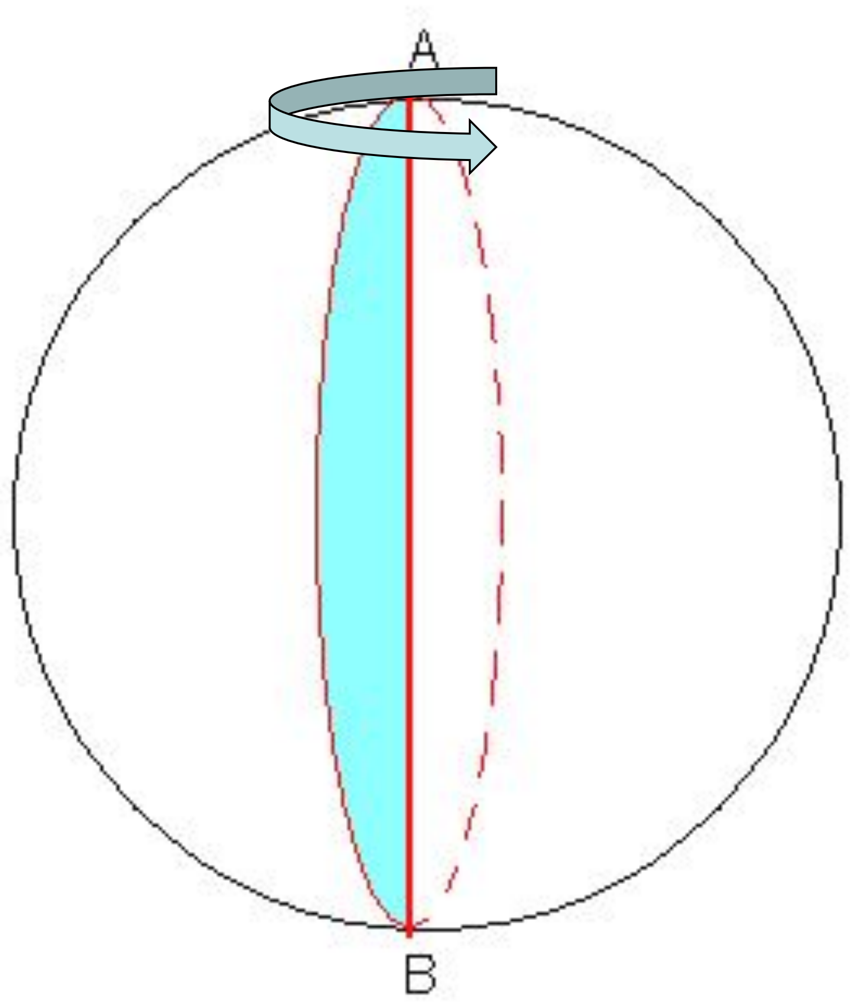
СФЕРА УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ

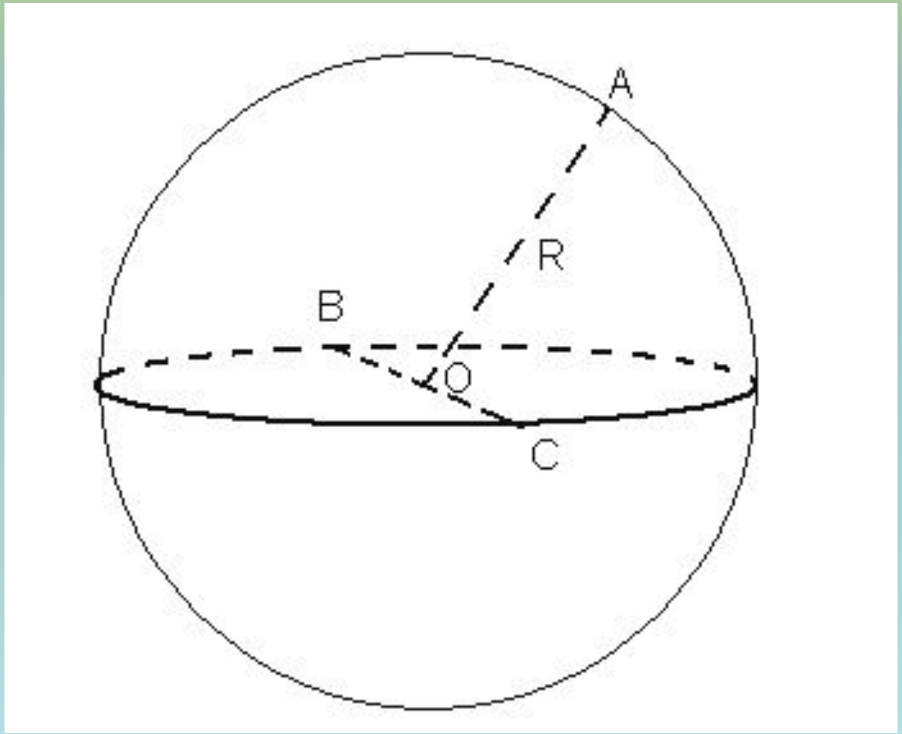
1. Понятие сферы и её элементов
2. Уравнение сферы в заданной системе координат

Тело вращения - сфера



Определение сферы

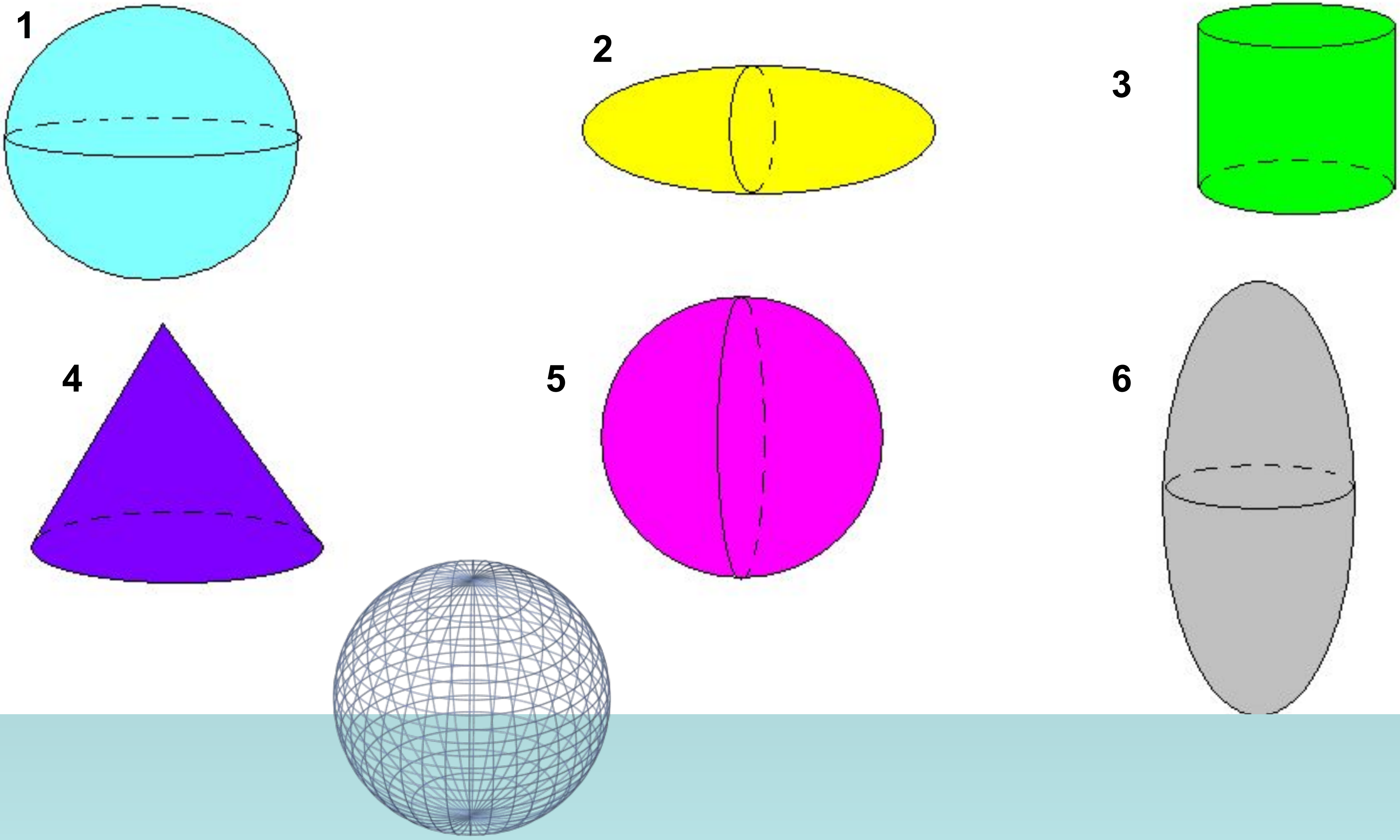
- Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.



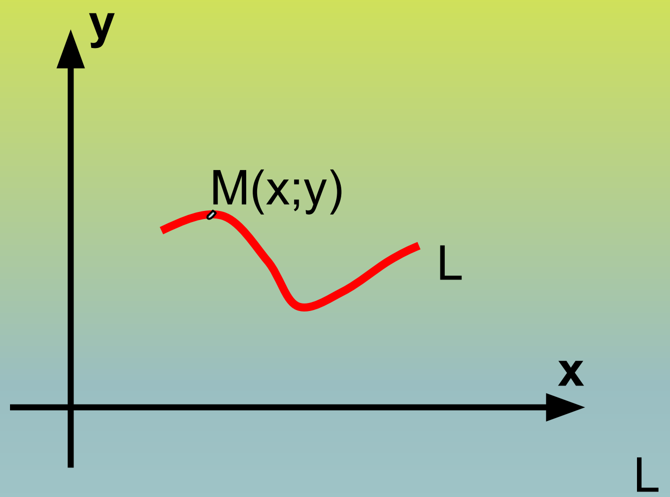
Элементы сферы

- т.О - центр сферы
- ОА – радиус сферы.
- Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы называется радиусом сферы.
- ВС – диаметр сферы.
- Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется диаметром сферы
- d=2r

? Какие из тел, изображенных на рисунках, являются сферой?



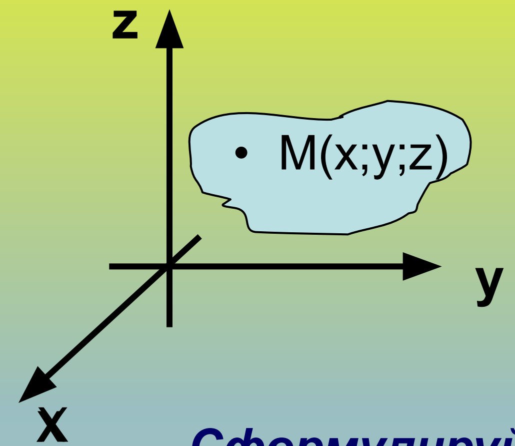
На плоскости



Сформулируйте определение линии L на плоскости

Уравнение с двумя переменными x и y называется уравнением линии L, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии L и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии

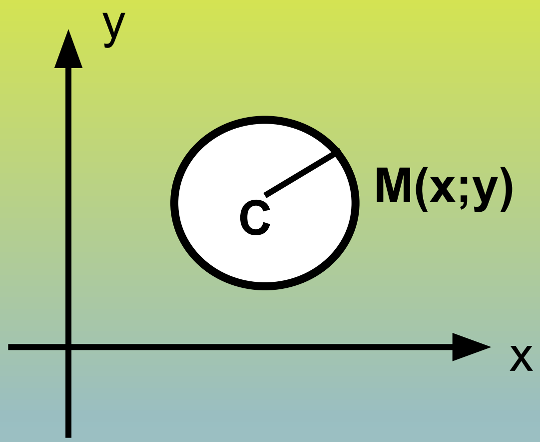
В пространстве



Сформулируйте определение уравнения поверхности в пространстве

Уравнение с тремя переменными x,y,z называется уравнением поверхности, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки поверхности и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой поверхности

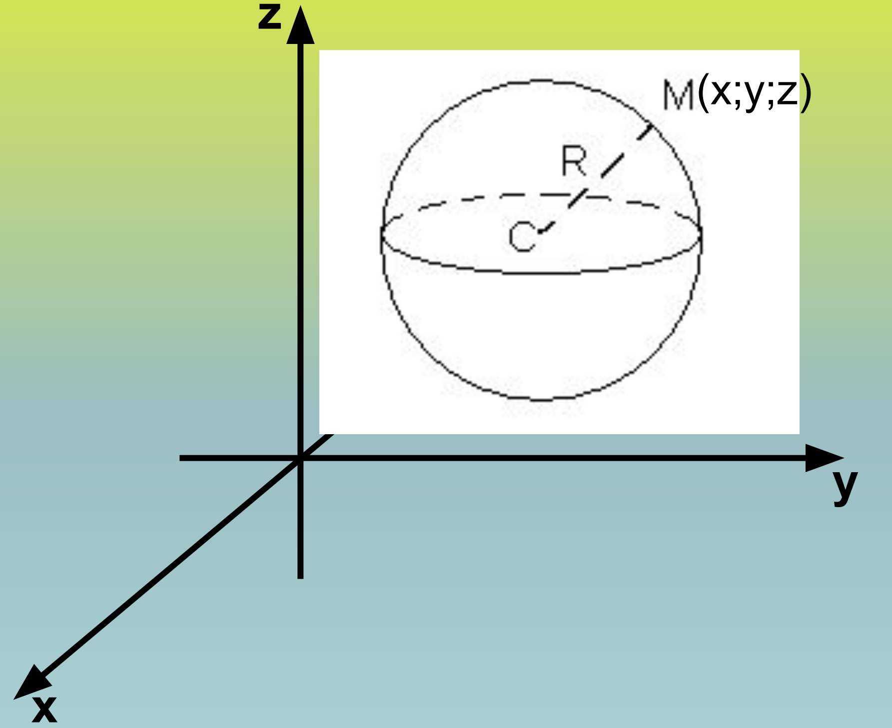
На плоскости



$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

В пространстве

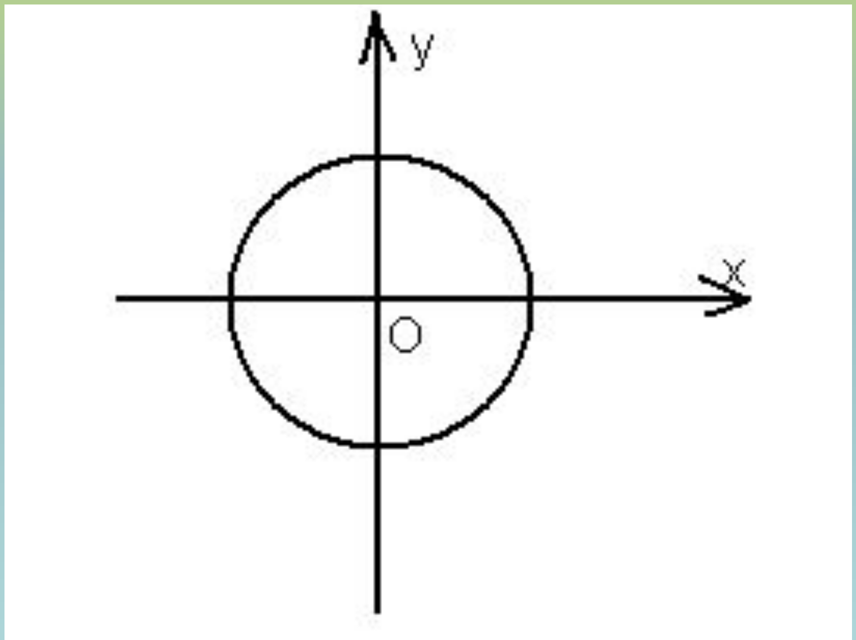


$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

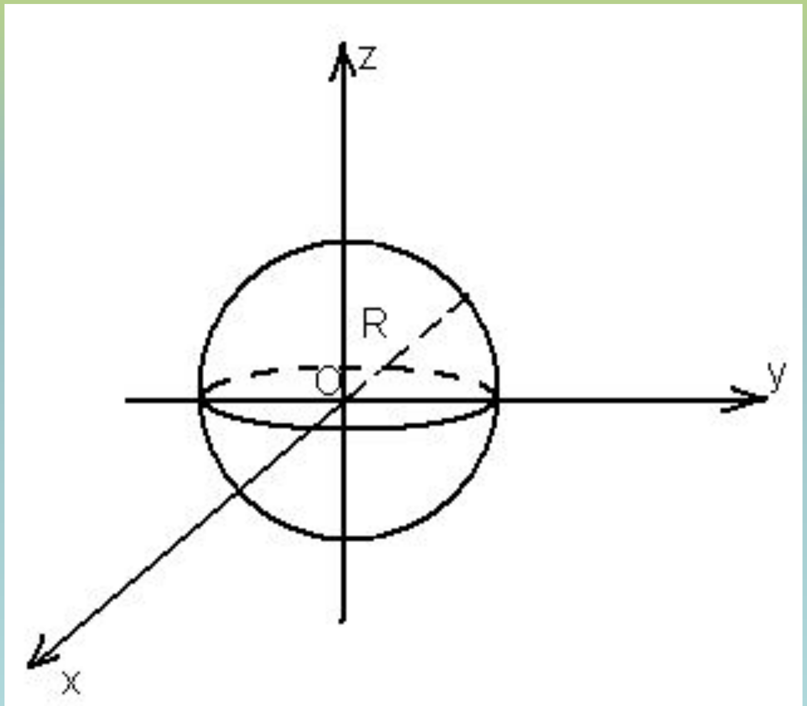
Частные случаи

- 1.Уравнение окружности с центром в т.О(0;0) и радиусом r



$$x^2 + y^2 = r^2$$

- 1.Уравнение сферы с центром в т.О(0;0;0) и радиусом R



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Выбрать из предложенных уравнений – уравнение сферы:

- 1. $(x-1)^2+(y+2)^2=4$
- 2. $(x-1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=2^2$
- 3. $2x+3y=6$
- 4. $(x+2)^2+(y+4)^2+(z+8)^2=9$
- 5. $2x^2-5x+3=0$
- 6. $x^2+y^2+z^2=16$
- 7. $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=9$
- 8. $x^2-4x+y^2+z^2=0$

- 1.Ур-е окружности
- 2.Ур-е сферы
- 3.Ур-е прямой
- 4.Ур-е сферы
- 5.Ур-е параболы
- 6.Ур-е сферы
- 7.Ур-е сферы
- 8. ?

В данных уравнениях определите координаты центра сферы и радиус

- 1. $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-7)^2=9$
- 2. $(x-6)^2+(y+0{,}5)^2+z^2=5$
- 3. $x^2+y^2+(z-1)^2=6$
- 4. $x^2+y^2+z^2=49$

Составьте уравнение сферы по следующим данным центра и радиуса сферы:

1. Дано: C(-2;8;1); R=11
2. Дано: A(3;-2;0); R=0,7
3. Дано: O(0;0;0); R=1

<u>*Проверяем ответы:*</u>

$$(x+2)^2+(y-8)^2+(z-1)^2=121$$

$$(x-3)^2+(y+2)^2+z^2=0{,}49$$

$$x^2+y^2+z^2=1$$

Задача

- Определить принадлежит ли т.А сфере, заданной уравнением

$$(x-3)^2+(y+7)^2+(z-5)^2=30$$

если: а) т.А(5;-2;6)

б) т.А(-5;2;6)

Решение:

$$(5-3)^2+(-2+7)^2+(6-5)^2=30$$

Равенство верное, следовательно А(5;-2;6) принадлежит сфере

$$(-5-3)^2+(2+7)^2+(6-5)^2=30$$

Равенство неверное, следовательно А(5;-2;6) не принадлежит сфере

Уравнение плоскости и прямой

Общее уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

где A, B, C, D – числовые коэффициенты

Особые случаи уравнения:

- $D = 0 \Rightarrow Ax+By+Cz = 0$

  плоскость проходит через начало координат.

- $A = 0 \Rightarrow By + Cz + D = 0$

  плоскость параллельна оси Ox.

- $B = 0 \Rightarrow Ax + Cz + D = 0$

  плоскость параллельна оси Oy.

- $C = 0 \Rightarrow Ax+By+D = 0$

  плоскость параллельна оси Oz.

Особые случаи уравнения:

- $A = B = 0 \Rightarrow Cz + D = 0$

  плоскость параллельна плоскости Oxy.

- $A = C = 0 \Rightarrow By + D = 0$

  плоскость параллельна плоскости Oxz.

- $B = C = 0 \Rightarrow Ax + D = 0$

  плоскость параллельна плоскости Oyz.

Особые случаи уравнения:

- $A = D = 0 \Rightarrow By + Cz = 0$

  плоскость проходит через ось Ox.

- $B = D = 0 \Rightarrow Ax + Cz = 0$

  плоскость параллельна оси Oy.

- $C = D = 0 \Rightarrow Ax + By = 0$

  плоскость параллельна оси Oz.

Уравнения координатных плоскостей

$x = 0$, плоскость Oyz

$y = 0$, плоскость Oxz

$z = 0$, плоскость Oxy

Две плоскости в пространстве:

$\alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\beta: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

- совпадают, если существует такое число k, что

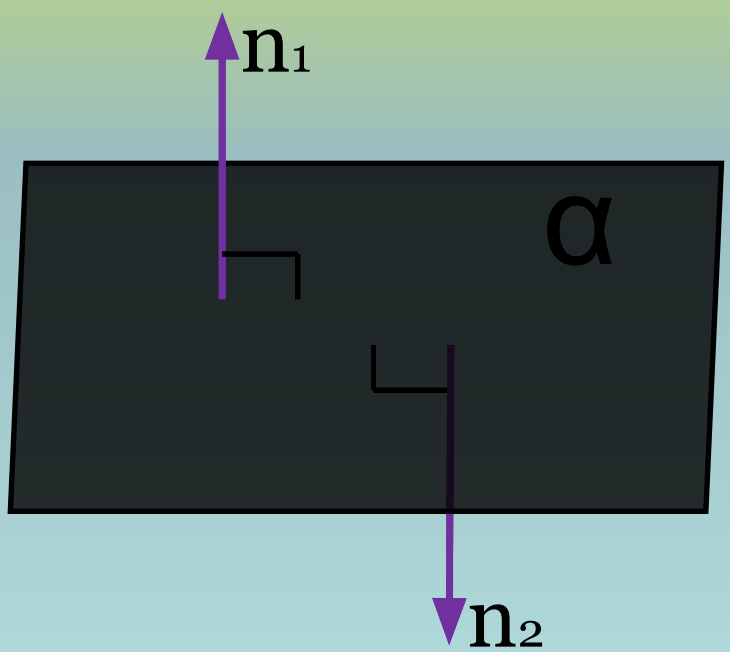
$$\begin{cases} A_1 = kA_2 \\ B_1 = kB_2 \\ C_1 = kC_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases}$$

- параллельны, если существует такое число k, что

$$\begin{cases} A_1 = kA_2 \\ B_1 = kB_2 \\ C_1 = kC_2 \\ D_1 \neq kD_2 \end{cases}$$

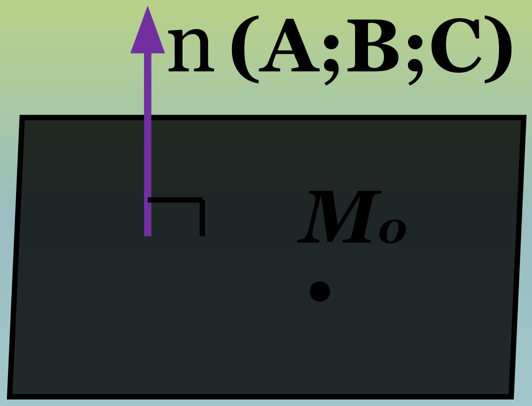
- В остальных случаях плоскости пересекаются.

Алгоритм составления уравнения плоскости, проходящей через точку перпендикулярно данному вектору



Итак, пусть α произвольная плоскость в пространстве. Всякий перпендикулярный ей ненулевой вектор называется ***вектором нормали*** к этой плоскости.

Алгоритм составления уравнения плоскости, проходящей через точку перпендикулярно данному вектору



$M_0\ (x_0; y_0; z_0)$

Если известна какая-нибудь точка плоскости *Mo* и какой-нибудь вектор нормали к ней, то через заданную точку можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данному вектору. Общее уравнение плоскости будет иметь вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Чтобы получить **уравнение плоскости**, имеющее приведённый вид, возьмём на плоскости произвольную **точку** ***M(x;y;z)***. Эта точка принадлежит плоскости только в том случае, когда **вектор перпендикулярен вектору** (рис), а для этого, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов было равно нулю, т.е.

$$\boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0}$$

Вектор задан по условию. Координаты вектора найдём по формуле :

$$\boxed{\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)}$$

Теперь, используя формулу скалярного произведения векторов , выразим скалярное произведение в координатной форме:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\ (2; -3; 1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(5; 1; -4)$.

Решение: Используем формулу

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Ответ: 5x + y - 4z - 3=0

Уравнение прямой в пространстве

Поскольку прямую в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей, то одним из способов аналитического задания прямой в пространстве является задание с помощью системы из двух уравнений

задающих пару пересекающихся плоскостей.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$$

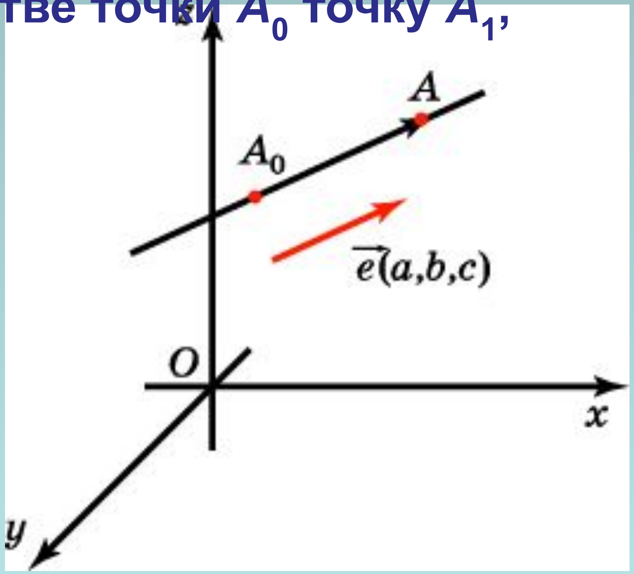
Уравнение прямой в пространстве

Прямую, проходящую через точку $A_0(x_0,y_0,z_0)$ с направляющим вектором $\vec{e}(a,b,c)$ можно задавать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = at + x_0, \\ y = bt + y_0, \\ z = ct + z_0. \end{cases}$$

В случае, если прямая в пространстве задается двумя точками $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, то, выбирая в качестве направляющего вектора вектор $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ и в качестве точки A_0 точку A_1, получим следующие уравнения

$$\begin{cases} x = (x_2 - x_1)t + x_1, \\ y = (y_2 - y_1)t + y_1, \\ z = (z_2 - z_1)t + z_1. \end{cases}$$



Упражнение 1

Какими уравнениями задаются координатные прямые?

Ответ: Ось Ox
$$\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = 0; \end{cases}$$

Ось Oy
$$\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 0; \end{cases}$$

Ось Oz
$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = t. \end{cases}$$

Упражнение 2

Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку *A*(1,-2,3) с направляющим вектором, имеющим координаты (2,3,-1).

Ответ:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

Упражнение 3

Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A_1(-2,1,-3)$, $A_2(5,4,6)$.

Ответ:

$$\begin{cases} x = -2 + 7t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = -3 + 9t. \end{cases}$$

Упражнение 4

Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку *M*(1,2,-3) и перпендикулярную плоскости *x* + *y* + *z* + 1 = 0.

Ответ:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = -3 + t. \end{cases}$$

Упражнение 5

В каком случае параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a_1 t + x_1, \\ y = b_1 t + y_1, \\ z = c_1 t + z_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a_2 t + x_2, \\ y = b_2 t + y_2, \\ z = c_2 t + z_2 \end{cases}$$

определяют перпендикулярные прямые?

Ответ: Если выполняется равенство $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.