

Решение системы линейных уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется система вида:

[illegible]

Сокращенно это можно записать как

$$Ax = b$$

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Или в сокращенной
покомпонентной записи:

$$\sum_{j=1}^n A_{i,j} \cdot x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}$$

Упорядоченный набор значений $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

называется **решением системы**, если
при подстановке в уравнения все
уравнения превращаются в
тождества

СЛАУ называется совместной, если она имеет, хотя бы одно решение.

В противном случае система называется несовместной.

Система называется определённой, если она совместна и имеет единственное решение.

В противном случае (т.е. если система совместна и имеет более одного решения) система называется неопределённой.

Система называется **однородной**, если все правые части уравнений, входящих в нее, равны нулю.

Система называется **квадратной**, если количество уравнений равно количеству неизвестных.

Матрица A называется **вырожденной**, если ее определитель равен нулю.

Если матрица A вырождена, то система линейных уравнений может иметь решение, но не для

Однородная квадратная система уравнений имеет единственное нулевое решение если она не вырождена.

В противном случае она может иметь не нулевые решения.

A = Пример: (Проверьте)

1	3	3	2	-0.84522	-1.1102e-16
2	6	9	5	0.39543	-2.2204e-16
-1	-3	3	0	0.11369	3.3307e-16
-2	-6	6	0	-0.34106	6.6613e-16

Таких ненулевых решений – бесконечно.

Для того, чтобы решить однородную систему линейных уравнений нужно найти пространство нулей матрицы.

Для невырожденной матрицы это пространство (точка) состоит из одного (нулевого) элемента, а для вырожденной имеет ранг, равный $n - \text{rank}(A)$.

`null (A)`

`null (A, tol)`

Возвращает ортогональный базис
нулевого пространства матрицы **A**.

Размерность нулевого
пространства определена как
количество сингулярных значений
матрицы **A** больших, чем **tol**. Если
аргумент **tol** пропускается, он
вычислен как:

`max (size (A)) * max (svd (A)) * eps`

Нуль-пространство определено для
любой матрицы **MxN**

```
>> A=[1 3 3 2;2 6 9 5;-1 -3 3 0]
```

```
A =
```

```
1 3 3 2
```

```
2 6 9 5
```

```
-1 -3 3 0
```

```
>> rank(A)
```

```
ans = 2
```

```
>> w=null(A)
```

```
w =
```

```
-0.771587 -0.559384
```

```
0.410788 -0.074599
```

```
0.153593 -0.261060
```

```
-0.460778 0.783181
```

A^*w

ans =

1.1102e-16 6.6613e-16

1.7764e-15 1.7764e-15

3.0531e-15 1.1102e-16

```
>> A2=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]    >> null(A2)
```

```
A2 =
```

```
1 2 3
```

```
4 5 6
```

```
7 8 9
```

```
>> rank(A2)
```

```
ans = 2
```

```
ans =
```

```
-0.40825
```

```
0.81650
```

```
-0.40825
```

Теорема Кронекера – Капелли

**Теорéма Крóнекера — Капéлли —
критерий совместности системы
линейных алгебраических уравнений:**

**Система линейных алгебраических
уравнений совместна тогда и только
тогда, когда ранг её основной матрицы
равен рангу её расширенной матрицы,
причём система имеет единственное
решение, если ранг равен числу
неизвестных и бесконечное множество
решений, если ранг меньше числа
неизвестных.**

A3 =

1	3	3	2	1
2	6	9	5	-1
-1	-3	3	0	-7

A3 =

1	3	3	2	1
2	6	9	5	1
-1	-3	3	0	1

>> rank(A3)

ans = 2

>> rank(A3)

ans = 3

A =

1	3	3	2
2	6	9	5
-1	-3	3	0

>> rank(A)

ans = 2

A =

1 3 3 2
2 6 9 5
-1 -3 3 0

B =

1
-1
-7

>> X=A\B

X =

0.394495 +v(-0.771587)+w(-0.559384)
1.183486 +v(0.410788)+w(-0.074599)
-1.018349 +v(0.153593)+w(-0.261060)
0.055046 +v(-0.460778)+w(0.783181)

>> B=A*X

B =

В – восстановлен!

1.00000

-1.00000

-7.00000

A =

1	3	3	2
2	6	9	5
-1	-3	3	0

B =

1
1
1

>> X=A\B

X=

-0.029969
-0.089908
0.188991
0.033028

>> A*X

ans =

Не равно B!
0.33333
1.26667
0.86667

Обращение прямоугольных матриц. Псевдообратная матрица

Если A — квадратная и неособенная матрица, то для нее существует обратная матрица A^{-1} .

Если же A — не квадратная, а прямоугольная $m \times n$ -матрица или квадратная, но особенная, то матрица A не имеет обратной и символ A^{-1} не имеет смысла. Однако, для произвольной прямоугольной матрицы A существует «псевдообратная» матрица A^+ , которая обладает некоторыми свойствами обратной матрицы и имеет важные применения при решении системы линейных

В случае, когда A — квадратная неособенная матрица, псевдообратная матрица A^+ совпадает с обратной A^{-1} .

Свойства псевдообратной матрицы:

1. $A A^+ A = A$
2. $(A^+)^+ = A$
3. $(A A^+)^T = A A^+$
4. $(A^+ A)^T = A^+ A$
5. $(A A^+)^2 = A A^+$
6. $(A^+ A)^2 = A^+ A$

Если $Ax=b$ несовместная система линейных алгебраических уравнений, то решая его с помощью псевдообратной матрицы получим приближенное решение минимальной нормы, наилучшее по методу наименьших квадратов.

$$\min_x \sum (|y - Ax|^2), \|x\| \rightarrow \min$$

Для вычисления псевдообратной матрицы используется функция:

`pinv (x)`

`pinv (x, tol)`

Сингулярные значения матрицы **A** меньшие, чем **tol** игнорируются.

Если аргумент **tol** пропускается, он вычислен как:

`max ([rows(x), columns(x)]) * norm (x) * eps`

```
>> A2=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
```

```
A2 =
```

```
1 2 3
```

```
4 5 6
```

```
7 8 9
```

```
>> rank(A2)
```

```
ans = 2
```

```
>> Ap=pinv(A2)
```

```
Ap =
```

```
>> rank(Ap) ans = 2
```

```
-6.3889e-01 -1.6667e-01 3.0556e-01
```

```
-5.5556e-02 3.8164e-17 5.5556e-02
```

```
5.2778e-01 1.6667e-01 -1.9444e-01
```

```
>> AR=[A2 [1;1;1]]
```

```
AR =
```

```
1 2 3 1
```

```
4 5 6 1
```

```
7 8 9 1
```

```
>> rank(AR)
```

```
ans = 2
```

```
>> pinv(A2)*[1;1;1]
```

```
ans =
```

```
-5.0000e-01
```

```
6.9389e-18
```

```
5.0000e-01
```

```
>> A2*ans
```

```
ans =
```

```
1.00000
```

```
1.00000
```

```
1.00000
```

```
>> A2\[1;1;1]
```

```
ans =
```

```
-5.0000e-01
```

```
1.1102e-16
```

```
5.0000e-01
```

```
>> AR=[A2 [1;1;0]]
```

```
AR =
```

```
1 2 3 1
```

```
4 5 6 1
```

```
7 8 9 0
```

```
>> rank(AR)
```

```
ans = 3
```

```
>> pinv(A2)*[1;1;0]
```

```
ans =
```

```
-0.805556
```

```
-0.055556
```

```
0.694444
```

```
>> A2*ans
```

```
ans =
```

```
1.16667
```

```
0.66667
```

```
0.16667
```

```
>> A2\[1;1;0]
```

```
ans =
```

```
-0.805556
```

```
-0.055556
```

```
0.694444
```

Таким образом, для численного решения системы линейных уравнений можно применять оператор « $\backslash$ », то есть систему $Ax=b$, можно решить методом: $X=A \backslash b$, как для квадратной (вырожденной или невырожденной), так и для прямоугольной матрицы.

Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы

Задача на собственные значения для
квадратной матрицы имеет вид:

$$A\psi = \lambda\psi$$

Или в покомпонентной записи:

$$\sum_{j=1}^n A_{i,j} \psi_{j,k} = \lambda_k \psi_{i,k}$$

Совокупность всех собственных векторов, относящихся к одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором, образует линейное подпространство.

Если вектора $X_1, X_2, \dots, X_n$ являются собственными и относятся к разным собственным значениям, то векторы $X_1, X_2, \dots, X_n$ – линейно независимы.

Матрица A приводима к диагональному виду тогда и только тогда, когда существует базис в n -мерном пространстве, состоящий из собственных векторов. Факторизация матрицы A на матричное представление уравнения на собственные значения. Λ – диагональная матрица, состоящая из собственных значений; Ψ – матрица собственных векторов.

$$A\Psi = \Psi\Lambda \rightarrow A = \Psi\Lambda\Psi^{-1} \quad \text{Факторизация матрицы}$$

Матрица A называется неотрицательно определенной, если $X^H A X \geq 0$ Для любого вектора X

Матрица A называется симметрической, если: $A^H = A$ (H – символ эрмитова транспонирования, т.е. транспонирования и комплексного сопряжения).

Для симметрической и неотрицательно определенной матрицы собственные вектора –

$[V, \lambda] = \text{eig}(A)$ – вычисление матрицы собственных векторов (V) и диагональной матрицы собственных значений (λ) от матрицы A
 $\rightarrow [V,D]=\text{eig}(A2)$

1	2	3	$V =$
4	5	6	-0.231971 -0.785830 0.408248
7	8	9	-0.525322 -0.086751 -0.816497
			-0.818673 0.612328 0.408248

$\gg \text{diag}(D)'$

ans =

1.6117e+01 -1.1168e+00 -1.3037e-15

>> V'*V

ans =

**1.0000e+00 -2.7343e-01 5.5511e-17
-2.7343e-01 1.0000e+00 -9.9920e-16
5.5511e-17 -9.9920e-16 1.0000e+00**

**Матрица A2 – не симметрическая и
не является неотрицательно
определенной, поэтому
собственные вектора не
ортономированные**

Теплицева матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & a & b & c \\ f & e & a & b \\ g & f & e & a \end{pmatrix}$$

На всех диагоналях одинаковые значения

`toeplitz (c)`

`toeplitz (c, r)`

**Возвращает матрицу Теплица
созданную из вектора *c* (в первом
случае).**

**Во втором случае верхняя
треугольная из вектора *c*, а нижняя
треугольная из вектора *r*.**

Создадим матрицу $K_{i,j} = \rho^{(i-j)^2}, i, j \in \overline{0, n-1}$

```
>> r=0.9;
```

```
>> n=5;a=(0:n-1).^2;
```

```
>> c=r.^a;
```

```
>> K=toeplitz (c)
```

```
K =
```

1.00000	0.90000	0.65610	0.38742	0.18530
0.90000	1.00000	0.90000	0.65610	0.38742
0.65610	0.90000	1.00000	0.90000	0.65610
0.38742	0.65610	0.90000	1.00000	0.90000
0.18530	0.38742	0.65610	0.90000	1.00000

Найдем собственные вектора и собственные значения этой матрицы

```
>> [V,D]=eig(K);
```

```
V =
```

```
-1.6166e-01  3.8166e-01  5.7288e-01 -5.9526e-01  3.8168e-01  
4.9416e-01 -5.9526e-01 -1.7637e-01 -3.8166e-01  4.7402e-01  
-6.7775e-01  7.8822e-16 -5.3048e-01  1.9868e-17  5.0916e-01  
4.9416e-01  5.9526e-01 -1.7637e-01  3.8166e-01  4.7402e-01  
-1.6166e-01 -3.8166e-01  5.7288e-01  5.9526e-01  3.8168e-01
```

```
>> diag(D)'
```

```
ans =
```

```
0.00057261  0.01525073  0.18139281  1.14334725  3.65943661
```

```
>> V'*V
```

```
ans =
```

```
1.0000e+00  1.1102e-16  6.9389e-17 -4.1633e-17 -9.0206e-17  
1.1102e-16  1.0000e+00 -1.6653e-16  5.5511e-17  5.5511e-17  
6.9389e-17 -1.6653e-16  1.0000e+00 -1.1102e-16  5.5511e-17  
-4.1633e-17  5.5511e-17 -1.1102e-16  1.0000e+00 -2.2204e-16  
-5.5511e-17  5.5511e-17  2.7756e-17 -2.2204e-16  1.0000e+00
```

**Так как теплицева матрица
симметрическая и неотрицательно
определенная, то собственные
векторы ортогональны.**

Большую роль в линейной алгебре играют сингулярные числа матрицы. Собственные значения введены для квадратных матриц, а для прямоугольных матриц используется также понятие сингулярные числа. Сингулярные числа матрицы это корень квадратный из модуля собственных чисел матрицы $A^T * A$.

$s = \text{svd}(A)$

$[U, S, V] = \text{svd}(A)$

**Эта функция вычисляет факторизацию матрицы $A(m \times n)$ в виде: $A = U * S * V'$,
Где U – матрица $m \times m$, S – диагональная матрица, V – матрица $n \times n$.**

Как выглядит факторизация неотрицательно определенной симметричной матрицы?

В чем отличие от приведенной

Выполнить факторизацию матриц:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Найти ранг этих матриц, обратную и псевдообратную матрицы.

Проверить, являются ли ортонормированными матрицы факторизации.

Найти нуль-пространство матриц.

A =

1	3	3	2
2	6	9	5
-1	-3	3	0

>> [U S V]=svd(A)

U =

-0.363979	-0.184895	0.912871
-0.930500	0.028930	-0.365148
-0.041105	0.982332	0.182574

S =

Diagonal Matrix

1.2985e+01	0	0	0
0	4.4039e+00	0	0
0	0	4.7430e-16	0

V =

-0.168187	-0.251905	-0.771587	-0.559384
-0.504560	-0.755716	0.410788	-0.074599
-0.738535	0.602348	0.153593	-0.261060
-0.414365	-0.051123	-0.460778	0.783181

>> U'*U=

1.0000e+00	-2.7756e-17	-1.7347e-18
-2.7756e-17	1.0000e+00	-2.7756e-17
-1.7347e-18	-2.7756e-17	1.0000e+00

>> V*V' =

1.00000	0.00000	0.00000	-0.00000
0.00000	1.00000	-0.00000	0.00000
0.00000	-0.00000	1.00000	0.00000
-0.00000	0.00000	0.00000	1.00000

**Задания и результаты выполнения
выслать мне в теле письма.**