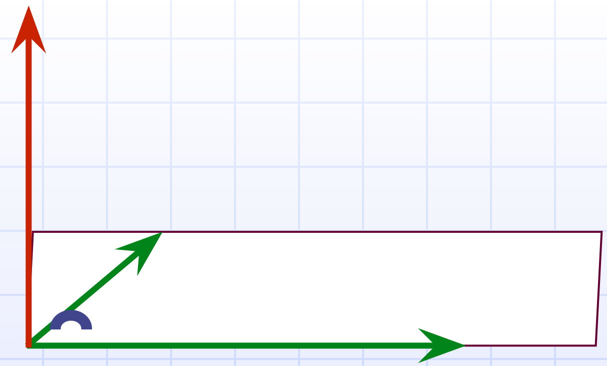
Қолданбалы курс “Сызықтық алгебра және аналитикалық геометрия”

Сабақ тақырыбы:

Екі векторды векторлық көбейту



№79 орта мектептің математика пәнінің мұғалімі
Мажитова Н.М.

Сабақ мақсаты:

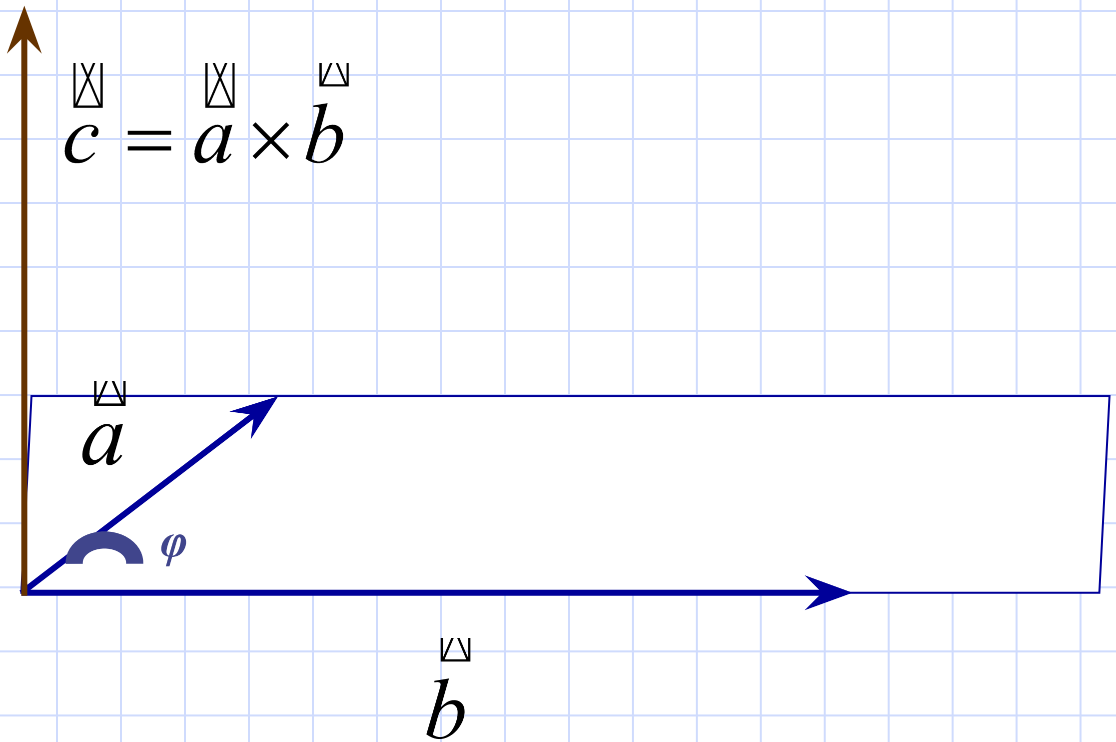
- **Оқушыларға екі векторлдың векторлық көбейтіндісі туралы түсінік беру, олардың геометриялық және алгебралық қасиеттерімен таныстыру.**
- **Оқушыларға екі векторлдың векторлық көбейтіндісі көмегімен кейбір геометриялық есептерді шығаруды үйрету.**
- **Оқушыларды өз білімдерін жүйелеуге және векторларға берілген есептерді шығаруға бейімдеу.**

Қайталау сұрақтары:

1. Вектор деген не? Векторды қалай белгілейді?
2. Вектордың абсолют шамасы деген не?
3. Нөлдік вектор деген не?
4. Қандай векторлар тең деп аталады?
5. Векторларды қосудың «үшбұрыш ережесін» тұжырымдап беріңдер.
6. Векторларды қосудың «параллелограмм ережесін» тұжырымдап беріңдер.
7. Қандай векторлар коллинеар векторлар деп аталады? Коллинеар векторлардың қасиеті.
8. Векторлар арасындағы бұрыш қалай анықталады?
9. Векторлардың скаляр көбейтіндісі дегенге анықтама беріңдер.
10. Бірлік векторлар. Векторды үш оське жіктеу.

Анықтама. Нөлдік емес $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ символымен белгіленген мына үш шартты қанағаттандыратын $\vec{c}$ векторын атайды:

1. $\vec{c}$ векторының ұзындығы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының ұзындықтарын олардың арасындағы бұрыштың синусына көбейткенге тең, яғни $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, мұндағы φ - $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрыш.
2. $\vec{c}$ векторы $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының әрқайсысына перпендикуляр орналасқан.
3. $\vec{c}$ векторының бағыты $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары оң жақты үштік болатындай бағытта бағытталған.



Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының кемінде біреуі нөлдік вектор болса, онда олардың векторлық көбейтіндісі нөлдік векторға тең деп алынады.

Екі вектордың векторлық көбейтіндісі туралы түсінік механикадан алынған.

Егер $\vec{b}$ векторы қандай болса да бір ***M*** нүктесіне түсірілген күшті бейнелесе, ал $\vec{a}$ векторы $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$ болып ***O*** нүктесіне түсірілсе, онда $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ векторы ***O*** нүктесіне қатысты $\vec{b}$ күшінің моментіне тең болады.

II. Векторлық көбейтіндінің геометриялық қасиеттері.

1 - Теорема. Нөлдік емес екі $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары коллинеар болуы үшін, олардың векторлық көбейтіндісінің нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті:

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \qquad \vec{b} \neq \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \qquad \Longleftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Қажеттілік. $\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ *векторлары коллинеар болсын. Мына жағдайлар болуы мүмкін:*

1. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ *, яғни* $\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ *векторлары бағыттас болсын, сонда олардың арасындағы бұрыш* 0^0 *-қа тең болады. Сондықтан,* $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 0^0 = 0$ *, бұдан* $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ *болады;*

2. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ *, яғни* $\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ *қарама-қарсы бағытталған векторлар болсын. Сонда олардың арасындағы бұрыш* 180^0 *-қа тең болады. Сондықтан,* $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 180^0 = 0$*, бұдан* $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ *, яғни, екі жағдайда да* $\vec{a} \times \vec{b} = 0$*.*

Жеткіліктілік. $\vec{a} \times \vec{b}$ *болсын.*

Сонда $0 = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$.

$\left|\vec{a}\right| \neq 0, \ \left|\vec{b}\right| \neq 0$ *болғандықтан, бұдан* $\sin\varphi = 0$

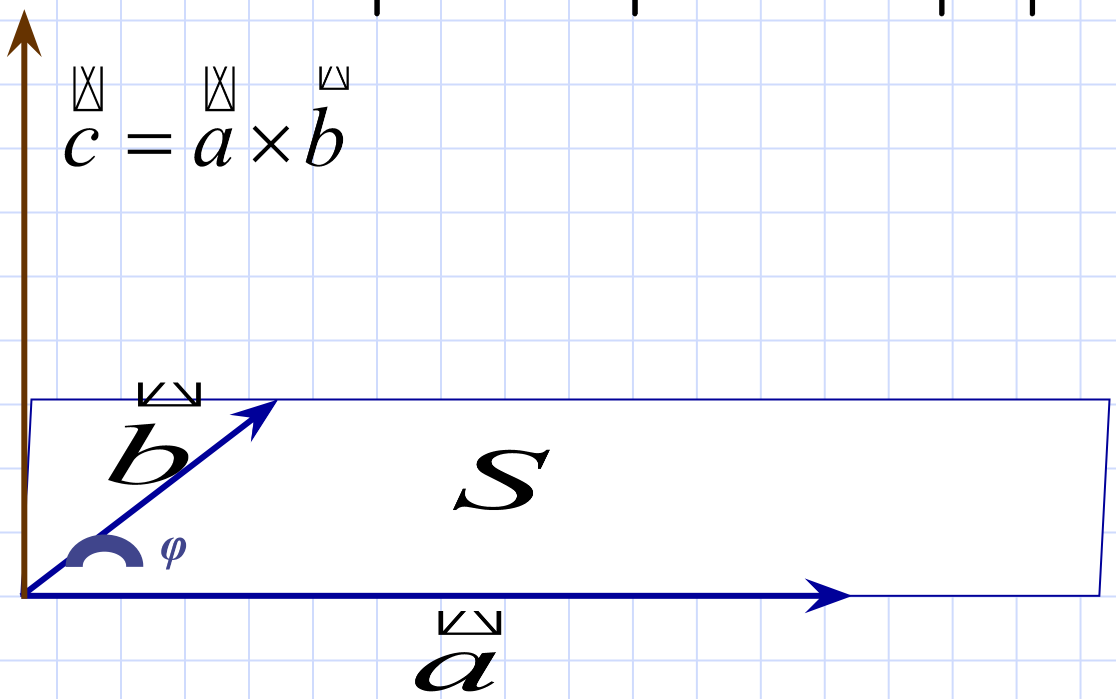
теңдігі шығады, яғни $\varphi = 0^0$ *немесе* $\varphi = 180^0$.

Ал бұл $\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ *векторларының коллинеар*

векторлар екенін көрсетеді.

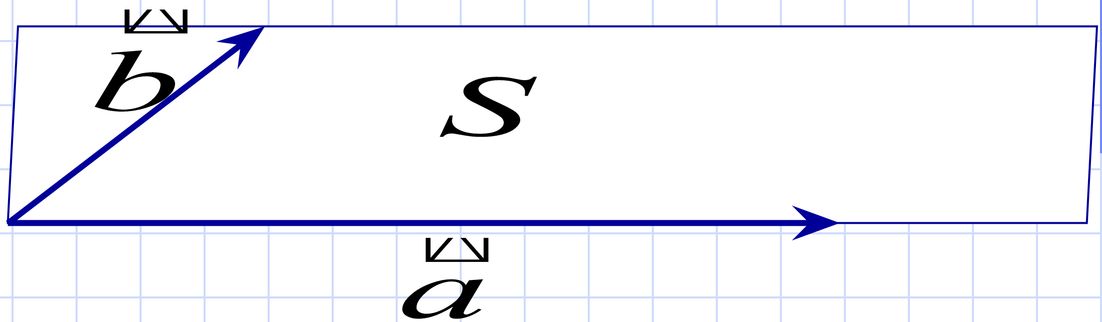
2-теорема. $\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ *векторларының векторлық көбейтіндісінің ұзындығы ортақ бас нүктеден шыққан* $\vec{a}$ *және* $\vec{b}$ *векторларына салынған параллелограмның ауданына тең.*

Анықтама бойынша $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi$



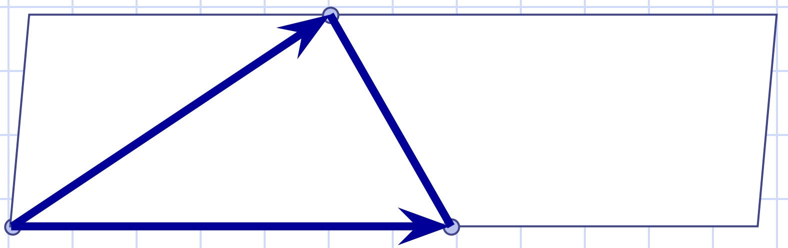
Параллелограмның ауданы:

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$



Үшбұрыштың ауданы:

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$



Бірлік векторлардың векторлық көбейтіндісі:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \qquad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

Екі вектордың векторлық көбейтіндісінің алгебралық қасиеттері:

1-қасиет. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

қарсы ауыстырымдылық қасиет

2-қасиет. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

сан көбейткішіне қатысты терімділік қасиет

3-қасиет. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

үлестірімділік қасиет

4-қасиет. Кез келген $\vec{a}$ векторы үшін

$$\vec{a}\times\vec{a}=0$$

Декарттық тік бұрышты координаталарымен берілген векторлардың векторлық көбейтіндісінің өрнегі.

$$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)\ ,\quad \vec{b}(x_2; y_2; z_2)$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Есеп №1. Параллелограмның қабырғаларындағы векторлар берілген: $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

Осы параллелограмның ауданын табайық.

Шешуі: $\vec{a} = (1;-3\ ;1)$ $\vec{b} = (2;-1;3)$

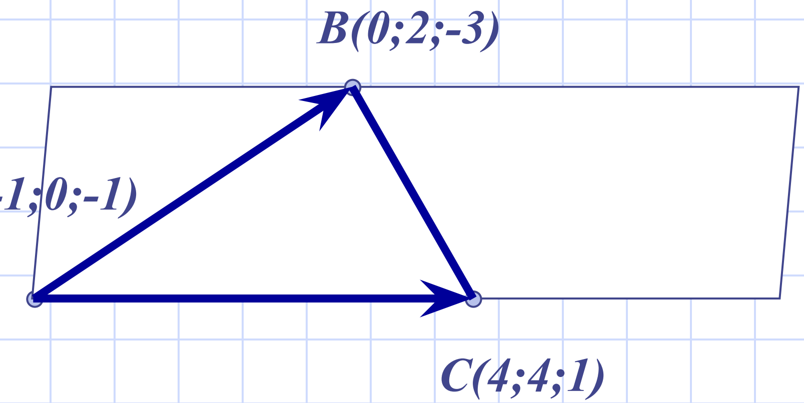
Параллелограмның ауданы:

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k} = (-8;-1;5)$$

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{64+1+25} = \sqrt{90} = \sqrt{9 \cdot 10} = 3\sqrt{10}$$

Жауабы: $3\sqrt{10}$

Есеп №2. Төбелері A(-1;0;-1), B(0;2;-3), C(4;4;1) нүктелерінде жатқан үшбұрыш ауданын тап.



Шешуі:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (1;2;-2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (5;4;2)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 12\vec{j} - 6\vec{k} =$$

$$= (12;-12;-6) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (12;-12;-6)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{12^2 + (-12)^2 + (-6)^2} = \sqrt{144+144+36} = \sqrt{324} = 18$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9; \qquad S_{\Delta} = 9.$$

Есеп №3. Жақшаларды ашып өрнектерді ықшамда:

1 – тапсырма: $\vec{i}\times\left(\vec{j}+\vec{k}\right)-\vec{j}\times\left(\vec{i}+\vec{k}\right)+\vec{k}\times\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$

$$\vec{i}\times\left(\vec{j}+\vec{k}\right)-\vec{j}\times\left(\vec{i}+\vec{k}\right)+\vec{k}\times\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)=\vec{i}\times\vec{j}+\vec{i}\times\vec{k}-\vec{j}\times\vec{i}-\vec{j}\times\vec{k}+\vec{k}\times\vec{i}+\vec{k}\times\vec{j}+\vec{k}\times\vec{k}=$$

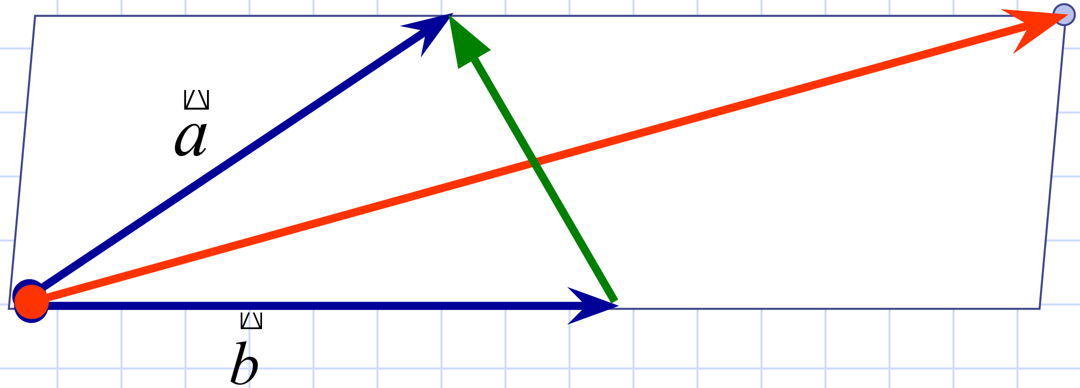
$$=\vec{k}-\vec{j}+\vec{k}-\vec{i}+\vec{j}-\vec{i}+0=2\vec{k}-2\vec{i}=2\left(\vec{k}-\vec{i}\right)$$

2 – тапсырма: $(a+b+c)\times c+(a+b+c)\times b+(b-c)\times a$

$$(a+b+c)\times c+(a+b+c)\times b+(b-c)\times a=a\times c+b\times c+c\times c+a\times b+b\times b+c\times b+b\times a-c\times a=$$

$$=2a\times c+b\times c-b\times c+a\times b-a\times b+0+0=2a\times c$$

Есеп №4. Диагональдары $2\vec{m}-\vec{n}$ және $4\vec{m}-5\vec{n}$ болып табылатын, мұнда $\vec{m}$, $\vec{n}$ - бірлік векторлар және олардың арасындағы бұрыш 45^0, параллелограмның ауданын табыңдар.



Шешуі: $\vec{a}+\vec{b}=2\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{a}-\vec{b}=4\vec{m}-5\vec{n}$ **бір-біріне көбейтсек**

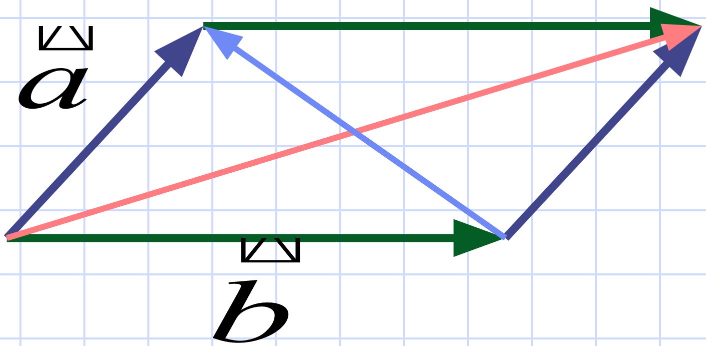
$$\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=8\vec{m}\cdot\vec{m}-10\vec{m}\cdot\vec{n}-4\vec{n}\cdot\vec{m}+5\vec{n}\cdot\vec{n}$$

$$0+2\vec{b}\cdot\vec{a}-0=-6\vec{m}\cdot\vec{n}=6\vec{n}\cdot\vec{m}=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2},$$

$$\vec{b}\cdot\vec{a}=\frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad S=1{,}5\sqrt{2}$$

Есеп №5. $\vec{a} = \vec{k} - \vec{j}$ және $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ векторларына салынған параллелограмның диагональдары мен ауданын табыңдар.

Шешуі: $\vec{a}(0;-1;1)$ $\vec{b}(1;1;1)$



$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (1;0;2)}$$

$$\boxed{\vec{a} - \vec{b} = (-1;-2;0)}$$

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{5} \qquad \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{5}$$

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|, \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (-2;1;1)$$

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Жауабы: $\sqrt{6}$

Тест сұрақтары:

1. A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1) үшбұрышының төбелері болса, A төбесіндегі үшбұрыштың бұрышын табыңыз.

A) 90^0 B) 60^0 C) 30^0 D) 45^0 E) 180^0

2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары өзара перпендикуляр. $|\vec{a}| = y$ болса, $(\vec{a} + 2\vec{b})(3\vec{a} - \vec{c})$ скаляр көбейтіндісін анықтаңыз.

A) y B) y^2 C) $3y$ D) $3y^2$ E) 3

3. Төбелері A(7;3;4), B(1;0;6), C(4;5;-2) нүктелерінде жатқан үшбұрыш ауданын тап.

A) 24 B) 23 C) 24,5 D) 23,5 E) 21

4. Егер $|\vec{b}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 17$ және $|\vec{a} - \vec{b}| = 15$ болса, онда $|\vec{a}|$ табыңыз.

A) 15 B) 13 C) 16 D) 14 E) 12

5. Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар арасындағы бұрыш 30^0, әрі скаляр көбейтіндісі $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$ болса, онда осы векторлар арқылы салынған параллелограмның ауданы қаншаға тең болады?

A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\sqrt{3}$

Тест сұрақтары:

1. A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1) үшбұрышының төбелері болса, А төбесіндегі үшбұрыштың бұрышын табыңыз.

   A) 90^0 B) 60^0 C) 30^0 D) 45^0 E) 180^0

2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары өзара перпендикуляр. $|\vec{a}| = y$ болса, $(\vec{a} + 2\vec{b})(3\vec{a} - \vec{c})$ скаляр көбейтіндісін анықтаңыз.

   A) y B) y^2 C) $3y$ D) $3y^2$ E) 3

3. Төбелері A(7;3;4), B(1;0;6), C(4;5;-2) нүктелерінде жатқан үшбұрыш ауданын тап.

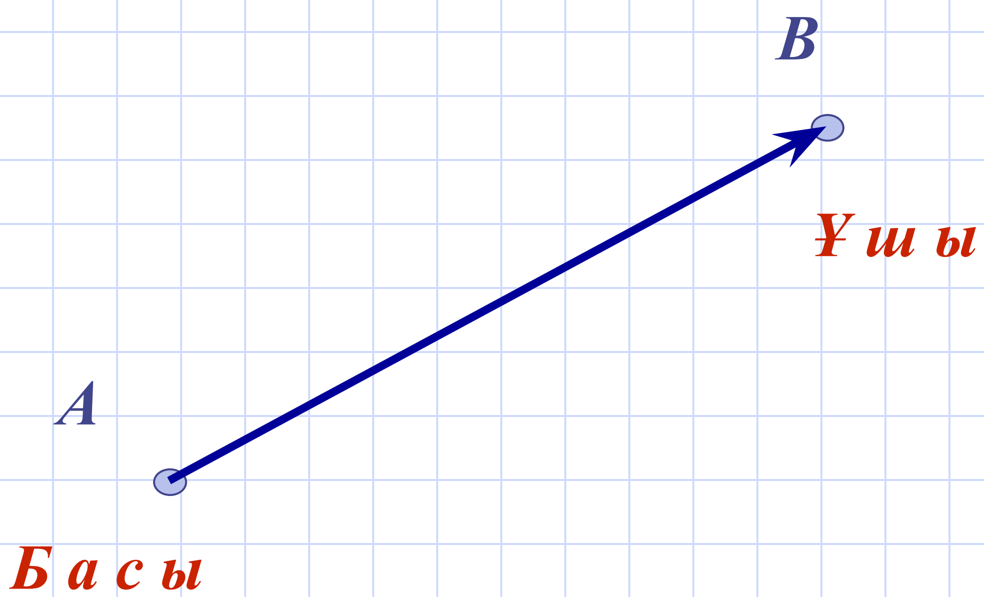
   A) 24 B) 23 C) 24,5 D) 23,5 E) 21

4. Егер $|\vec{b}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 17$ және $|\vec{a} - \vec{b}| = 15$ болса, онда $|\vec{a}|$ табыңыз.

A) 15 B) 13 C) 16 D) 14 E) 12

5. Егер $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлар арасындағы бұрыш 30^0, әрі скаляр көбейтіндісі $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$ болса, онда осы векторлар арқылы салынған параллелограмның ауданы қаншаға тең болады?

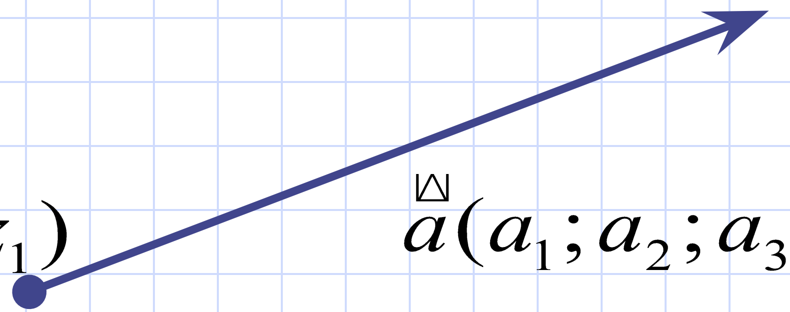
A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\sqrt{3}$



Векторларды белгілеу: $\overrightarrow{AB}$ *немесе* $\overrightarrow{a}$

Вектордың абсолют шамасы немесе модулі деп векторды кескіндейтін кесіндінің ұзындығын атайды және $|\vec{a}|,\ |\overrightarrow{AB}|$ **деп белгілейді.**

$$B(x_2; y_2; z_2)$$



$$A(x_1; y_1; z_1) \qquad \vec{a}(a_1; a_2; a_3)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$$

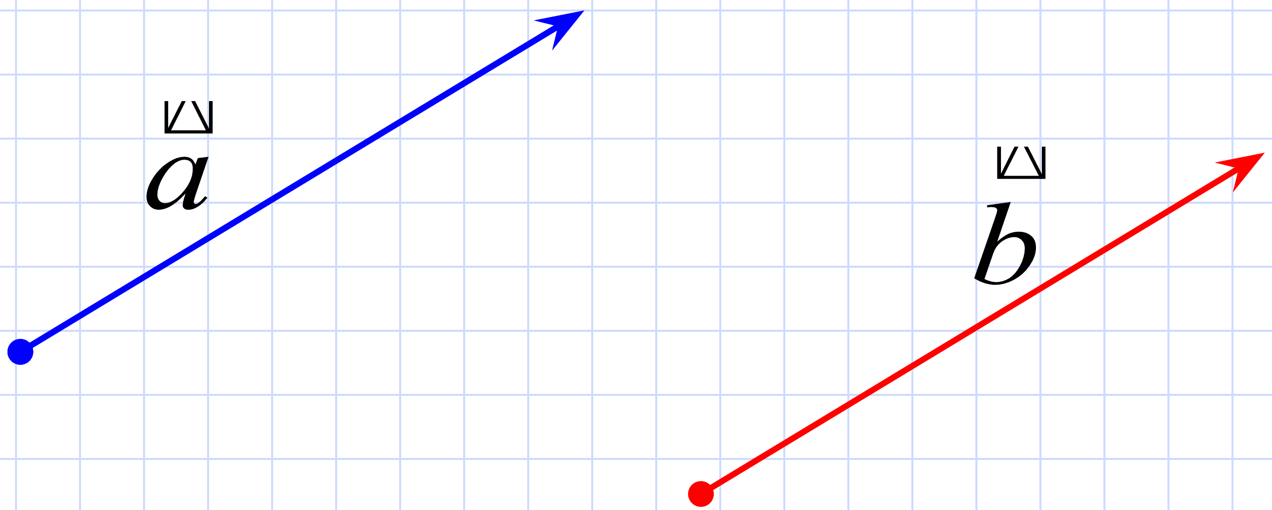
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Егер вектордың бас нүктесі оның ұшымен дәл келіп беттесіп жатса, онда ол векторды нөлдік вектор деп атайды және $\vec{0}$ **деп белгілейді.**

Нөлдік вектордың абсолют шамасы нөлге тең.

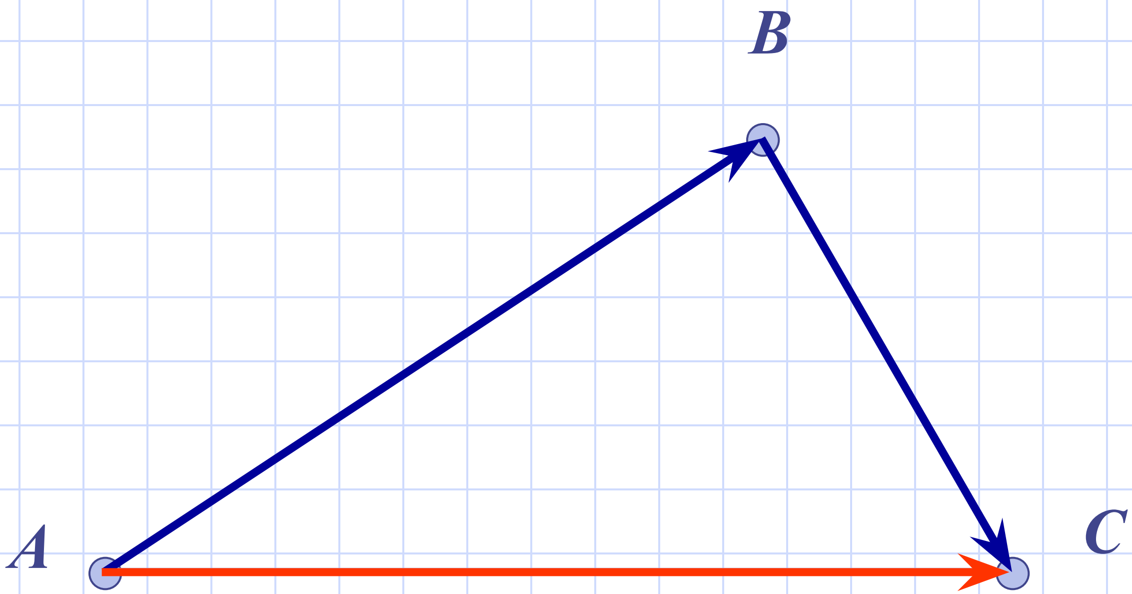
$$\left|\vec{0}\right| = 0$$

Векторлардың теңдігі



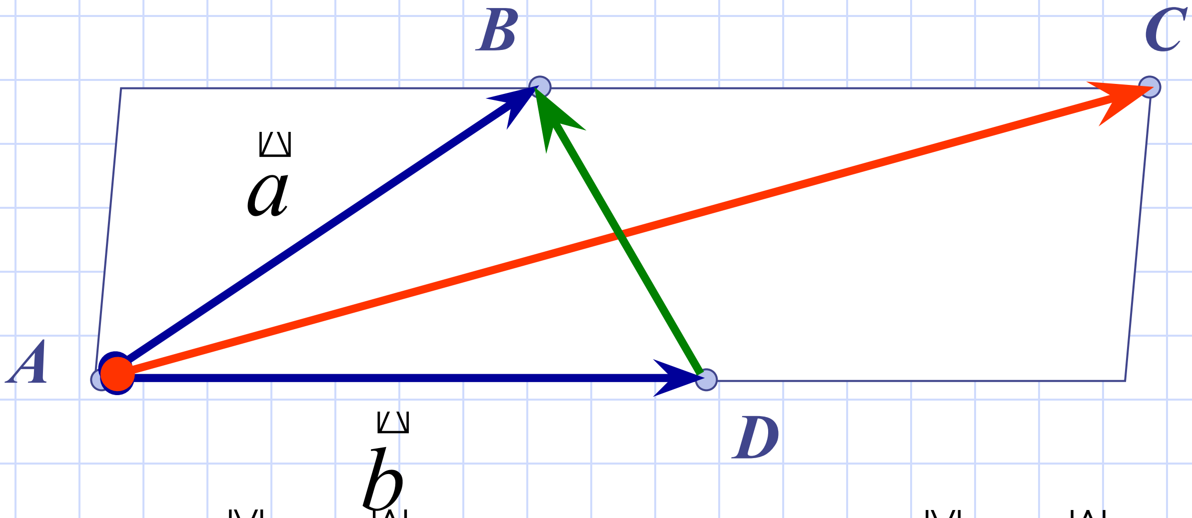
$$\vec{a} = \vec{b}$$

«Үшбұрыш» ережесі



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

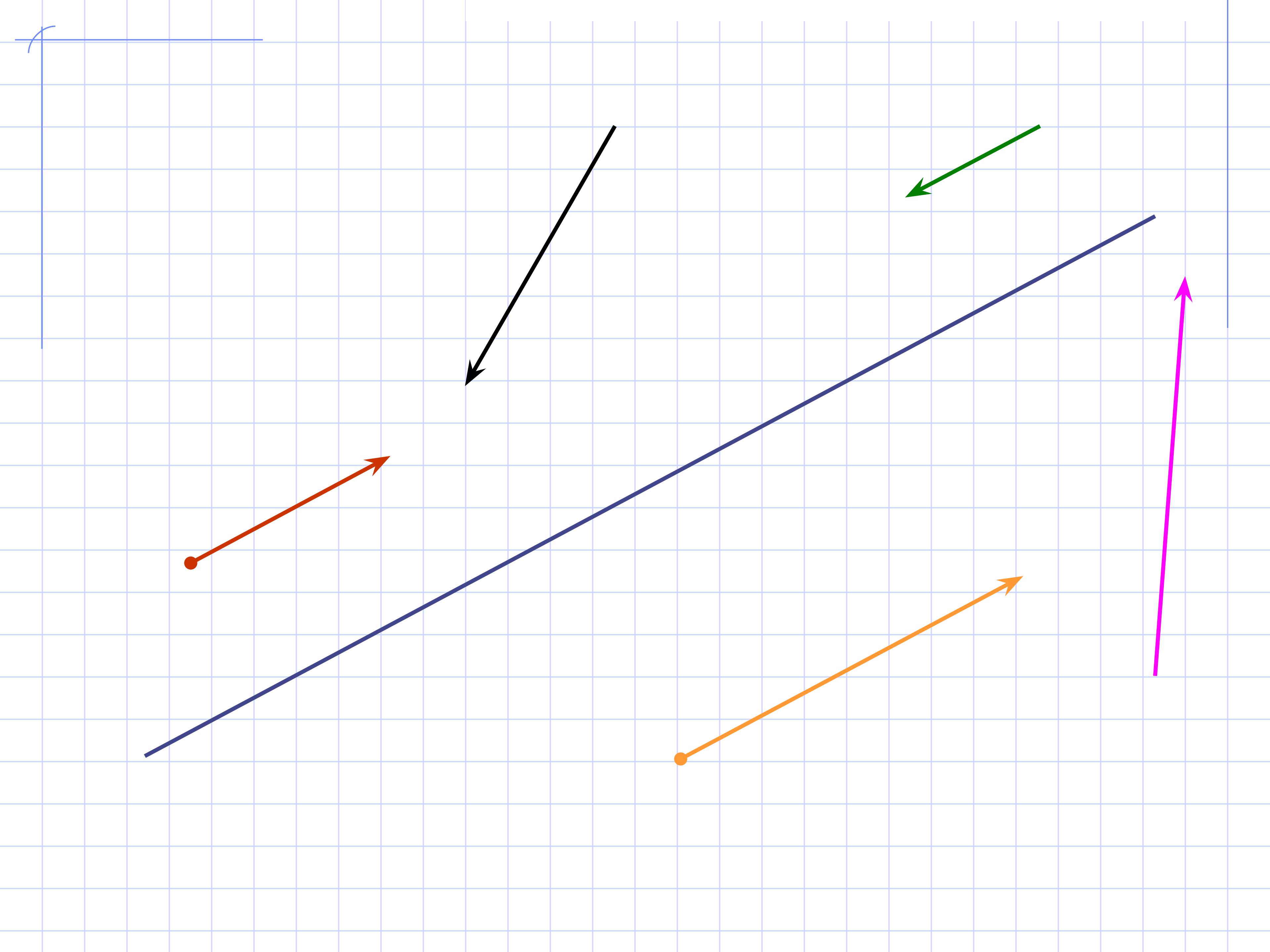
“Параллелограмм” ережесі



$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$$

Параллелограмның қасиеті бойынша:

$$\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 = \frac{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2}{2}$$



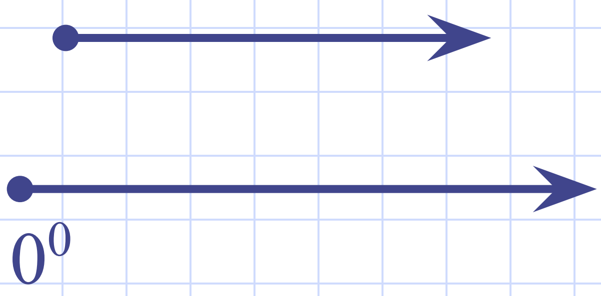
Бір түзу бойында немесе параллель түзулер бойында жатқан нөлдік емес екі вектор коллинеар векторлар деп аталады. Коллинер векторлардың сәйкес координаталары пропорционал болады.

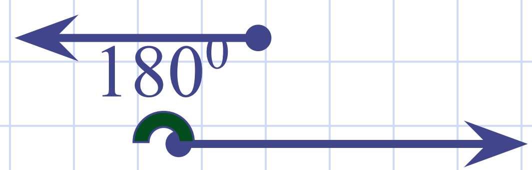
Белгілеуі: $\vec{a} \parallel \vec{b}$

$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) \qquad \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

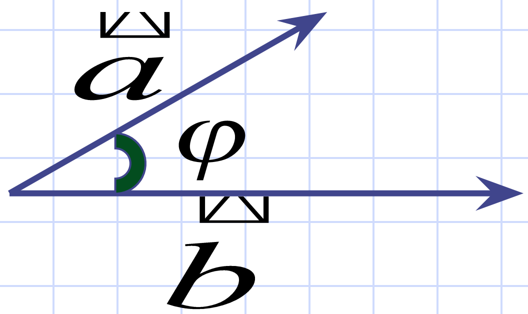
Нөлдік емес $\overrightarrow{AB}$ мен $\overrightarrow{AC}$ векторларының арасындағы бұрыш деп *BAC* бұрышын атайды. Кез келген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ екі вектордың арасындағы бұрыш деп бас нүктесі ортақ әрі олармен тең векторлардың арасындағы бұрышты айтады. Бірдей бағытталған векторлардың арасындағы бұрыш нөлге тең деп есептеледі, ал қарама-қарсы бағытталған векторлардың арасындағы бұрыш 180^0-қа тең.





$\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ мен $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ векторларының скаляр көбейтіндісі деп $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ санын атайды.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$

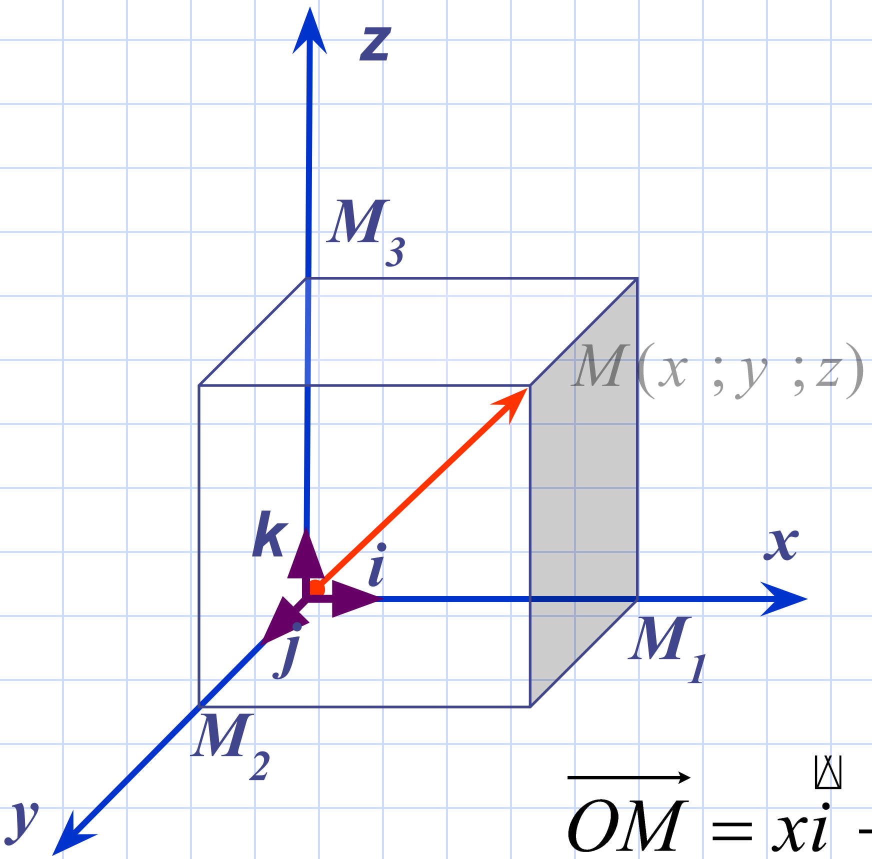
Ұзындығы бірге тең векторды бірлік вектор немесе орт дейміз.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 + \overrightarrow{OM}_3$$

$$\overrightarrow{OM}_1 = x\vec{i}$$

$$\overrightarrow{OM}_2 = y\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM}_3 = z\vec{k}$$



$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Үйге тапсырма:

№421, №427 есептер (В.П.Минорский)