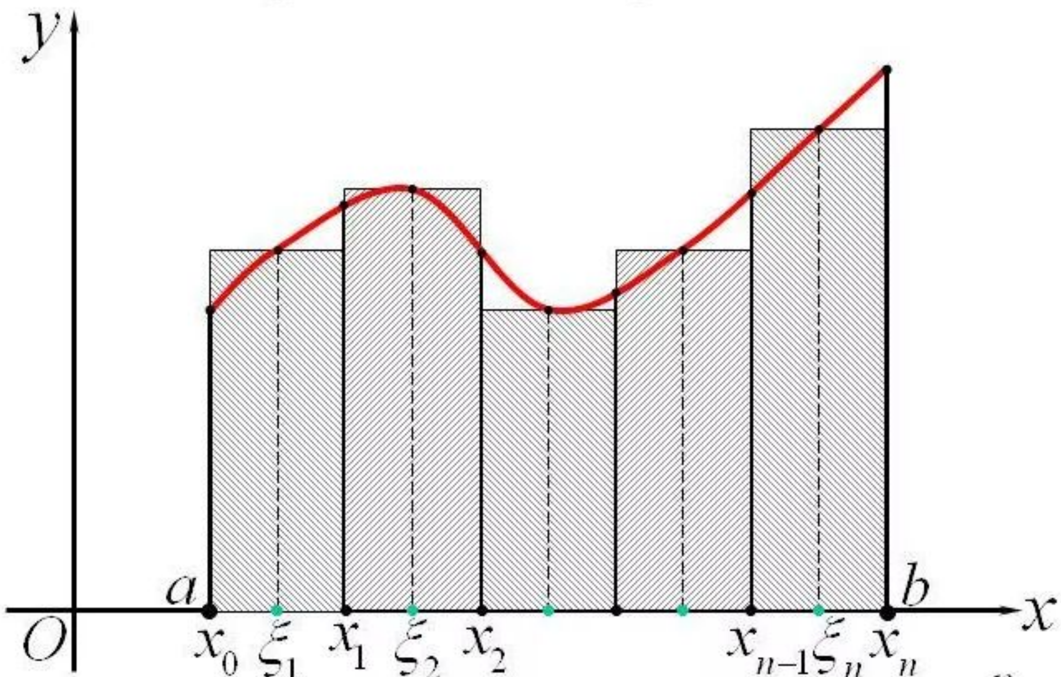
Определённый интеграл

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$.
Найти площадь S криволинейной трапеции (σ).



Если $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, то $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Пусть $\lambda = \max |[x_{i-1}; x_i]|$. Тогда $S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$

Определение. Пусть предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ при стремлении $max\ \Delta x_i$, к нулю существует, конечен и не зависит от способа выбора точек $x_0, x_1, \ldots$ и точек $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Тогда этот предел называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на $[a, b]$, обозначается $\int_a^b f(x)dx$, а сама функция $y = f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{max\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

Геометрический смысл определённого интеграла

Определенный интеграл равен площади криволинейной трапеции, т.е. плоской фигуры, ограниченной сверху графиком непрерывной функции $y= f(x)$, снизу – осью абсцисс, слева – прямой линией $x=a$, справа – прямой линией $x=b$.

Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции

Функция $f(x)$, для которой на $[a;b]$ существует определенный интеграл, называется ***интегрируемой*** на этом отрезке.

ТЕОРЕМА 1 (**необходимое условие интегрируемости функции на** $[a;b]$).

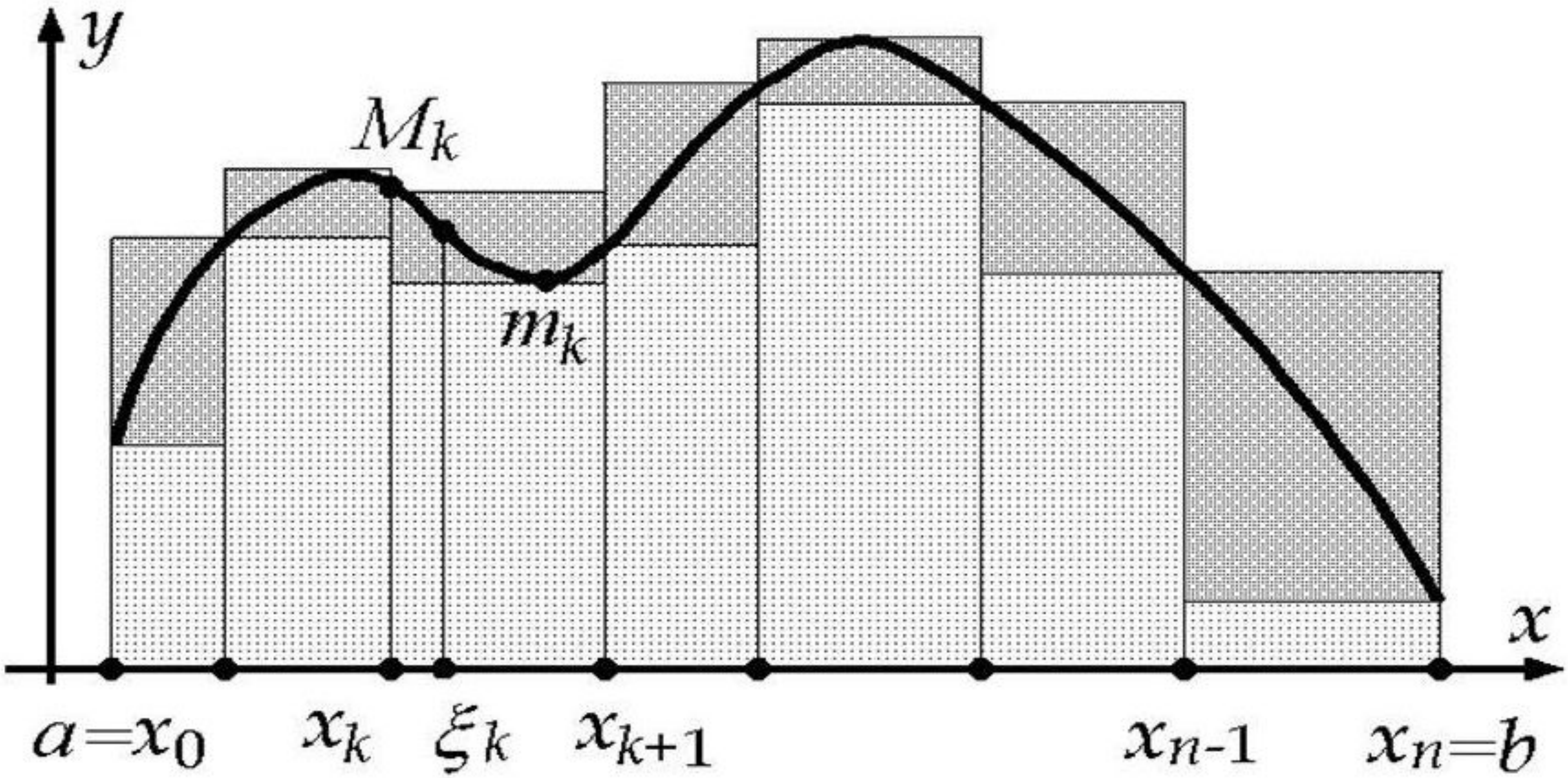
Если функция $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a;b]$ *, то она на этом отрезке ограничена.*

ТЕОРЕМА 2 (**достаточное условие интегрируемости функции на** $[a;b]$).

Для интегрируемости функции $f(x)$ *на* $[a;b]$ *, достаточно выполнения одного из условий:*

1) $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$;
2) $f(x)$ *ограничена на* $[a;b]$ *и имеет на* $[a;b]$ *конечное число точек разрыва;*
3) $f(x)$ *монотонна и ограничена на* $[a;b]$.

Сумма Дарбу



Сумма Дарбу

Верхняя сумма Дарбу есть

$$S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

Нижняя сумма Дарбу есть

$$s(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$$

Сумма Дарбу

$S_{\text{нижняя}}$ – нижняя интегральная сумма,
$S_{\text{верхняя}}$ – верхняя интегральная сумма,

$$S_{\text{нижняя}} \leq S_{\text{верхняя}}$$

Более того

$$S_{\text{нижняя}} \leq \int_a^b f(x)dx \leq S_{\text{верхняя}}$$

Свойства сумм Дарбу

1. Если к имеющимся точкам деления добавить новые, то s может только увеличиться , а S – только уменьшиться.

2. Каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы Дарбу, даже если они принадлежат различным разбиениям отрезка $[a, b]$ на кусочки.

❖ **Теорема.** Для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\substack{\Delta\to 0\\(n\to\infty)}} (S - s) = 0.$$

Сумма Дарбу

$$m_k = \inf \ f(x); \quad \mathrm{M}_\mathrm{k} = \sup \ f(x)$$

Свойства определённого интеграла

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;\qquad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\qquad \int_a^a f(x)dx = 0$$

Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

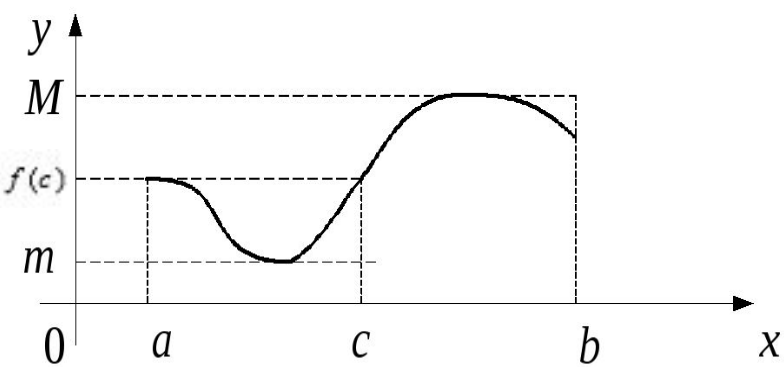
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

Теорема о среднем

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует точка $c \in [a;b]$ такая, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.



Если $f(x) \geq 0$, то теорема о среднем имеет простой геометрический смысл: га отрезке $[a;b]$ найдется точка c такая, что площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с основанием $b-a$ и высотой $f(c)$.

Теорема о среднем

$$m \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)dx \le M \cdot (b - a).$$

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} \le M.$$

$$f(c) = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx = (b - a) f(c).$$

Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть $y=f(x)$ – функция непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда она интегрируема на этом отрезке и более того, она интегрируема на любом отрезке $[a,x]$, где $x\in[a,b]$.

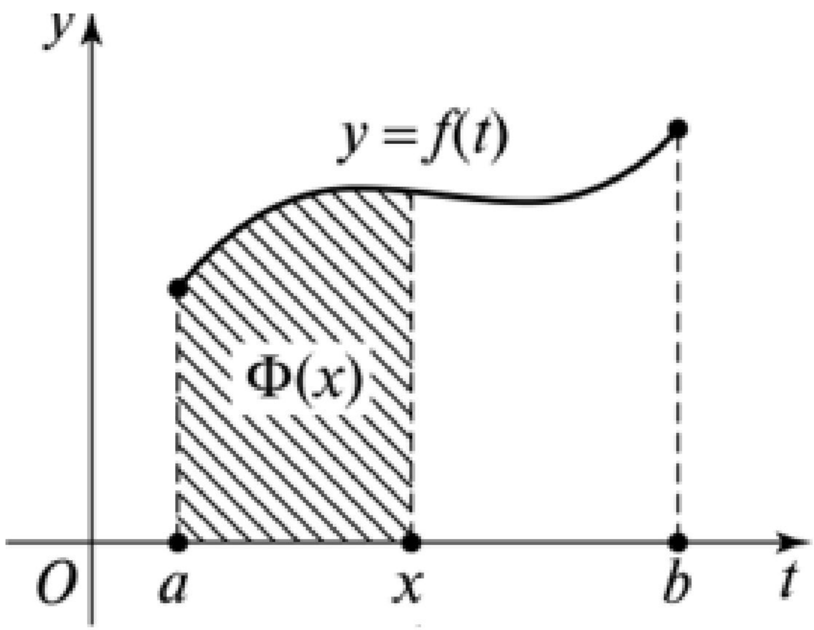
Пусть нижний предел интегрирования a закреплен, а верхний предел интегрирования b – меняется.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt,\ \ x\in\left[a,b\right]$$

- интеграл с переменным верхним пределом.

Интеграл с переменным верхним пределом



Интеграл с переменным верхним пределом

Теорема. Если $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[a,b]$. Тогда в каждой точке x отрезка $[a, b]$ производная функции Ф(х) по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции $f(x)$, т.е. $\Phi'(x)= f(x)$, или $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$

Следствие. $\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$

Интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Найдем $\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)$.

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int\limits_a^{x} f(t)\,dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

По теореме о среднем найдется такое значение $c \in [x,\, x + \Delta x]$, что

$$\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\,(x + \Delta x - x) = f(c)\,\Delta x,$$

Формула Ньютона-Лейбница

Если *F(x)* есть какая-либо первообразная от непрерывной на $[a, b]$ функции f(x), то справедлива формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

Док-во. Мы установили, что функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ - первообразная непрерывной $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Так как $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ - тоже первообразная, то $\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{C}$. Положим в этом равенстве $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$. Так как $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, то $0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

В равенстве $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ переобозначим переменные: для переменной интегрирования $\boldsymbol{t}$вернёмся к обозначению $\boldsymbol{x}$, верхний предел $\boldsymbol{x}$ обозначим $\boldsymbol{b}$.

Окончательно, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Разность в правой части формулы Ньютона-Лейбница обозначается специальным символом:

$F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$ (здесь $F(x)\big|_a^b$ читается как "подстановка от $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$"), поэтому формулу Ньютона-Лейбница обычно записывают так: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b$.

пример

$$1)\ \int_2^3 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27-8}{3} = \frac{19}{3}\ ;$$

$$2)\ \int_0^\pi 2\sin x dx = -2\cos x\Big|_0^\pi = -\left(2\cos\pi - 2\cos 0\right) = 4\ .$$

Замена переменной в определённом интеграле

Пусть дан

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где $f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$ функция. Пусть $x = \varphi(t)$, причем $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ – непрерывна на $[\alpha, \beta]$,

2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тогда имеет место формула

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$$

Замена переменной в определённом интеграле

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$- одна из первообразных для $f(x)$ на отрезке $[a;b]$,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a).}$$

$$\boxed{(\Phi(\varphi(t)))' = \Phi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t), t \in [\alpha;\beta];}$$

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a),}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt}$$

Замена переменной в определённом интеграле

Необходимо запомнить:

1) в **определенном** интеграле **обязательна смена пределов** интегрирования по формулам $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

2) после нахождения **неопределенного** интеграла надо **вернуться к старой переменной**, а в определенном интеграле этого делать не нужно.

Замена переменной в определённом интеграле

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_1^9 \frac{\sqrt{x}dx}{x+2\sqrt{x}}$.

Решение: Сделаем подстановку $x = t^2$, откуда $dx = 2tdt$.

Найдем пределы изменения t: $1 = t^2 \Rightarrow t = 1$, $9 = t^2 \Rightarrow t = 3$.

Следовательно,

$$\int\limits_1^9 \frac{\sqrt{x}dx}{x+2\sqrt{x}} = \int\limits_1^3 \frac{2t^2dt}{t^2+2t} = 2\int\limits_1^3 \frac{tdt}{t+2} = 2\int\limits_1^3 \frac{t+2-2}{t+2}dt = 2\int\limits_1^3 (1-\frac{2}{t+2})dt = 2(t-2\ln|t+2|)\Big|_1^3 = 4(1-\ln\frac{5}{3})$$

Интегрирование по частям в определённом интеграле

Если $u = u(x), v = v(x)$ на отрезке $[a, b]$ - непрерывные дифференцируемые функции, то на этом отрезке справедлива формула:

$$\int_a^b u\,dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Интегрирование по частям в определённом интеграле

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – функции, непрерывные вместе со своими производными на отрезке $[a;b]$.
Очевидно, что $d\,(uv) = vdu + udv$.
Интегрируя это соотношение в пределах от a до b, получим:

$$\int_a^b duv = uv\Big|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv,$$

откуда

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Интегрирование по частям в определённом интеграле

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 xe^x dx$.

Решение: $\int_0^1 xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x; & du = dx \\ dv = e^x dx; & v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1.$

Интегрирование чётных и нечётных функций

Если $f(x)$ – нечетная функция,
т.е. $f(-x) = -f(x)$, то

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.}$$

Если $f(x)$ – четная функция,
т.е. $f(-x) = f(x)$, то

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.}$$

Несобственные интегралы

Несобственный интеграл 1-го рода (с бесконечными пределами интегрирования)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$. ***Несобственным интегралом первого рода*** от функции $f(x)$ на промежутке $[a; +\infty)$ называется предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

если он существует и конечен.

Обозначается несобственный интеграл символом

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx .$$

Если указанный предел существует, то интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае интеграл называется ***расходящимся***.

Аналогичным образом определяются еще два вида несобственных интегралов первого рода:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

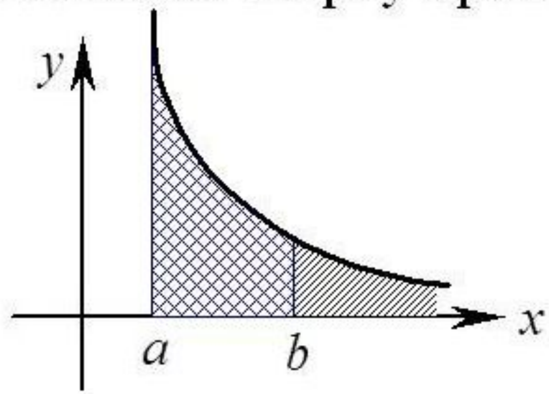
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{\mathrm{c}} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{\mathrm{c}}^{b} f(x)dx,$$

где с – произвольное число. В этом случае интеграл сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа.

Геометрический смысл сходящихся несобственных интегралов 1-го рода

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;+\infty)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.



$\Rightarrow$ Если несобственный интеграл от $y = f(x)$ по $[a;+\infty)$ сходится и равен S, то полагают, что область, ограниченная Ox, кривой $y = f(x)$ и прямой $x = a$ (криволинейная трапеция с бесконечным основанием) имеет площадь S.

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

пример

Вычислить несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$$

(или установить его расходимость)

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \ln(x^2+4)\Big|_0^b =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(\ln(b^2+4) - \ln 4) = \infty$$

Этот несобственный интеграл расходится.

Признаки сходимости несобственных интегралов 1-го рода

Первый признак сравнения.

Теорема 1. Если на промежутке $[a;\ +\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию

$0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Пример. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$.

Решение. *Сравним:* $\frac{1}{x^2(1+e^{-x})} < \frac{1}{x^2}$ при $1 \le x \le +\infty$. Так как $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то сходится и искомый интеграл по признаку сравнения.

Признаки сходимости несобственных интегралов 1-го рода

Второй признак сравнения.

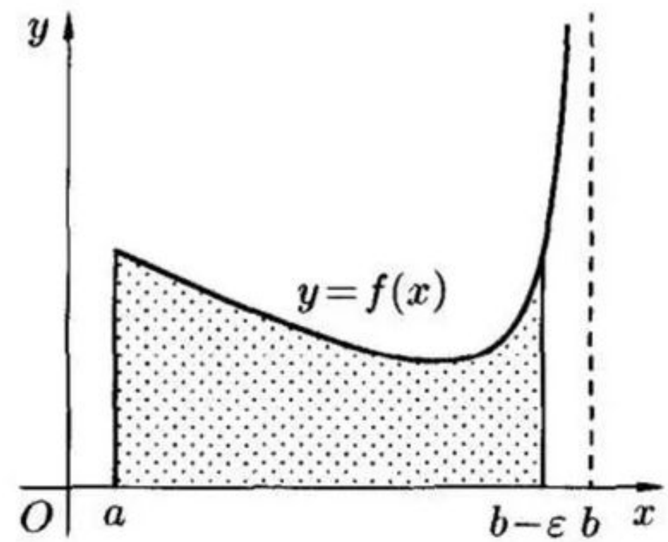
Теорема 2. Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k$ $(0< k<\infty, f(x) > 0$ и $g(x) > 0)$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся.

Несобственные интегралы 2-го рода (интегралы от неограниченных (разрывных) функций)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a;\ b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то его называют **несобственным интегралом II - ого рода** и обозначают $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом, по определению,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$



Аналогично: 1) если функция $f(x)$ терпит разрыв в точке $x = a$, то полагают $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

2) если функция $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке с отрезка $[a; b]$, то несобственный интеграл II - ого рода определяется формулой

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to 0}\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta\to 0}\int_{c+\beta}^b f(x)dx.$$

Пример. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$. _Решение:_

При $x = 0$ функция $y = \frac{1}{x^2}$ терпит бесконечный разрыв

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\left(1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty,$$

Признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода

Теорема 1. Если на полуинтервале [*a; b*) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, удовлетворяют условию $0 \le f(x) \le g(x)$ и при $x = b$ *терпят бесконечный разрыв.* Тогда из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Признаки сходимости несобственных интегралов 2-го рода

Второй признак сравнения.

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $g\,(x)$ непрерывны на полуинтервале $[a;\,b)$ и терпят разрыв в точке $x = b$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k$ $(0< k< \infty, f(x) > 0$ и $g(x) > 0)$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся.

пример

Задание Исследовать на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

Решение Применим признак сравнения в предельной форме. Для этого сравним подынтегральную функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ с функцией $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ (найдем предел их отношения):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = 1 \neq 0$$

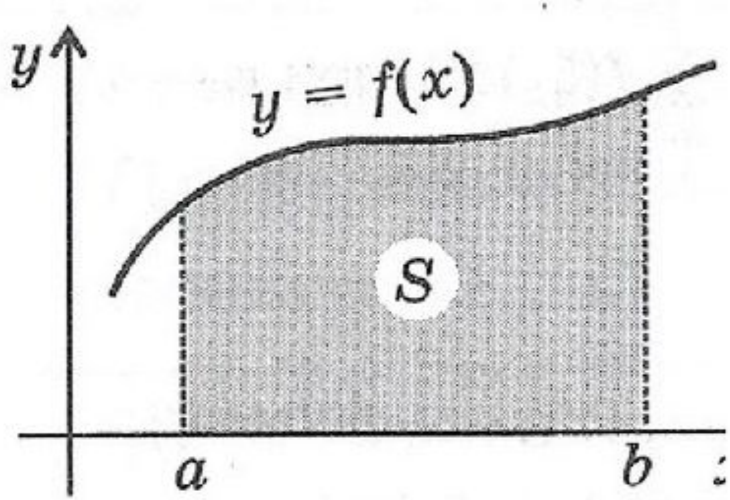
Так как получили конечное, отличное от нуля значение, то это значит, что интегралы $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ и $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ имеют одинаковый характер сходимости. И так как для первого интеграла $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ значение $p = \frac{2}{3} < 1$, то интеграл $\int\limits_a^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ является расходящимся, а значит, расходится и заданный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

Ответ Интеграл расходится.

Геометрические приложения определённого интеграла

Вычисление площадей плоских фигур

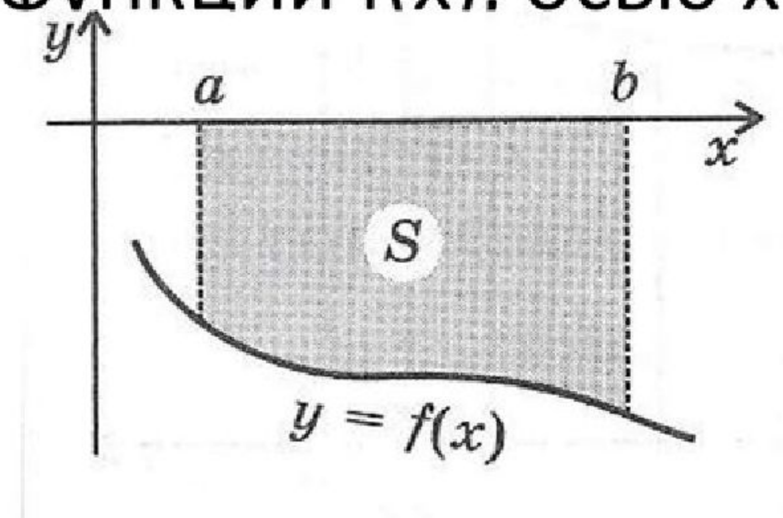
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x=a и x=b:



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Геометрические приложения определённого интеграла

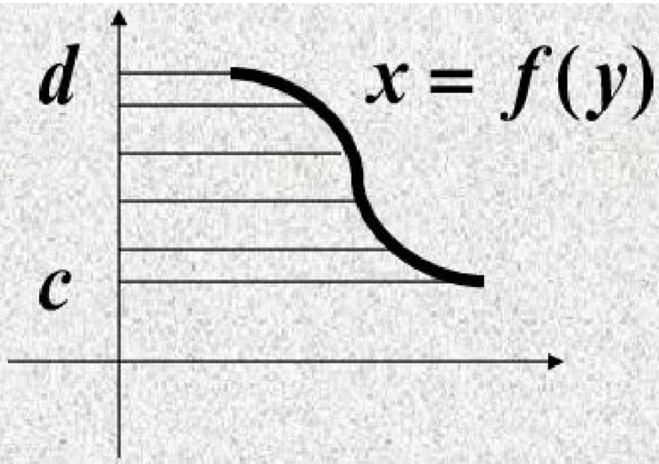
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке [a;b] функции f(x), осью x и прямыми x=a и x=b:



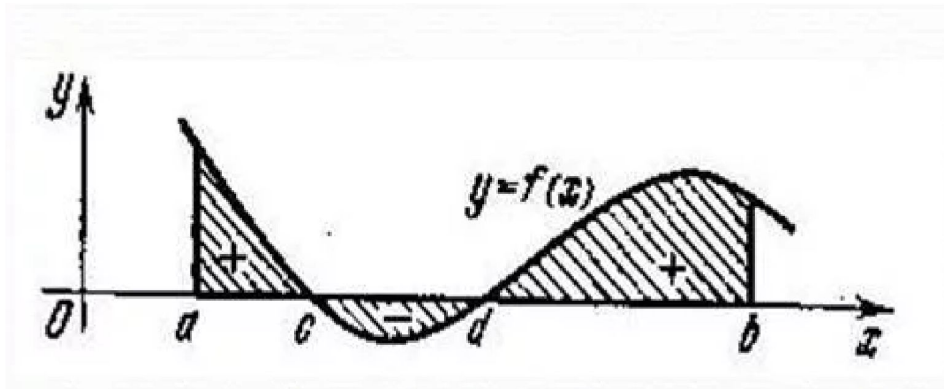
$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Геометрические приложения определённого интеграла

$$f(y) \geq 0\ , \quad S = \int_c^d f(y)\,dy$$



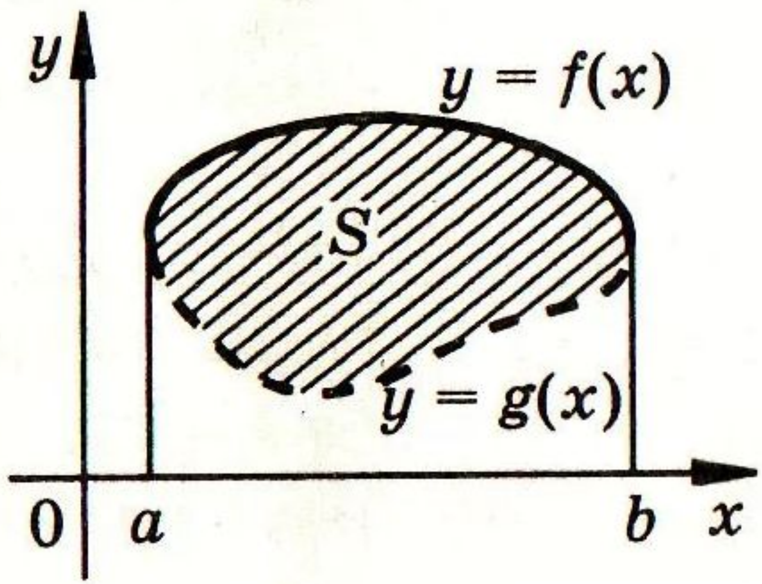
Геометрические приложения определённого интеграла



$$\boxed{S=\int_a^c f(x)\,dx-\int_a^c f(x)\,dx+\int_a^c f(x)dx}$$

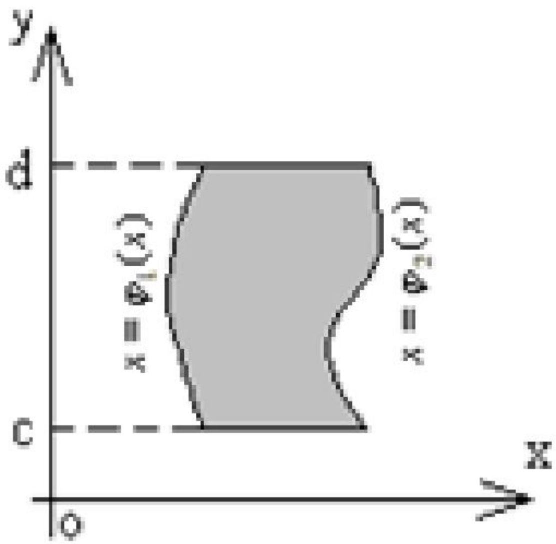
Геометрические приложения определённого интеграла

Площадь фигуры ограниченная двумя различными кривыми



$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Площадь фигуры ограниченная двумя различными кривыми



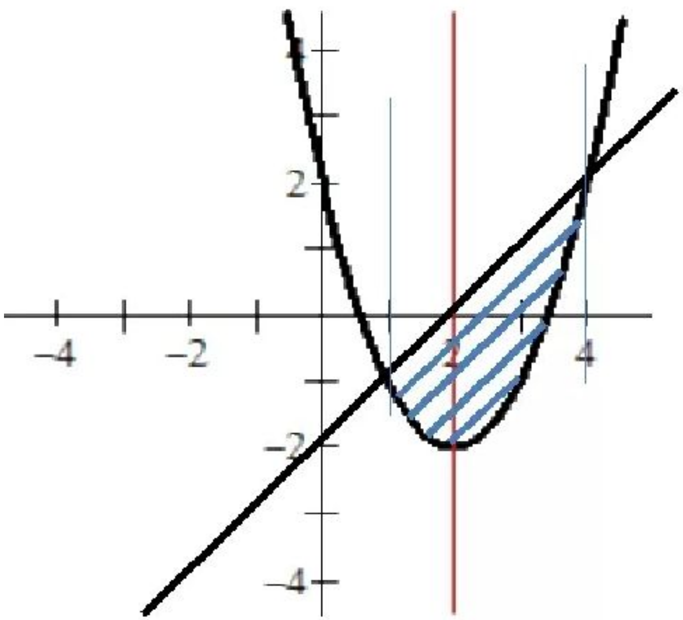
Если фигура ограничена на[c;d], линиями $x=\varphi_1(y)$, $x=\varphi_2(y)$, $y=c$; $y=d$, где $c<d$ и $\varphi_2(y)\geq\varphi_1(y)$ то её площадь может быть вычислена по формуле:

$$S=\int_c^d(\varphi_2(y)-\varphi_1(y))dy$$

Геометрические приложения определённого интеграла

Пример *Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x - 2$ и параболой $y = x^2 - 4x + 2$.*

Р е ш е н и е : построим графики указанных функций.



Получена фигура, условно ограниченная слева и справа прямыми $x = 1$ и $x = 4$. Значит,

$$S = \int_1^4 \left((x-2) - (x^2 - 4x + 2)\right) dx =$$

$$= \int_1^4 (5x - x^2 - 4)\, dx = \frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 4x\Big|_1^4 =$$

$$= \left(\frac{5 \cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} - 4 \cdot 4\right) - \left(\frac{5 \cdot 1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - 4 \cdot 1\right) =$$

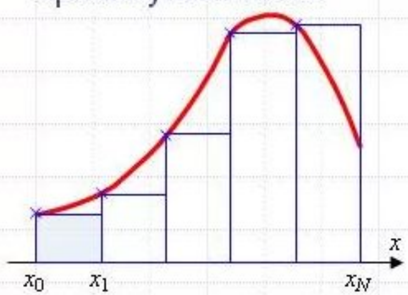
$$= 4{,}5$$

Ответ: 4,5

Формула прямоугольников

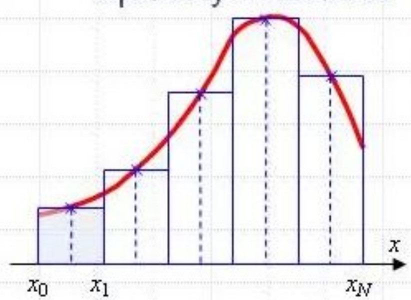
Геометрически идея способа вычисления определённого интеграла по формуле прямоугольников состоит в том, что площадь под графиком интегральной функции заменяется суммой площадей прямоугольников, одна сторона которых равна $\frac{b-a}{n}$, а другая $f(x_n)$

Левые прямоугольники



$$I \approx \sum_{j=1}^{N} h \cdot f(x_{j-1})$$

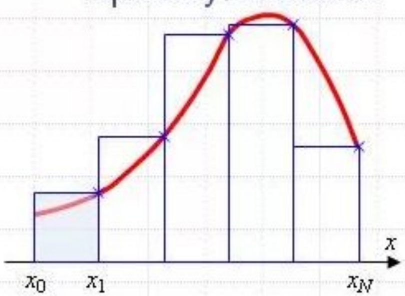
Средние прямоугольники



$$I \approx \sum_{j=1}^{N} f(x_{j-0.5}) \cdot h$$

$$x_{j-0.5} = x_j - 0.5h$$

Правые прямоугольники



$$I \approx \sum_{j=1}^{N} h \cdot f(x_j)$$

- Интегрируемый отрезок $[a;b]$ делится на равные отрезки длиной h
- Интеграл вычисляется как сумма вписанных в каждый **частичный отрезок** прямоугольников
  - чем меньше длина отрезков h, тем точнее вычисленное значение интеграла
  - метод средних прямоугольников наиболее точный

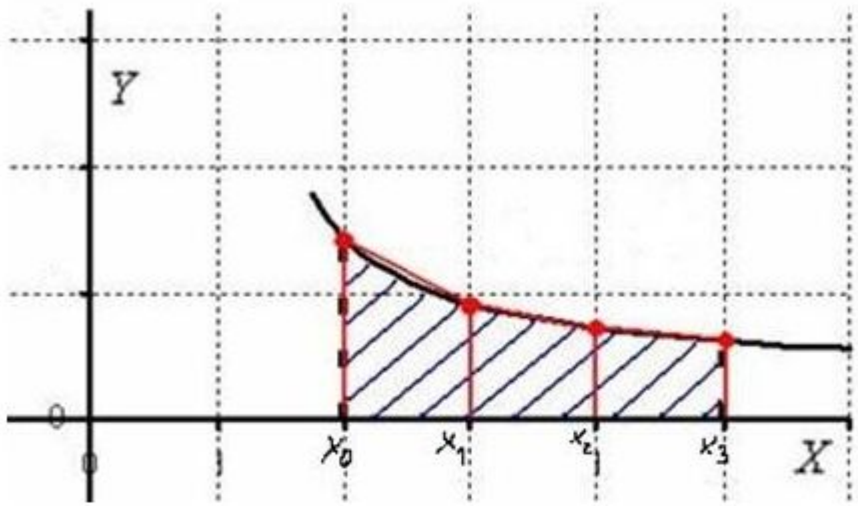
Формула трапеций

Геометрический смысл формулы трапеций заключается в том, что кривая $y = y(x)$ заменяется отрезком прямой, проходящей через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), или, в других обозначениях, $(a, y(a))$ и $(b, y(b))$

$$\int_a^b y(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2} h \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

Формула трапеций

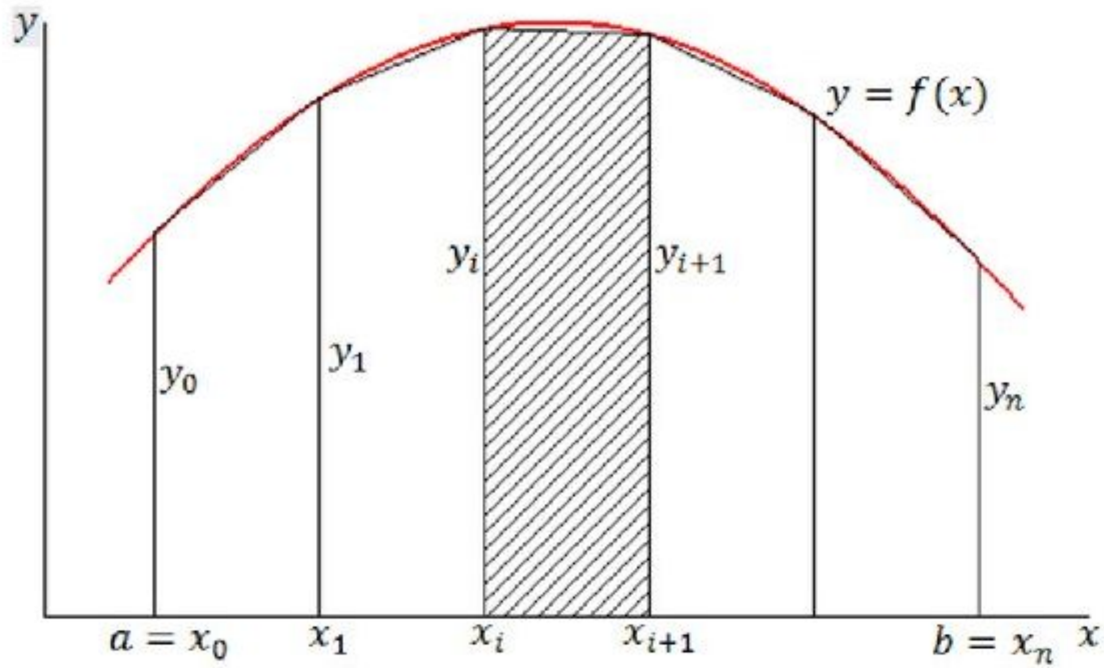
$$\int_a^b f(x)dx$$



$$I_n = \int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) \right]$$

$$h = \frac{(b-a)}{n}$$

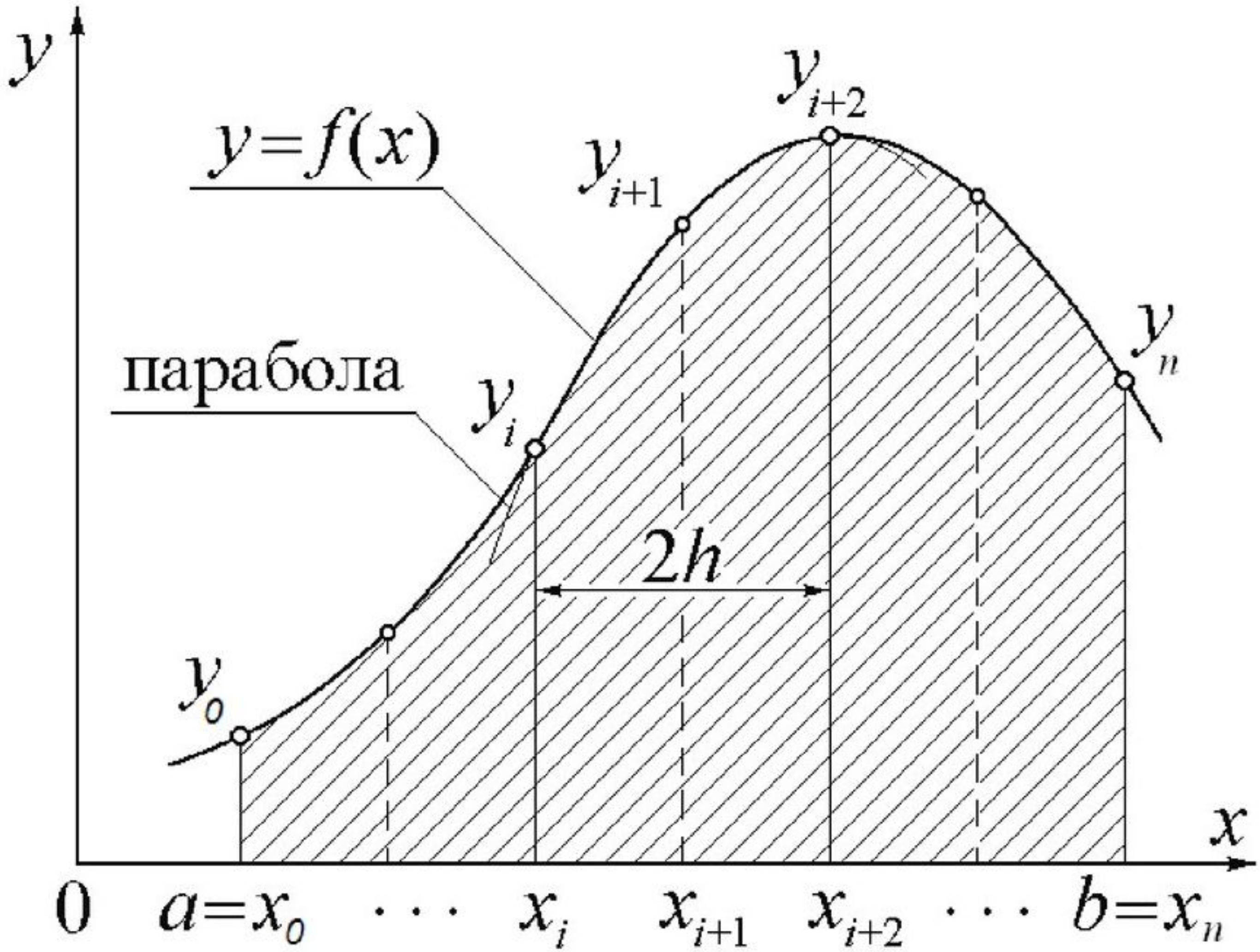
Формула трапеций



$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

Формула Симпсона (парабол)



Формула Симпсона

Разделим отрезок $[a,\ b]$ на чётное число равных отрезков, то есть на $2n$ отрезков:

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{2n}, \quad x_i = x_0 + ih, \quad y_i = f(x_i),$$
$$i = 0, 1, \ldots, 2n$$

Представим данный интеграл в виде суммы n интегралов:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx =$$
$$= I_1 + I_2 + \cdots + I_n$$

Вычислим приближённо каждый интеграл I_i.

- Интегрируемый отрезок [*a*;*b*] делится на равные отрезки длиной *h*
- Каждый отрезок функции аппроксимируется параболой
  - парабола проходит через три точки: узлы интегрирования x_{j-1}, x_j и середину отрезка $x_{j-0.5}$

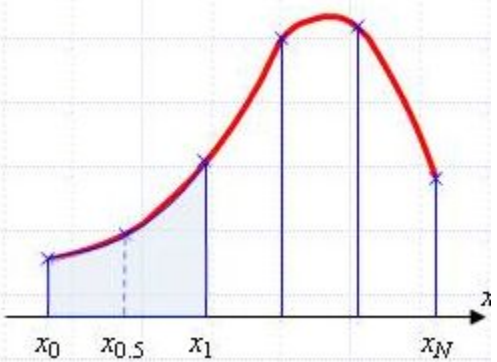
$$f(x) = \frac{2}{h^2}\left[(x - x_{j-0.5})(x - x_j) f(x_{j-1}) - 2\cdot(x - x_{j-1})(x - x_j) f(x_{j-0.5}) + (x - x_{j-1})(x - x_{j-0.5}) f(x_j)\right]$$

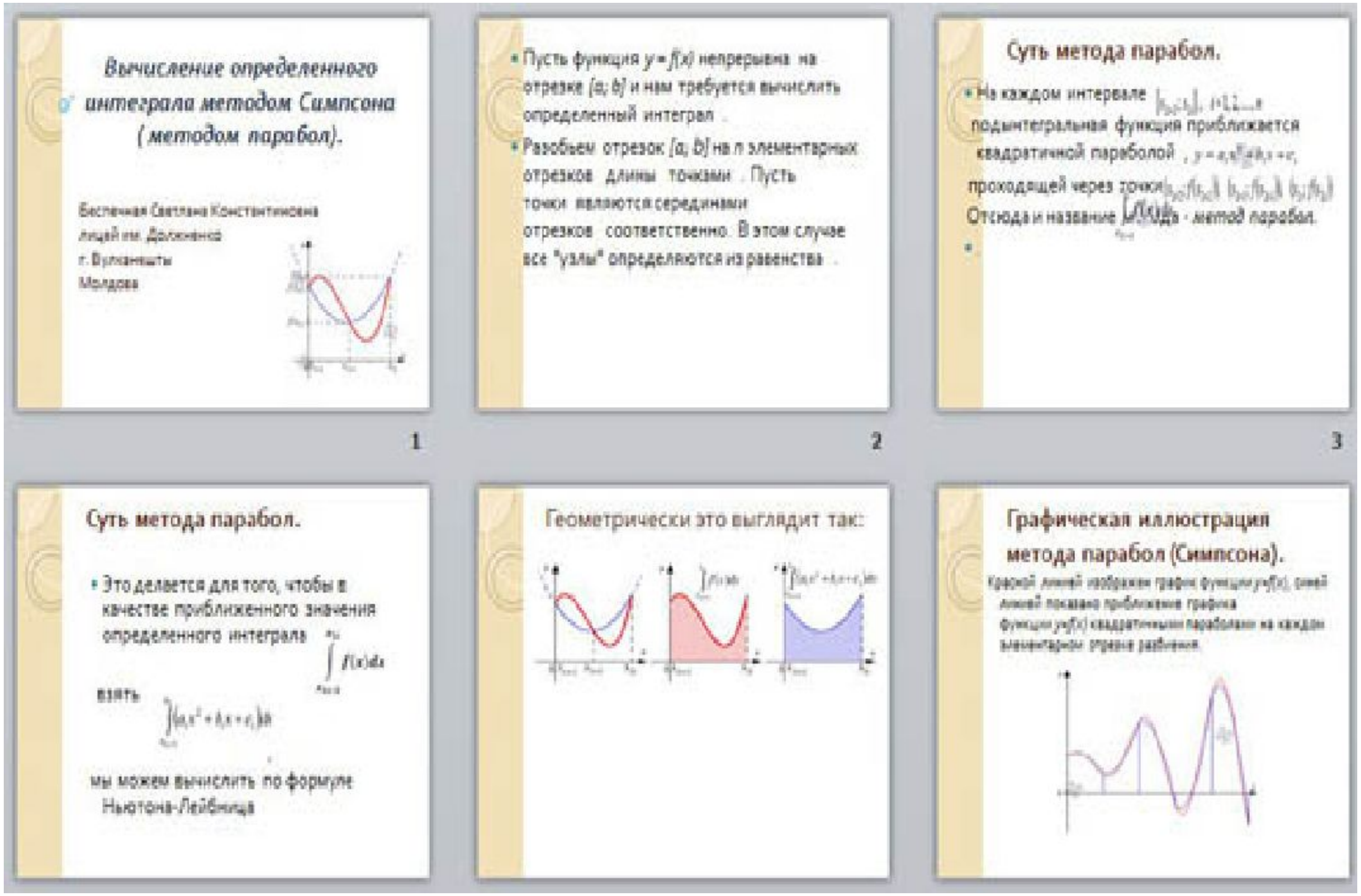
- Площадь параболы на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(f_{j-1} + 4 f_{j-0.5} + f_j\right)$$

- Тогда интеграл функции на отрезке [*a*;*b*]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left[f_1 + f_N + 2\cdot\sum_{j=1}^{N-1} f_j + 4\cdot\sum_{j=1.5}^{N-0.5} f_j\right]$$




Вычисление определенного интеграла методом Симпсона (методом парабол).
Беспечная Светлана Константиновна
лицей им. Должненко
г. Вулканешты
Молдова
1
Пусть функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a; b] и нам требуется вычислить определенный интеграл .
Разобьем отрезок [a; b] на n элементарных отрезков длины точками . Пусть точки являются серединами отрезков соответственно. В этом случае все "узлы" определяются из равенства .
2
Суть метода парабол.
На каждом интервале подынтегральная функция приближается квадратичной параболой , проходящей через точки
Отсюда и название - метод парабол.
3
Суть метода парабол.
Это делается для того, чтобы в качестве приближенного значения определенного интеграла взять
мы можем вычислить по формуле Ньютона-Лейбница
Геометрически это выглядит так:
Графическая иллюстрация метода парабол (Симпсона).
Красной линией изображен график функции y=f(x), синей линией показано приближение графика функции y=f(x) квадратичными параболами на каждом элементарном отрезке разбиения.

Суть метода

На каждом интервале $[x_{2i-2}; x_{2i}]$, $i = 1, 2, \dots, n$ подынтегральная функция приближается квадратичной параболой $y = a_i x^2 + b_i x + c_i$, проходящей через точки $(x_{2i-2}; f(x_{2i-2}))$, $(x_{2i-1}; f(x_{2i-1}))$, $(x_{2i}; f(x_{2i}))$. Отсюда и название метода - метод парабол.

Это делается для того, чтобы в качестве приближенного значения определенного интеграла $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx$ взять $\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (a_i x^2 + b_i x + c_i)dx$, который мы можем вычислить по формуле Ньютона-Лейбница. В этом и заключается **суть метода парабол**.

Геометрически это выглядит так: