Семинар 4. Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Основные теоремы о бесконечно малых функциях.

Определение

Число A называется пределом функции f(x) при $x \to a$, то есть $\lim_{x\to a} f(x) = A$, если - $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta$ - окрестность $U_a = \{X \mid 0 < |x-a| < \delta\}, (\delta = \delta(\varepsilon))$, что $|f(x)-A| < \varepsilon$ при $x \in U_a$ (1)

Неравенство (1) должно выполняться для всех тех *x*, для которых определена функция *f(x)*, то есть для $x \in X \cap \dot{U}_a$ согласно определения предельной точки в каждой окрестности $\dot{U}_a$ множество таких точек не пусто.

Определение

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ (a – вещественное число или символ ∞), если $\forall \varepsilon > 0, \exists U_a$, что $|\alpha(x)| < \varepsilon, x \in U_a$. Это эквивалентно $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$ (1) или $\alpha(x) \to 0, x \to a$ (2). Аналогично определяется бесконечно малая функция при $x \to a-0$, $x \to a+0$, $x \to -\infty$, $x \to +\infty$.

Определение

Функция *f(x)* называется бесконечно большой при $x \to a$ (*a* – число или символ ∞) $f(x) \to \infty$ при $x \to a$ (1), если для $\forall E > 0 \Rightarrow \exists U_a$ точки а, что $|f(x)|>E$ при $x \in U_a$ (2) для всех допустимых значений аргумента *x*.

Если функция f(x) - бесконечно большая при $x \to a$, то условно пишут $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

Пример $tgx \to \infty$ при $x \to \frac{\pi}{2}$

Записи $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ соответственно означают $f(x) < -E$ при $x \in U_a$. $f(x) > E$ при $x \in U_a$.

1.Если $f(x) \to \infty$ при $x \to a$, то $\frac{1}{f(x)} \to 0$ при $x \to a$

2.Если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то $\frac{1}{\alpha(x)} \to \infty$ при $x \to a$

Основные теоремы о бесконечно малых функциях:

Теорема 1 Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть функция бесконечно малая при $x \to a$.

Теорема 2 Произведение ограниченной при $x \to a$ функции на бесконечно малую при $x \to a$ функцию, есть функция бесконечно малая функция при $x \to a$

Теорема 3 Произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ есть функция бесконечно малая при $x \to a$.

Следствие Целая положительная степень $[\alpha(x)]^n$ бесконечно малой функции $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$ есть бесконечно малая функция.

Замечание Отношение двух бесконечно малых функций $\alpha(x) \to 0, \beta(x) \to 0$ при $x \to a$ может быть функцией произвольного поведения.

С помощью действия деления можно сравнивать между собой бесконечно малые.

Определение 1 Две бесконечно малые функции $\alpha(x) \to 0, \beta(x) \to 0$ при $x \to a$ имеют одинаковый порядок при $x \to a$, если их отношение имеет конечный предел, отличный от нуля, то есть

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = k \neq 0$$

Определение 2 При $x \to a$ порядок бесконечно малой функции $\beta(x)$ выше порядка бесконечно малой функции $\alpha(x)$, если отношение $\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$ есть бесконечно малая при $x \to a$, то есть $\lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$. В этом случае пишут $\beta(x) = O[\alpha(x)]$ при $x \to a$

Определение 3 При $x \to a$ бесконечно малая функция $\beta(x)$ имеет порядок *n* (*n* – натуральное число) относительно бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} \frac{\beta(x)}{\alpha^n(x)} = k \neq 0$

При вычислении пределов часто используется следующая таблица эквивалентных функций

Эквивалентность при $x \to 0$	Равенство при $x \to 0$
$\sin x \sim x$	$\sin x = x + o(x)$
$shx \sim x$	$shx = x + o(x)$
$tgx \sim x$	$tgx = x + o(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin x = x + o(x)$
$arctgx \sim x$	$arctgx = x + o(x)$
$1 - \cos x \sim x^2/2$	$1 - \cos x = x^2/2 + o(x^2)$
$chx - 1 \sim x^2/2$	$chx - 1 = x^2/2 + o(x^2)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^x - 1 = x + o(x)$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+x) = x + o(x)$
$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$
$a^x - 1 \sim x \ln a$	$a^x = 1 + x\ln a + o(x)$

Примеры с решениями

1.Пусть *t* –бесконечно малая величина. Сравнить бесконечно малые $\alpha = 5t^2 + 2t^5$ **и** $\beta = 3t^2 + 2t^3$

Решение. Найдем

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t\to 0}\frac{5t^2 + 2t^5}{3t^2 + 2t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{5 + 2t^3}{3 + 2t} = \frac{5}{3}$$

Так как предел отношения α к β есть число, отличное от нуля, то эти величины – бесконечно малые одного и того же порядка

2.Сравнить бесконечно малые $\alpha = t\sin^2 t$ **и** $\beta = 2t\sin t$ **при** $t \to 0$

Решение. Найдем

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t\to 0}\frac{t\sin^2 t}{2t\sin t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\sin t = 0 \Rightarrow \alpha = o(\beta)$$

3.Сравнить бесконечно малые $\alpha = t\ln(1+t)$ **и** $\beta = t\sin t$ **при** $t \to 0$

Решение. Найдем

$$\lim_{t\to 0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{t\to 0}\frac{t\ln(1+t)}{t\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\ln(1+t)}{t}}{\frac{\sin t}{t}} = 1 \Rightarrow \alpha =\sim \beta$$

4.Найти $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x\sin x)}{tgx^2}$

Решение. Заменим числитель и знаменатель дроби эквивалентными бесконечно малыми: *ln(1+3xsinx)~3xsinx* , $tgx^2 \sim x^2$. Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{tgx^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{x^2} = 3$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить порядок бесконечно малой величины $y = xe^{x}$ по сравнению с бесконечно малой x.

2. Определить порядок бесконечно малой величины $y = \sqrt{1 + x\sin x} - 1$ по сравнению с бесконечно малой x.

3. Определить порядок бесконечно малой величины $y = \sqrt{2\sin x}$ по сравнению с бесконечно малой x.

4. Сравнить бесконечно малые $\alpha = t^2 \sin^2 t$ и $\beta = t \cdot tgt$ при $t \to 0$

5. Найти следующие пределы :

$$1) \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{tg3x}; 2) \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{\ln^2(1+2x)}$$

$$3) \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}; 4) \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}; 5) \lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}; 6) \lim_{x\to 0} \frac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$$