Повторительно-обобщающий урок по теме «Решение тригонометрических неравенств и их систем»

Цели урока:

- *Образовательные:*
- * Обобщить и систематизировать знания учащихся о различных видах тригонометрических неравенств и их систем, способах их решения.
- * Обогатить и углубить знания учащихся применением тригонометрических неравенств и их систем в нестандартных ситуациях.
- * Провести диагностику усвоения системы знаний и умений и её применения для выполнения практических заданий стандартного уровня с переходом на более высокий уровень.
- *Развивательные:*
- * Способствовать развитию умения анализировать, наблюдать и делать выводы.
- *Воспитательные:*
- * Выработать самооценку в выборе пути, критерии оценки своей работы и работы товарища.
- * Повысить интерес учащихся к нестандартным задачам, сформировать у них положительный мотив учения.

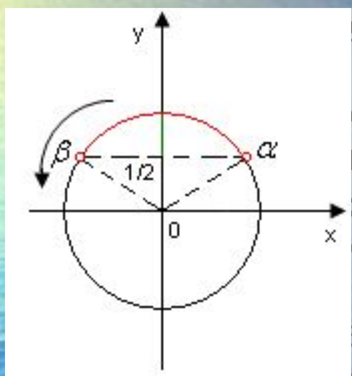
Виды тригонометрических неравенств и методы их решения

I. Простейшие тригонометрические неравенства (неравенства вида sin x>(<)a, cos x>(<)a, tg x>(<)a, ctg x>(<)a

Алгоритм решения неравенств с помощью единичной окружности.

Пример. $\sin x \geq ½$

1. Заменить неравенство уравнением (устно) и
диничной окружности точки, соответствующие



тметить на единичной окружности точки,
щие неравенству (выделить соответствующую дугу).

казать направление отсчёта (на выделенной дуге
ложительное направление, т. е. против
ки).

айти начало дуги и угол, ему соответствующий (меньший угол).

5. Найти конец дуги и угол, ему соответствующий (больший угол).

6. Записать ответ в виде двойного неравенства с учётом периодичности функции (слева – угол, соответствующий началу дуги).

7. Записать ответ в виде промежутка.

α - начало дуги, $\alpha = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; β - конец дуги, $\beta = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6} < X < \frac{5\pi}{6}$

С учётом периодичности:

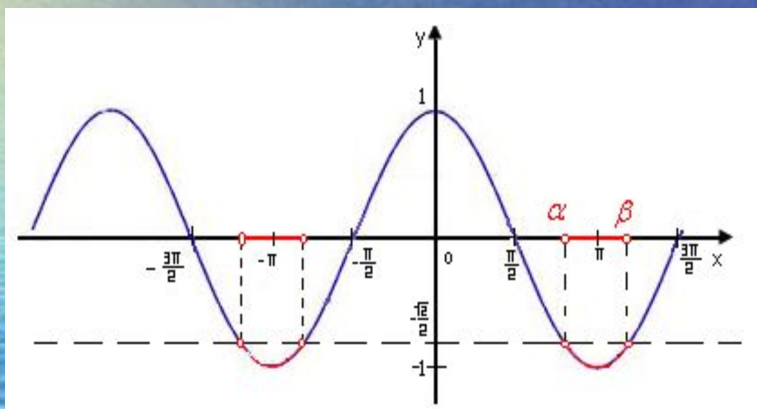
$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n), n \in Z.$

Алгоритм решения неравенств графическим способом

Пример: $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = \frac{3\pi}{4}; \beta = \frac{5\pi}{4}$



неравенство уравнением и
f(x) , где f(x) – одна из
функций, и y=a.
точки пересечения графиков
сциссы этих точек.
ту часть графика, которая
тву.
м периоде выделить промежуток оси x, на
котором выполняется заданное неравенство.
5. Записать ответ в виде двойного неравенства (слева-меньший угол) с учётом периодичности функции.
6. Записать ответ в виде промежутка.

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z;$$

Ответ: $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z.$

II. Неравенства, приводимые к простейшим

1. С помощью введения нового неизвестного t= ax+ b

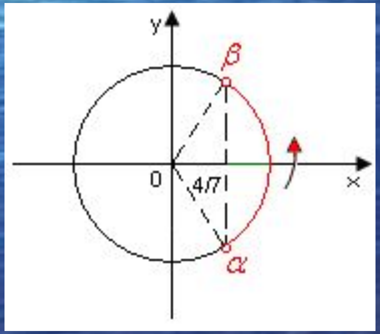
Суть метода: введя новую переменную t=ax+b, привести неравенство к простейшему виду. Решить полученное неравенство для переменной t. Затем вернуться к переменной x и найти её значение. Записать ответ в виде промежутка.

Пример: $\cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)>\frac{4}{7}.$

Решение:

Учитывая, что функция f(x)- чётная, запишем неравенство в виде: $\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)>\frac{4}{7}.$

Пусть $4x-\frac{\pi}{3}=t,$ тогда неравенство примет вид $\cos t>\frac{4}{7}.$



$$\alpha=-\arccos\frac{4}{7};\ \beta=\arccos\frac{4}{7}$$

$$-\arccos\frac{4}{7}+2\pi n<t<\arccos\frac{4}{7}+2\pi n, n\in Z$$

$$-\arccos\frac{4}{7}+2\pi n<4x-\frac{\pi}{3}<\arccos\frac{4}{7}+2\pi n, n\in Z$$

$$\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{4}{7}+2\pi n<4x<\frac{\pi}{3}+\arccos\frac{4}{7}+2\pi n, n\in Z$$

$$\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{7}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{7}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{7}+\frac{\pi n}{2};\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{7}+\frac{\pi n}{2}\right), n\in Z.$

2. С помощью основных тригонометрических формул.

Суть метода: используя основные тригонометрические формулы, приводим неравенство к простейшему виду. Далее применяем алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств.

Пример: $\sin^4 x + \cos^4 x \le \frac{5}{8}.$

Решение.

Преобразуем левую часть неравенства к виду: $\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x \le \frac{5}{8};$

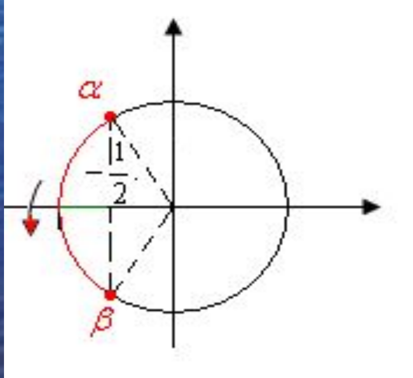
Используем формулу понижения степени $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}:$ $1 - \frac{1}{2}\cdot 4\sin^2 x\cos^2 x \le \frac{5}{8};$

$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \le \frac{5}{8};\ \frac{1}{2}\sin^2 2x \ge \frac{3}{8};\ \sin^2 2x \ge \frac{3}{4}$

$$\frac{1-\cos 4x}{2} \ge \frac{3}{4}; 2\left(1-\cos 4x\right) \ge 3; 1-\cos 4x \ge \frac{3}{2}; \cos 4x \le -\frac{1}{2}.$$

Пусть 4x=t, тогда неравенство примет вид:

$\cos t \le -\frac{1}{2}.$



$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}; \beta = 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le t \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \le 4x \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \le x \le \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

$$\text{Ответ}: \left[\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}\right], n \in Z.$$

3.С помощью введения вспомогательного угла.

(неравенства вида $A\sin x + B\cos x > C, A\sin^2 x + B\cos^2 x > C$, где A,B,C-данные числа и AB $\neq 0$).

Общий метод: Пусть дано неравенство $A\sin x + B\cos x > C$. (1) Разделим обе части неравенства на

$\sqrt{A^2+B^2} \neq 0 \left(A^2+B^2>0\right)$, тогда (1) примет вид:

$$a\sin x + b\cos x > c(2), где\, a = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}; b = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}; c = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Т.к. $a^2+b^2=1$, то можно подобрать такой угол α, что $a=\sin\alpha$ и $b=\cos\alpha$. Тогда

неравенство (2) можно записать в виде $\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha > c$ или $\cos(x-\alpha) > c$ (3).

Если же подобрать такой угол β, что $a=\cos\beta$ и $b=\sin\beta$, то неравенство (2) можно

записать в виде $\sin\left(x+\beta\right) > c$ (4).

Таким образом, решение неравенства (1) сводится к решению простейшего неравенства

(3) или (4).

Пример: $2\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x > \sqrt{2} + 1.$

Решение:

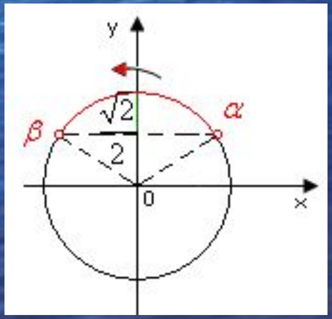
Преобразуем левую часть неравенства: $2\sin^2 x - 1 + 2\sqrt{3}\sin x\cos x > \sqrt{2}.$

Используем формулы $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, тогда $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x > \sqrt{2}.$

Разделим обе части неравенства на $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$, получим $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Так как $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то $\sin 2x\cos\frac{\pi}{6} - \cos 2x\sin\frac{\pi}{6} > \frac{\sqrt{2}}{2}; \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Пусть $2x - \frac{\pi}{6} = t$, тогда $\sin t > \frac{\sqrt{2}}{2}.$



$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \beta = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}.$

$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z;$

$\frac{\pi}{4} + 2\pi n < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z;$

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n < 2x < \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$

$\frac{5\pi}{12} + 2\pi n < 2x < \frac{11\pi}{12} + 2\pi n, n \in Z;$

$\frac{5\pi}{24} + \pi n < x < \frac{11\pi}{24} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{24} + \pi n; \frac{11\pi}{24} + \pi n\right), n \in Z.$

III. Неравенства, решаемые заменой переменной

1.Приводимые к квадратным или рациональным заменой t=f(x), где f(x) - одна из тригонометрических функций.

Пример: $11\sin x + \cos 2x \le 6.$

Решение.

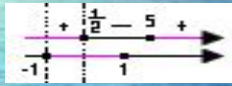
Преобразуем данное неравенство: $11\sin x + 1 - 2\sin^2 x - 6 \le 0;$

$$-2\sin^2 x + 11\sin x - 5 \le 0;$$

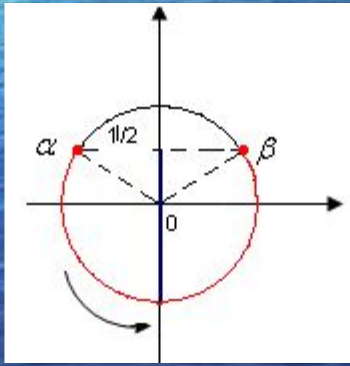
$$2\sin^2 x - 11\sin x + 5 \ge 0.$$

Пусть $\sin x = t; t \in [-1;1]$, тогда неравенство примет вид: $2t^2 - 11t + 5 \ge 0.$

Решим данное неравенство: $2t^2 - 11t + 5 = 0; D = 81; t_1 = \frac{1}{2}; t_2 = 5.$



$$-1 \le t \le \frac{1}{2}; \quad -1 \le \sin x \le \frac{1}{2}; \Rightarrow \sin x \le \frac{1}{2}.$$



$$\alpha = -\pi - \arcsin\frac{1}{2} = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6}; \beta = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ:} \left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z.$$

2. Неравенства, решаемые введением новой переменной t=sinx+cosx.

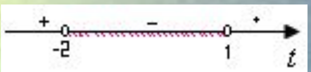
Рассмотрим неравенства, в которые входят выражения sinx+cosx и sin2x. Их удобно решать при помощи замены неизвестного t=sinx+cosx, так как при этом

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x - 1 = (\sin x + \cos x)^2 - 1 = t^2 - 1.$$

Пример 1. $2\sin x\cos x + \sin x + \cos x < 1.$ Решение.

Пусть $t = \sin x + \cos x,$ тогда $2\sin x\cos x = t^2 - 1$. В результате неравенство примет вид $t^2 - 1 + t < 1$ или $t^2 + t - 2 < 0.$

$t^2 + t - 2 = 0; t_1 = -2; t_2 = 1.$



$-2 < t < 1$

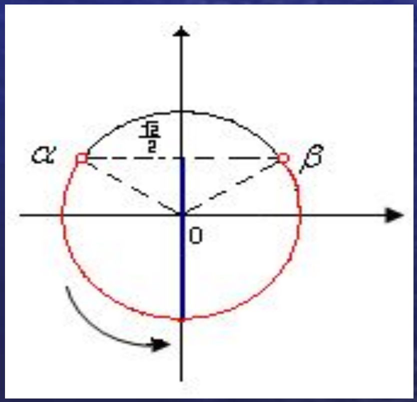
$-2 < \sin x + \cos x < 1.$

Разделим обе части неравенства на $\sqrt{2}$, получим:

$$-\frac{2}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x < \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$-\sqrt{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пусть $x + \frac{\pi}{4} = a,$ тогда неравенство примет вид $\sin a < \frac{\sqrt{2}}{2}.$



$$\alpha = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}; \beta = \frac{\pi}{4};$$

$$-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < a < \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z; \quad -\frac{5\pi}{4} + 2\pi n < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z;$$

$$-\frac{3\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi n; n \in Z.$$

$$\text{Ответ}: \left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right), n \in Z.$$

IV. Неравенства, решаемые методом интервалов.

Алгоритм решения тригонометрических неравенств методом интервалов.

1. С помощью преобразований привести неравенство к виду $f(t)>0$ ($f(t)<0$) (если это необходимо).
2. Найти основной период T функции f (T равен НОК периодов, входящих в неравенство тригонометрических функций).
3. Найти нули функции $f(t)$ на промежутке $[0;T]$, решив уравнение $f(t)=0$.
4. Найти точки разрыва функции $f(t)$ на этом промежутке.
5. Найденными точками разделить отрезок $[0;T]$ на части, в каждой из которых функция $f(t)$ имеет постоянный знак.
6. Определить знак функции в каждой части методом пробных точек (результат удобно оформить в виде таблицы).
7. Выбрать те части, в которых выполняется исходное неравенство.
8. Учитывая периодичность функции, записать решение исходного неравенства.

Пример: $\dfrac{2\sin x+1}{2\cos\frac{x}{2}-1}\ge 0.$

Решение.

1. f(x)=$\dfrac{2\sin x+1}{2\cos\frac{x}{2}-1}.$

2. T(f)=4π

3. Найдём нули функции на промежутке $[0;4\pi]$

f(x)=0; 2sinx+1=0; 2sinx=-1; sinx=- $\frac{1}{2}$; x= $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.$

Выберем из данной серии решений те значения x, которые принадлежат $[0;4\pi]$.

$n=0; x=-\dfrac{\pi}{6}\notin[0;4\pi];$

$n=1; x=\dfrac{7\pi}{6}\in[0;4\pi];$

$n=2; x=\dfrac{11\pi}{6}\in[0;4\pi]$

$n=3; x=\dfrac{19\pi}{6}\in[0;4\pi]$

$n=4; x=\dfrac{23\pi}{6}\in[0;4\pi]$

$n=5; x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi\notin[0;4\pi]$

Итак, $x=\dfrac{7\pi}{6};\dfrac{11\pi}{6};\dfrac{19\pi}{6};\dfrac{23\pi}{6}\in[0;4\pi].$

4. Найдём точки разрыва функции на промежутке $[0;4\pi]$.

$2\cos\dfrac{x}{2}-1=0; \cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}; \dfrac{x}{2}=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z; x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+4\pi n; n\in Z.$

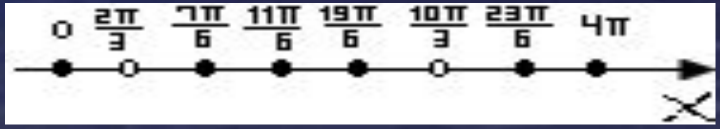
Выберем из данной серии значения x, принадлежащие промежутку $[0;4\pi]$

$n=0; x=-\dfrac{2\pi}{3}\notin[0;4\pi]; x=\dfrac{2\pi}{3}\in[0;4\pi];$

$n=1; x=-\dfrac{2\pi}{3}+4\pi=\dfrac{10\pi}{3}\in[0;4\pi]; x=\dfrac{2\pi}{3}+4\pi=\dfrac{14\pi}{3}\notin[0;4\pi];$

$n=2; x=-\dfrac{2\pi}{3}+8\pi=\dfrac{22\pi}{3}\notin[0;4\pi]; x=\dfrac{2\pi}{3}+8\pi=\dfrac{26\pi}{3}\notin[0;4\pi]$

Итак, $x=\dfrac{2\pi}{3};\dfrac{10\pi}{3}\in[0;4\pi].$

5. 

6. Определим знак функции в каждой части методом пробных точек.

	$\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{6}\right]$	$\left[\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$	$\left[\frac{11\pi}{6};\frac{19\pi}{6}\right]$	$\left[\frac{19\pi}{6};\frac{10\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{10\pi}{3};\frac{23\pi}{6}\right]$	$\left[\frac{23\pi}{6};4\pi\right]$
$2\sin x+1$	+	+	-	+	-	-	+
$2\cos\frac{x}{2}-1$	+	-	-	-	-	+	+
левая часть	+	-	+	-	+	-	+

7. Неравенство выполняется при $x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left[\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{19\pi}{6};\frac{10\pi}{3}\right)\cup\left[\frac{23\pi}{6};4\pi\right].$

8. Учитывая периодичность функции, запишем ответ:

$$x\in\left[4\pi k;\frac{2\pi}{3}+4\pi k\right)\cup\left[\frac{7\pi}{6}+4\pi k;\frac{11\pi}{6}+4\pi k\right]\cup\left[\frac{19\pi}{6}+4\pi k;\frac{10\pi}{3}+4\pi k\right)\cup$$
$$\cup\left[\frac{23\pi}{6}+4\pi k;4\pi+4\pi k\right],k\in Z.$$

V. Системы тригонометрических неравенств.

Алгоритм решения систем неравенств:

1. Отметить на окружности решение первого неравенства системы.

2. Отметить решение второго неравенства системы.

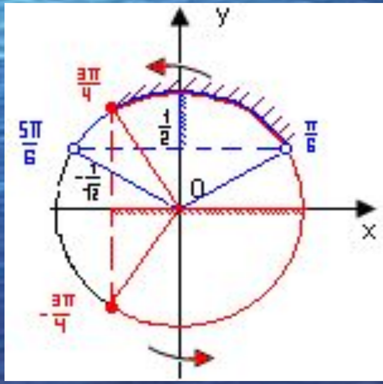
3. Выделить общее решение системы (пересечение дуг).

4. Записать общее решение системы неравенств.

Пример:

$$\begin{cases} \cos x \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \\ \sin x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение.



$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ:} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right], n \in Z.$$

VI. Использование тригонометрических неравенств для нахождения области определения функции.

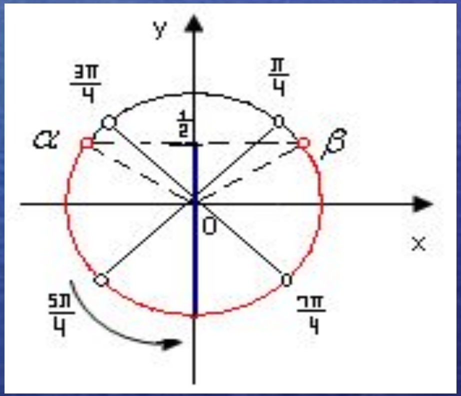
Пример: $y = tg2x - \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\sin x}}.$

Решение.

Область определения функции находим из условий:

$1)\ 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, т.е. \quad x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z;$

$2)\ 1 - 2\sin x > 0; \sin x < \dfrac{1}{2}.$



$\alpha = -\pi - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{7\pi}{6}; \beta = \dfrac{\pi}{6}.$

Тогда $x \in \left(-\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z.$

Ответ: $\left(-\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\dfrac{7\pi}{4} + 2\pi n; \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z.$

VII. Неравенства смешанного типа.

Пример: $2^{4\cos^2 x+2\left(\sqrt{2}-1\right)\cos x} < 2^{\sqrt{2}}.$

Решение.

$2^{4\cos^2 x+2\left(\sqrt{2}-1\right)\cos x} < 2^{\sqrt{2}},$

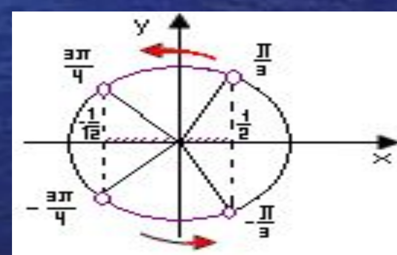
$\textit{откуда}\ 4\cos^2 x+2\left(\sqrt{2}-1\right)\cos x < \sqrt{2}.$

$\textit{Пусть}\ \cos x = t, t\in[-1;1], \textit{тогда}\ 4t^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)t-\sqrt{2}<0;$

$4t^2+2\left(\sqrt{2}-1\right)t-\sqrt{2}=0; D=4\left(\sqrt{2}-1\right)^2-4\cdot4\cdot\left(-\sqrt{2}\right)=8-8\sqrt{2}+4+16\sqrt{2}=12+8\sqrt{2}=$

$=4\left(3+2\sqrt{2}\right)=4\left(\sqrt{2}+1\right)^2;$

$t_1=\frac{-2\left(\sqrt{2}-1\right)-2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8}=\frac{-4\sqrt{2}}{8}=-\frac{\sqrt{2}}{2}; t_2=\frac{-2\left(\sqrt{2}-1\right)+2\left(\sqrt{2}+1\right)}{8}=\frac{1}{2}.$



$-\frac{\sqrt{2}}{2}<t<\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<\frac{1}{2}.$

$\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$

$\textit{и}\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

$\text{Ответ}: \left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right), n\in Z.$