I.Механика. Движение абсолютно твердого тела

Абсолютно твердое – тело, взаимное расположение частиц которого во время движения не меняется.

Поступательное – движение, при котором тело перемещается параллельно самому себе, а все его точки имеют одинаковую скорость и траектории одинаковой формы, параллельные друг другу.

Вращательное – движение, при котором все точки твердого тела описывают окружности разных радиусов. Для случая плоского движения, при котором точки тела перемещаются в параллельных плоскостях , любое перемещение твердого тела можно представить как суперпозицию поступательного и вращательного движений.

$$d\vec{s} = d\vec{s}_{пост} + d\vec{s}_{вращ}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\vec{s}_{пост}}{dt} + \frac{d\vec{s}_{вращ}}{dt} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\vec{r}]$$

Для каждого момента времени всегда можно подобрать точку, скорость которой $\vec{v} = 0$. Ее называют мгновенным центром вращения.

I.Механика. Энергия движения твердого тела

Для плоского движения мгновенные центры вращения расположены на прямой, называемой осью вращения. Наиболее удобным оказывается разложение плоского движения тела на поступательное его центра масс и вращение вокруг оси, проходящей через этот центр.

Центр масс твердого тела определяется также, как и для системы тел, при этом суммирование заменяется интегрированием:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\int_V \rho\vec{r}\,dV$$

Центр масс движется как материальная точка с массой твердого тела под действием всех приложенных к телу внешних сил.

Кинетическая энергия поступательного движения.

Кинетическая энергия элемента твердого тела Δm_i при поступательном движении с одинаковой для всех элементов скоростью $\vec{v}$ равна: $\frac{\Delta m_i v^2}{2}$. Суммируя по всем элементам, получим

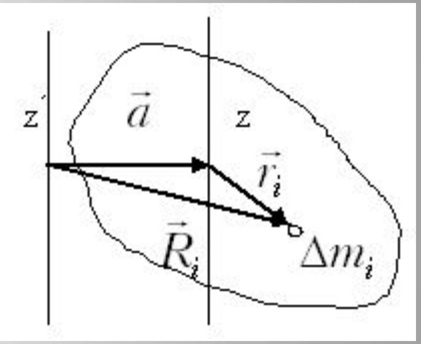
$$E_{кин} = \sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta m_i v^2}{2} = \frac{v^2}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i = \frac{mv^2}{2}$$

I.Механика. Энергия движения твердого тела

Кинетическая энергия вращательного движения. Кинетическая энергия элемента твердого тела Δm_i при вращательном движении со скоростью v_i равна $\frac{\Delta m_i v_i^2}{2}$. Суммируя по всем элементам твердого тела, получим

$$E_{кин} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta m_i r_i^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}$$

где $I = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2$ **- момент инерции твердого тела** - мера его инертности к изменению угловой скорости.



Теорема Штейнера

Момент инерции тела I относительно произвольной оси вращения z´ равен сумме момента инерции I_0 тела относительно оси z, проходящей через центр масс и произведению массы тела на квадрат расстояния a между этими осями $I = I_0 + ma^2$ (Рис.13):

Рис.13

,

I.Механика. Моменты инерции различных тел

$$I = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \left(\vec{a} + \vec{r}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2 + 2\vec{a}\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \vec{r}_i + ma^2,$$

где $\vec{r}_i$ -радиус вектор элемента твердого тела в системе центра масс, начало координат которой совпадает с самим центром масс.

$\dfrac{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} \Delta m_i}$ - есть радиус-вектор центра масс, равный нулю в этой системе координат.

Момент инерции материальной точки массой *m* на расстоянии *R* от оси вращения равен

$$I = mR^2$$

I.Механика. Моменты инерции различных тел

Момент инерции тонкого стержня массой *m* и длиной *l*

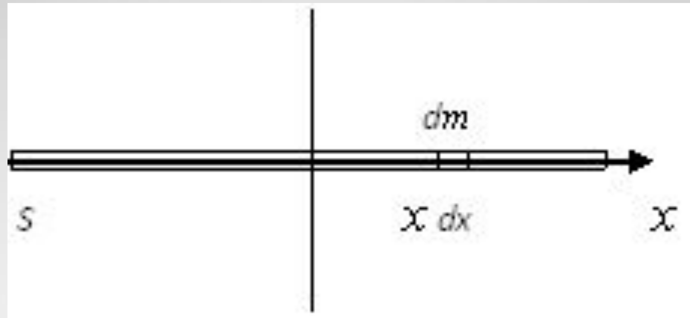


Рис.14

Элемент массы стержня *dm* (Рис.14), длиной *dx* площадью сечения *S* расположенный на расстоянии *x* от центра стержня равен

$$dm = \rho S dx$$

Интегрируя получим: $$I_0 = \int_{-l/2}^{l/2} \rho S x^2 dx = \rho S \frac{l^3}{12} = \frac{ml^2}{12}$$

Момент инерции сплошного диска или цилиндра массой *m* и радиусом *R* (Рис.15)

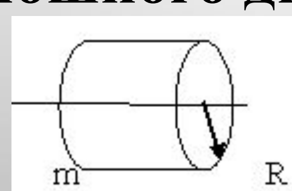


Рис.15

$$I_0 = \frac{mR^2}{2}$$

I.Механика. Моменты инерции различных тел

Момент инерции тонкостенного диска или цилиндра (трубы) массой *m* и радиусом *R* равен

$$I_0 = mR^2$$

.

Момент инерции сплошного шара массой *m* и радиусом *R* (Рис.16) равен: $I_0 = \frac{2}{5} mR^2$

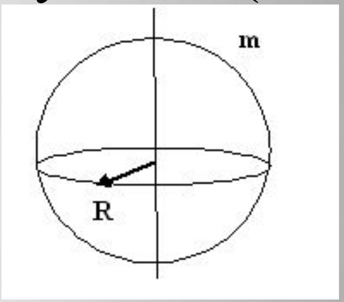


Рис.16

Полная кинетическая энергия движения твердого тела равна:

$$E_{кин} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Динамика вращательного движения твердого тела

Момент силы относительно точки (Рис.17).

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right], \quad M = rF\sin\alpha = lF$$

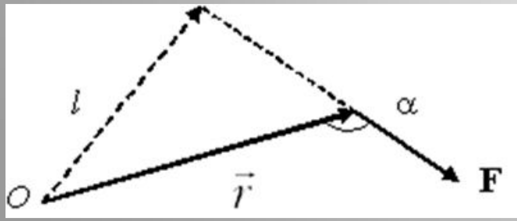


Рис.17

I.Механика. Динамика вращательного движения твердого тела

Момент силы относительно оси (z).

Если разложить силу на составляющие параллельно оси $F_{парал}$, перпендикулярно ей F_n и по касательной к траектории вращения F_τ (Рис.18) , то отличную от нуля проекцию на ось z даст только тангенциальная составляющая F_τ .

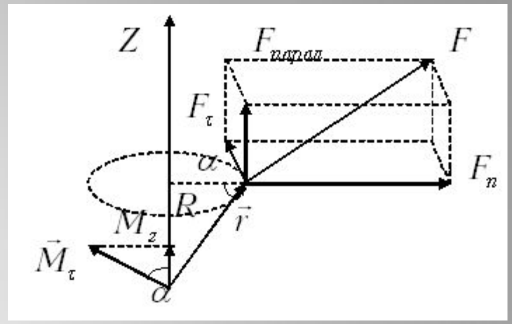
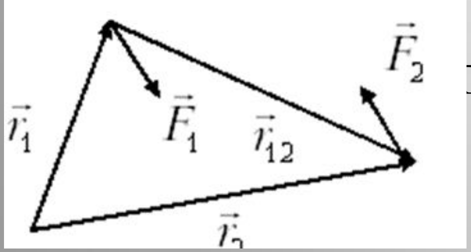


Рис.18

Проекция момента будет равна $M_{\tau z} = M_\tau \cos\alpha = rF_\tau \cos\alpha = RF_\tau$

Момент пары сил – момент, создаваемый парой сил $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (Рис.19) равен $\vec{M} = \left[\vec{r}_1\vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_2\vec{F}_2\right] = \left[\vec{r}_1\vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}_1\vec{F}_2\right] + \left[\vec{r}_{12}\vec{F}_2\right] = \left[\vec{r}_{12}\vec{F}_2\right]$,



тено, что $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}_{12}$

Рис.19

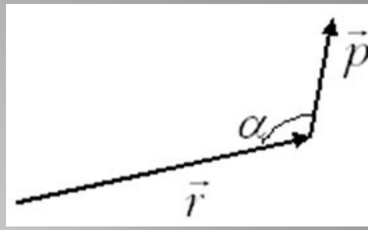
Момент импульса относительно точки (Рис.20)

.

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}] = m[\vec{r}\vec{v}] = m\left[\vec{r}\,[\vec{\omega}\vec{r}]\right] = mr^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}$$

I.Механика. Динамика вращательного движения твердого тела

$$\vec L = \begin{pmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} = \left(yp_z - zp_y\right)\vec i + \left(zp_x - xp_z\right)\vec j + \left(xp_y - yp_x\right)\vec k$$



Момент импульса относительно оси

Рис.20

$$L_z = \left[\vec r \vec p_\tau\right] = m\left[\vec r \vec v_\tau\right]$$

Основное уравнение (второй закон Ньютона) вращательного движения (для материальной точки).

$$\frac{d\vec L}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec r \vec p\right] = \left[\frac{d\vec r}{dt}\vec p\right] + \left[\vec r\,\frac{d\vec p}{dt}\right] = \left[\vec r\,\frac{d\vec p}{dt}\right] = \left[\vec r \vec F\right] \qquad \frac{d\vec L}{dt} = \vec M$$

Основное уравнение (второй закон Ньютона) вращательного движения для системы материальных точек.

Момент импульса системы – сумма моментов импульсов отдельных материальных точек $\vec L = \sum_{i=1}^{N} \vec L_i$, для каждой материальной точки.

$$\frac{d\vec L_i}{dt} = \vec M_{i\,внутр} + \vec M_{i\,внешн}$$

I.Механика. Динамика вращательного движения твердого тела

Суммируя по *i,* получим $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{iвнутр} + \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{iвнешн}$

Силы взаимодействия между двумя материальными точками действуют в противоположные стороны вдоль одной и той же прямой (Рис.21), поэтому их моменты равны по величине. противоположны по направлению и попарно уравновешивают друг друга.

Следовательно, $\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{iвнутр} = 0$ и уравнение примет вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{iвнешн}$$

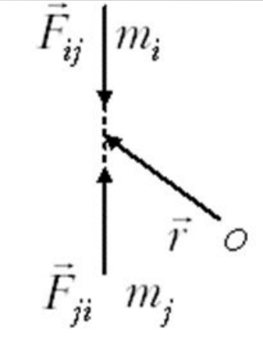


Рис.21

Основное уравнение (второй закон Ньютона) для вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

С учетом рассмотренного выше уравнения вращательного движения для системы материальных точек, получим:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_{iвнешн\,z}$$

I.Механика. Динамика вращательного движения твердого тела

где L_z , $M_{iвнешн z}$ - проекции на ось вращения *z* момента импульса и момента внешних сил. Момент импульса твердого тела равен $L_z = I_z\omega$ Тогда уравнение примет вид:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_{iвнешн\, z}$$

Примеры решения задач

Задача 39. Сплошной однородный цилиндр массой *m* с моментом инерции *I* и радиусом *R* скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α. Определить его ускорение.

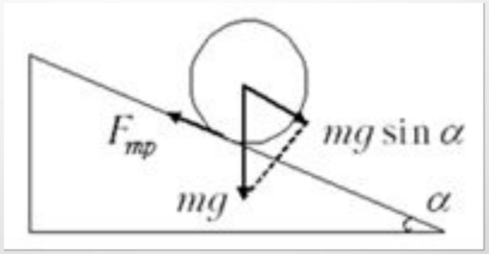


Рис.22

Решение. Запишем второй закон Ньютона для поступатель-ного и вращательного движений

I.Механика. Динамика вращательного движения твердого тела

Решение. Запишем второй закон Ньютона для поступатель-ного и вращательного движений

$$ma = mg\sin\alpha - F_{TP},$$
$$I_0\varepsilon = M_{\text{тр}}$$

где ось вращения проходит через ось симметрии цилиндра, поэтому сила тяжести и сила нормального давления моментов сил не создают. Угловое ускорение и ускорение поступательного движения связаны соотношением $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$, а момент силы трения $M_{тр} = RF_{тр}$.

Тогда второе уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{I_0}{R^2}a = F_{mp}$$

Складывая его с первым уравнением и подставляя получим

$$a = \frac{mg\sin\alpha}{m + I_0/R^2}$$

I.Механика. Динамика вращательного движения твердого тела

Подставляя момент инерции сплошного однородного цилиндра $I_0 = 1/2mR^2$, получим $a = 2/3mg\sin\alpha$.

Задача 40. С высоты h наклонной плоскости без проскальзывания скатываются сплошной и полый цилиндры с одинаковыми массами m и внешними радиусами R (Рис.23). Определить отношение их скоростей в конце наклонной плоскости.

Решение. Запишем закон сохранения энергии

$$mgh = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I_0 v_C^2}{2R^2}$$

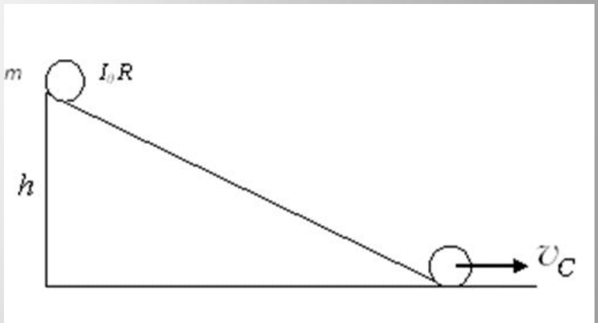


Рис.23

где, с учетом отсутствия проскальзывания

$v_C = \omega R,$

$$v_C = \sqrt{\frac{2mgh}{m + I_0/R^2}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I_0/mR^2}}$$

Подставляя момент инерции полого цилиндра $I_0 = mR^2$ и момент инерции сплошного цилиндра $I_0 = 1/2mR^2$, получим

$$v_{спл.цил.} = 2/\sqrt{3}\, v_{полцил.}\ .$$

I.Механика. Динамика вращательного движения твердого тела

Задача 41. Вертикально расположенный однородный стержень длиной $\ell = 0{,}6$ м может вращаться вокруг горизонтальной оси, отстоящей от его конца на треть длины. Найдите линейную скорость, которую нужно сообщить другому концу стержня, чтобы он смог сделать полный оборот вокруг своей оси вращения.

Решение. Центр тяжести стержня отстоит от оси вращения на расстоянии $\frac{\ell}{6}$. При подъеме нижнего конца стержня в верхнее положение центр тяжести поднимется на расстояние $\frac{\ell}{3}$. Закон сохранения энергии примет вид: $\frac{I\omega^2}{2} = mg\frac{\ell}{3}$, где m – масса стержня, ω – его начальная угловая скорость, I – его момент инерции, по теореме Штейнера равный $I = \frac{m\ell^2}{12} + \frac{m\ell^2}{36} = \frac{1}{9}m\ell^2$, откуда $\omega = \sqrt{\frac{6g}{\ell}}$,

а линейная скорость равна $v = \frac{2}{3}\ell\omega = \frac{2}{3}\sqrt{6g\ell} = 4$ м/с

I.Механика. Динамика вращательного движения твердого тела

Примеры решения задач.

Задача 42. Два маленьких шарика, массы которых 40 г и 120 г, соединены стержнем, длина которого 20 см, а масса ничтожно мала. Определите момент инерции системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс системы.

Решение. Если поместить начало координат в центр масс стержня, то координата центра масс будет равна нулю. Пусть центр масс находится на расстоянии *x* от большей массы, тогда $x_C = \frac{m(\ell - x) + 3m\ell}{4m} = 0$ и $x = \frac{\ell}{4}$. Меньшая масса отстоит от центра масс на расстоянии $\frac{3\ell}{4}$ Момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс равен

$$J = m\left(\frac{3\ell}{4}\right)^2 + 3m\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{6m\ell^2}{8} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Задача 43. Однородный цилиндр массой 1,9 кг и радиусом 5 см может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, совпадающей с его осью. На цилиндр намотана нить, к концу которой прикреплен груз массы 0,05 кг. В момент t = 0 груз отпускают без начальной скорости. Пренебрегая трением в оси вращения, найдите угловую скорость цилиндра в момент времени t = 2 с.

Решение. Запишем второй закон Ньютона для движения груза и вращения цилиндра.

$$ma = mg - T$$

$$I\varepsilon = \frac{mR^2 a}{2R} = RT$$

где m – масса груза, M –масса цилиндра, a – ускорение груза, являющееся для цилиндра тангенциальным, T – сила натяжения нити $\frac{mR^2}{2}$ момент инерции цилиндра ε - его угловое ускорение. Решая систему уравнений, найдем ускорение груза

$$a_\tau = \frac{mg}{m + M/2}.$$

Угловая скорость при постоянном угловом ускорении равна

$$\omega = \varepsilon t = \frac{a_\tau}{R} t = \frac{mg}{(m + M/2)R} t$$

I.Механика. Динамика вращательного движения твердого тела

При $t = 2$ с $\omega = 20$рад/с.

Задача 44. К колесу с моментом инерции 0,05 кг м2, вращающемуся с частотой 10 об/с, приложили тормозную колодку. Через некоторое время частота вращения снизилась до 6 об/с. Найдите, какая энергия выделилась за это время в виде тепла.

Решение. При изменении кинетической энергии колеса выделяется тепловая энергия, равная

$$Q = \left|\frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}\right| = \frac{I}{2}\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) = \frac{I}{2}(2\pi)^2\left(n_1^2 - n_2^2\right),$$

где – I момент инерции, n –число оборотов в секунду. Подставляя численные значения, получим Q=63,1 Дж.

Задача 45. Платформа в виде диска радиусом 3 м и массой 240 кг вращается по инерции около вертикальной оси с угловой скоростью 2 рад/с. В центре платформы стоит человек массой 60 кг. Найдите, какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы.

I.Механика. Динамика вращательного движения твердого тела

Решение. Запишем закон сохранения момента импульса

$$I_{\text{диска}}\omega_1 = (I_{\text{диска}} + I_{\text{человека}})\omega_2$$

В начальный момент времени момент инерции человека относительно оси вращения равен нулю, а в конце его можно определить, как материальную точку на расстоянии R от центра диска. Тогда

$$\omega_2 = \frac{J_{\text{диска}}\omega_1}{J_{\text{диска}} + J_{\text{человека}}} = \frac{MR^2/2}{MR^2/2 + mR^2}\omega_1 = \frac{M\omega_1}{M+2m}\ .$$

Линейная скорость человека будет равна $v = \omega_2 R = \frac{M\omega_1}{M+2m}R =$ 4 м/с.

Задача 46. Однородный тонкий стержень массой 0,2 кг и длиной 1 м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через середину стержня. В конец стержня попадает пластилиновый шарик, летящий горизонтально перпендикулярно стержню со скоростью 10 м/с и прилипает к стержню. Масса шарика равна 10 г. Найдите угловую скорость стержня после попадания шарика.

I.Механика. Динамика вращательного движения твердого тела

Решение. Сил, действующих на стержень и создающих момент относительно его оси вращения нет, поэтому выполняется закон сохранения момента импульса. Момент импульса налетающего шарика относительно оси равен $L_{шарика} = mv\frac{\ell}{2}$, а стержня с прилипшим шариком

$$L = \left(\frac{M\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right)\omega ,$$

где m и M – массы шарика и стержня соответственно, ℓ - длина стержня. Приравнивая эти моменты импульса, получим:

$$\omega = \frac{mv\frac{\ell}{2}}{\frac{M\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2} = 2,67 \text{ рад/с.}$$