расщепления.
- Локально-одномерные схемы.
- Послойные схемы расщепления.
- **Расщепление по физическим процессам.**
- Расщепление с факторизацией.
- Методы «предиктор-корректор»



Пример: сопряженное уравнение переноса и диффузии

- Расщепление по физическим процессам

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (v_1, u)}{\partial x} + \frac{\partial (v_2, u)}{\partial y} - \mu \Delta u - \sigma u = f$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0$$

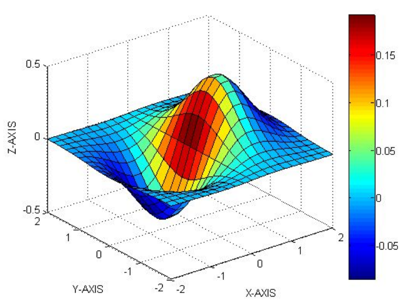
Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial (v_1, u)}{\partial x} + \frac{\partial (v_2, u)}{\partial y} = 0$$

Первый этап – решение уравнения переноса

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \mu \Delta u + \sigma u_2 = f$$

Второй этап – уравнения диффузии и поглощения



Пример: система уравнений газовой динамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

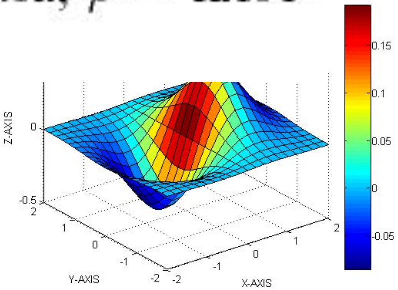
$$\frac{\partial (\rho u_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} u_1) + \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho u_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} u_2) + \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{v}) + \operatorname{div}(P \mathbf{v}) = 0,$$

$$P = P(\rho, \varepsilon), e = \varepsilon + \frac{u_1^2 + u_2^2}{2},$$

u_1, u_2 — компоненты вектора скорости $\mathbf{v}$, P — давление газа, ρ — плотность, ε — внутренняя энергия.



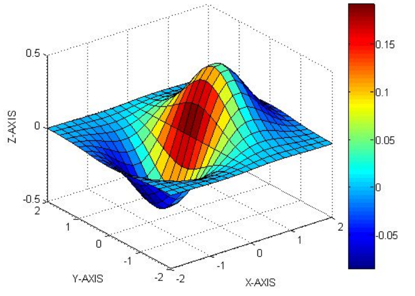
Пример: система уравнений газовой динамики

- 1 этап: жидкость внутри ячеек считается моментально замороженной, рассчитывается изменение величин, относящихся к ячейке в целом.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \rho \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(P\mathrm{v}) = 0.$$



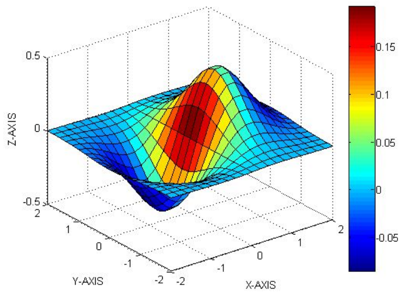
Пример: система уравнений газовой динамики

- 2 этап: происходит движение газа и перераспределение массы, плотности, импульса, энергии.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

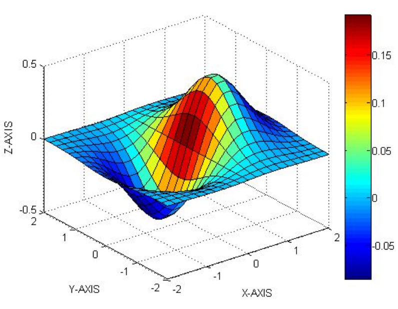
$$\frac{\partial (\rho u_1)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_1 \mathbf{v}) = 0, \frac{\partial (\rho u_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u_2 \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{v}) = 0.$$



Содержание

- Понятие о методах расщепления.
- Локально-одномерные схемы.
- Послойные схемы расщепления.
- Расщепление по физическим процессам.
- **Расщепление с факторизацией.**
- Методы «предиктор-корректор»



Методы расщепления с факторизацией

$$\mathbf{B}\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{A}u = f, u(t_0) = u_0$$

$$\mathbf{B}u^{n+1} = F^n, \text{где } F^n = (\mathbf{B} - \tau\mathbf{A})u^n + \tau f^n \qquad \mathbf{B}_i v = F.$$

Назовем схему *разностной схемой с факторизованным оператором* $\mathbf{B}$, если возможно его представление в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 \ldots \mathbf{B}_N.$$

решение уравнения

$$\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 \ldots \mathbf{B}_N u^{n+1} = F^n$$

может быть найдено в результате последовательного решения p уравнений

$$\mathbf{B}_1 u_1 = F^n, \qquad \ldots$$

$$\mathbf{B}_2 u_2 = u_1, \qquad \mathbf{B}_i u_i = u_{i-1}$$

Метод переменных направлений

- Уравнение теплопроводности

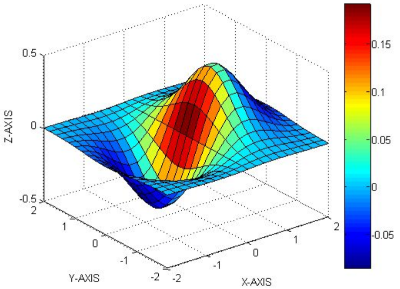
$$\frac{u^{n+1/2}-u^n}{\frac{1}{2}\tau}-(\Lambda_1 u^{n+1/2}+\Lambda_2 u^n)=f^n,$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\frac{1}{2}\tau}-(\Lambda_1 u^{n+1/2}+\Lambda_2 u^{n+1})=f^n$$

$$\left(\mathbf{E}-\frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(\mathbf{E}-\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)u^{n+1}=\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)u^n$$

$$\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2u^{n+1} \;=\; F^n \qquad \mathbf{B}_1 \;=\; \mathbf{E}-\tfrac{\tau}{2}\Lambda_1,\; \mathbf{B}_2 \;=\; \mathbf{E}-\tfrac{\tau}{2}\Lambda_2,\; F^n \;=\left(\mathbf{E}+\tfrac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(\mathbf{E}+\tfrac{\tau}{2}\Lambda_2\right)u^n$$

$$\mathbf{B}_1u_1=F^n,\mathbf{B}_2u^{n+1}=u_1$$



Неявная схема с приближенной факторизацией

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+\Lambda u^{n+1}=0, n=0,1,\ldots,\Lambda=\sum_{i=1}^{N}\Lambda_i, \Lambda_i>0.$$

$$(\mathbf{E}+\tau\Lambda)u^{n+1}=u^n$$

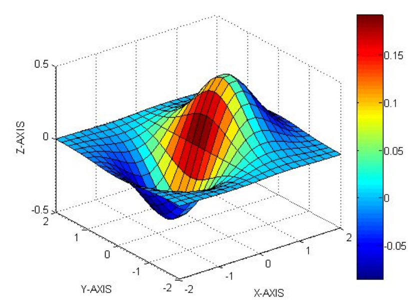
Факторизуем схему приближенно, с точностью до членов второго порядка.

$$(\mathbf{E}+\tau\Lambda_1)(\mathbf{E}+\tau\Lambda_2)\ldots(\mathbf{E}+\tau\Lambda_N)=\mathbf{E}+\tau\Lambda+\tau^2\mathbf{R}$$

$$\mathbf{R}=\sum_{i<j}\Lambda_i\Lambda_j+\tau\sum_{i<j<k}\Lambda_i\Lambda_j\Lambda_k+\ldots+\tau^{n-2}\Lambda_1\ldots\Lambda_n$$

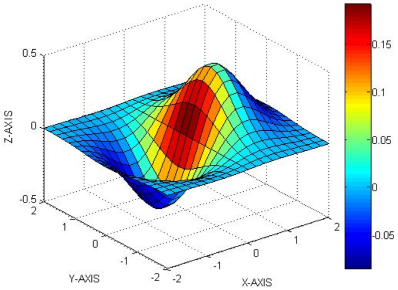
$$\mathbf{B}u^{n+1}=u^n, \mathbf{B}=\prod_{i=1}^{n}\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_i=\mathbf{E}+\tau\Lambda_i$$

$$\begin{gathered}(\mathbf{E}+\tau\Lambda_1)u^{n+1/N}=u^n,\\ (\mathbf{E}+\tau\Lambda_2)u^{n+2/N}=u^{n+1/N},\\ \ldots\\ (\mathbf{E}+\tau\Lambda_N)u^{n+1}=u^{n+\frac{N-1}{N}}.\end{gathered}$$



Содержание

- Понятие о методах расщепления.
- Локально-одномерные схемы.
- Послойные схемы расщепления.
- Расщепление по физическим процессам.
- Расщепление с факторизацией.
- **Методы «предиктор-корректор»**



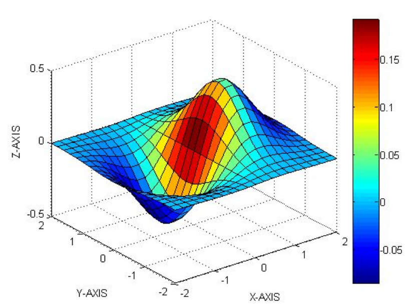
Метод «предиктор-корректор»

- На первом этапе производится решение по явной схеме с большим запасом устойчивости.
- На втором этапе задача решается по условно неявной схеме с высоким порядком аппроксимации.

$$\frac{u^{n+1/4}-u^n}{\tau/2}+\Lambda_1 u^{n+1/4}=0,$$
$$\frac{u^{n+1/2}-u^{n+1/4}}{\tau/2}+\Lambda_2 u^{n+1/2}=0,$$
$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+\Lambda u^{n+1/2}=0.$$

$$\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)u^{n+1/2}=\varphi^n,$$
$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+\Lambda u^{n+1/2}=0,$$

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}+\Lambda\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_2\right)^{-1}\left(\mathbf{E}+\frac{\tau}{2}\Lambda_1\right)^{-1}u^n=0.$$



Метод «предиктор-корректор»

- Если разностный оператор представляется в виде

$$\Lambda = \sum_i \Lambda_i$$

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_1\right) u^{n+1/2N} = u^n + \frac{\tau}{2} f^{n+1/2},$$

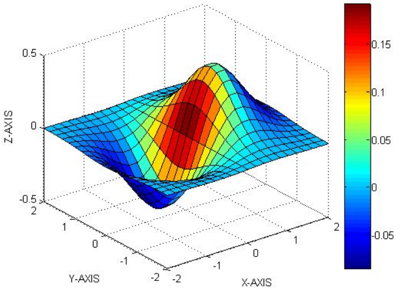
$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_2\right) u^{n+2/2N} = u^{n+1/2N},$$

$$\cdots$$

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_N\right) u^{n+1/2} = u^{n+\frac{N}{2N}},$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda u^{n+1/2} = f^{n+1/2}.$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda \prod_{i=N}^{1} \left(\mathbf{E} + \frac{\tau}{2}\Lambda_i\right)^{-1} \left(u^n + \frac{\tau}{2} f^{n+1/2}\right) = f^{n+1/2}.$$



Метод «предиктор-корректор»

- Пример для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

$$\frac{u^{n+1/6} - u^n}{\tau/2} + \Lambda_1 u^{n+1/6} = 0,$$

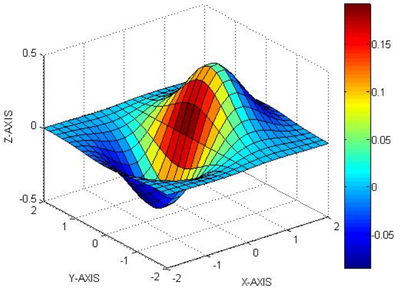
$$\frac{u^{n+1/3} - u^{n+1/6}}{\tau/2} + \Lambda_2 u^{n+1/3} = 0,$$

$$\frac{u^{n+1/2} - u^{n+1/3}}{\tau/2} + \Lambda_3 u^{n+1/2} = 0,$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda u^{n+1/2} = 0.$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \Lambda \frac{u^{n+1} + u^n}{2} + \frac{\tau^2}{4}(\Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3 + \Lambda_2\Lambda_3)\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} +$$
$$+ \frac{\tau^3}{8}\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = 0.$$

Схема абсолютно устойчива.



Применение методов расщепления

- «Несимметричность» задачи по координатам – расщепление по координатам.
- Изотропная линейная (или линеаризуемая) задача – расщепление по координатам.
- Независимые физические процессы – расщепление по физическим процессам.
- Сложные взаимосвязи внутри разностной схемы – методы предиктор-корректор.