ГЕОМЕТРИЯ - 8

Четыре замечательные точки треугольника

в Оглавление до 109

Теорема №1

- Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон[1].
- Обратно: каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалена от его сторон угла, лежит на его биссектрисе.

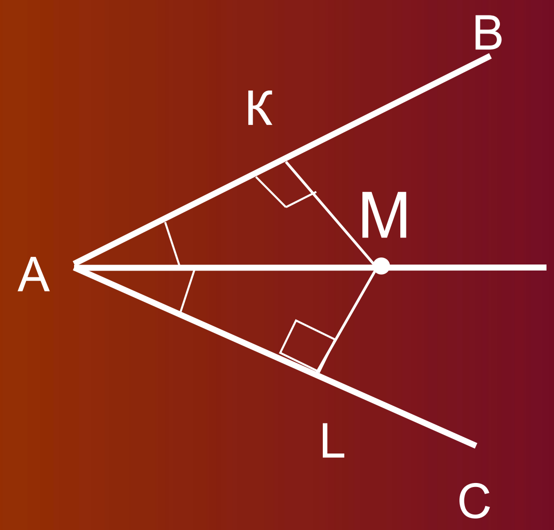
[1] т.е равноудалена от прямых, содержащих стороны угла.

Доказательство

- 1) Возьмем произвольную точку M на биссектрисе $\angle BAC$

  $MK \perp AB$, $ML \perp AC$.

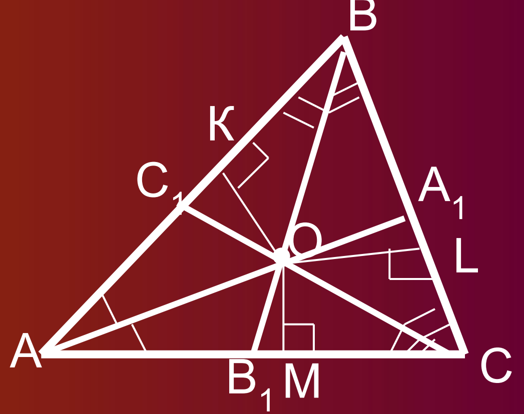
  $MK = ML$ (т.к $\Delta AMK = \Delta AML$ по гипотенузе и острому углу).



- 2) Точка M лежит внутри $\angle BAC$ и равноудалена от его сторон AB, AC.
- $\Delta AMK = \Delta AML$ (т. к. AM - общая гипотенуза, $MK = ML$) $\Rightarrow \angle BAM = \angle MAC \Rightarrow$ луч AM- биссектриса $\angle BAC$

Следствие

- Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке

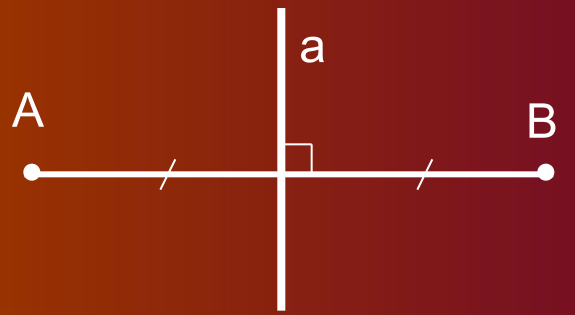


- O - точка пересечения биссектрис AA_1, BB_1 ΔABC.
- Проведем $OK \perp AB$, $OL \perp BC$, $OM \perp CA$. $OK = OM$ и $OK = OL \Rightarrow OM = OL$.

- т.е точка O равноудалена от сторон $\angle ABC \Rightarrow O \in$ биссектрисе CC_1 этого угла, $\Rightarrow BB_1 \cap CC_1 \cap AA_1 = O$

в Оглавление до 109

- Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.



в Оглавление до 109

Теорема №2

- Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.
- Обратно: каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

в Оглавление

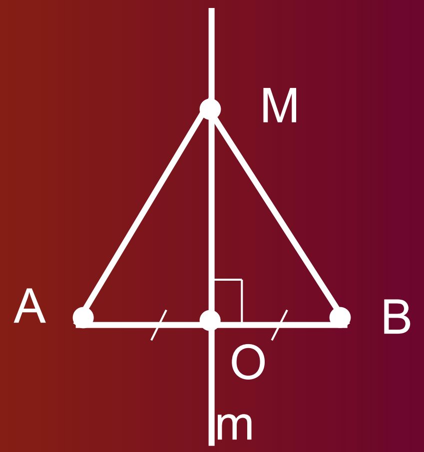
Доказательство

1) Прямая m- серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Точка O - середина этого отрезка.

Докажем, что AM = MB.

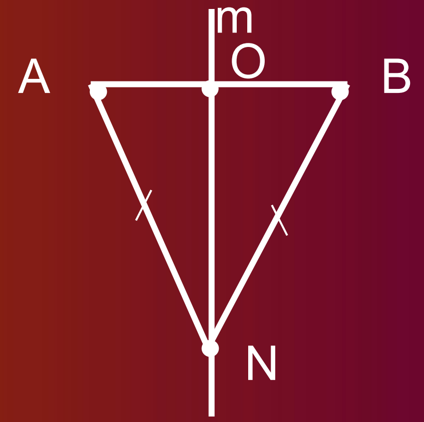
ΔAMO = ΔMOB (по двум катетам) ⇒ AM = MB



2) Точка N равноудалена от концов отрезка.
Докажем, что точка N лежит на прямой m.

ΔANB - равноб. (т.к AN = NB). NO - медиана и высота ⇒

NO ⊥ AB, поэтому прямые ON и m совпадают, т.е N- точка прямой m.



в Оглавление
до 109

Следствие

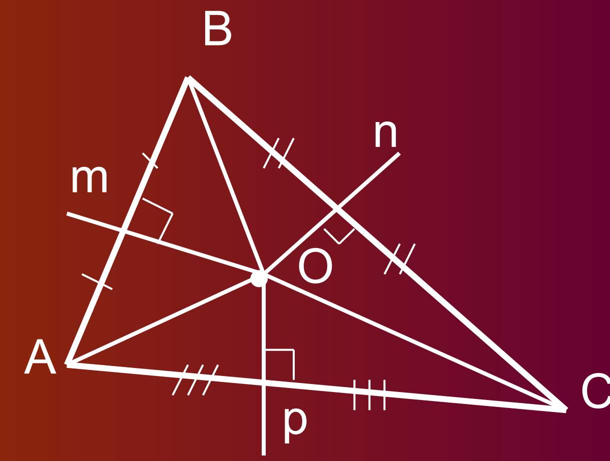
- Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство:

$m \perp BA$, $n \perp BC$.

По теореме о серединном перпендикуляре $OB = OA$ и $OB = OC \Rightarrow OA = OC$

Т.е точка O равноудалена от концов отрезка AC и, значит, лежит на серединном перпендикуляре p к этому отрезку $\Rightarrow$ перпендикуляры m, n и p пересекаются в точке O.



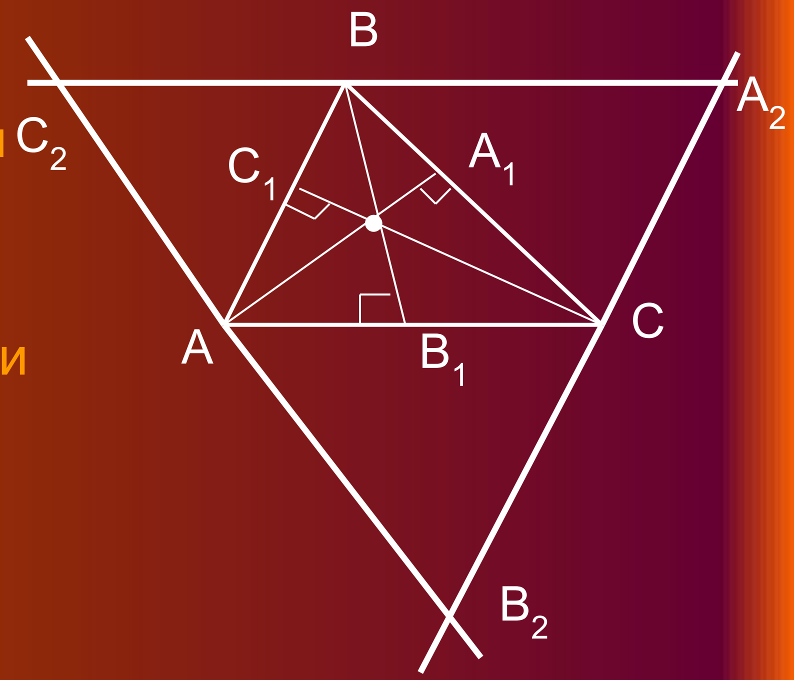
Теорема №3

- Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

- Доказательство

Проведем через каждую вершину ΔABC прямые:
$C_2B_2 \parallel BC$, $C_2A_2 \parallel AC$,
$A_2B_2 \parallel AB$. Получим $\Delta A_2B_2C_2$.
Точки A, B и C являются серединами сторон $\Delta A_2B_2C_2 \Rightarrow AB = A_2C$ и
$CB_2 = AB$ как противоположные стороны параллелограммов ABA_2C и $ABCB_2 \Rightarrow A_2C = CB_2$. Аналогично
$C_2A = AB_2$ и $C_2B = BA_2$

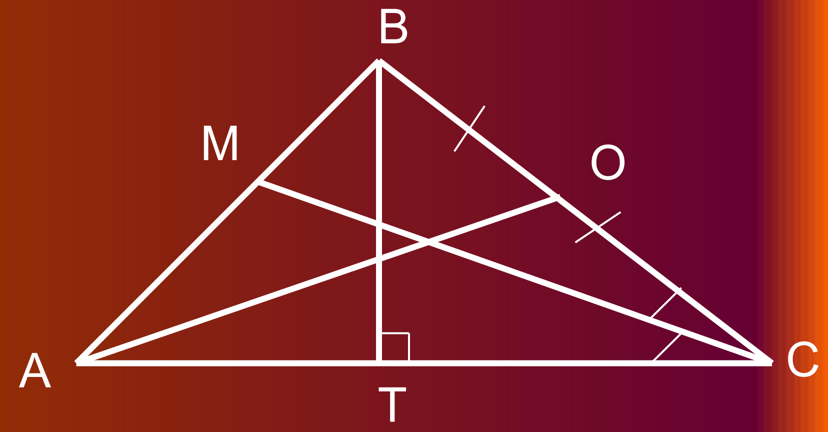
$CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ и
$BB_1 \perp A_2C_2 \Rightarrow AA_1 \perp C_2B_2$,
$BB_1 \perp CC_2$ и $CC_1 \perp B_2A_2 \Rightarrow$ они пересекаются в одной точке.



в Оглавление
до 109

Задача №1

- **В треугольнике ABC, изображённом на рисунке, AC = BC = AB, BM = MC.**
  BT ⊥ AC, ∠AOC = ∠BCO. Какая из прямых CO, BT является серединным перпендикуляром к стороне треугольника ABC.



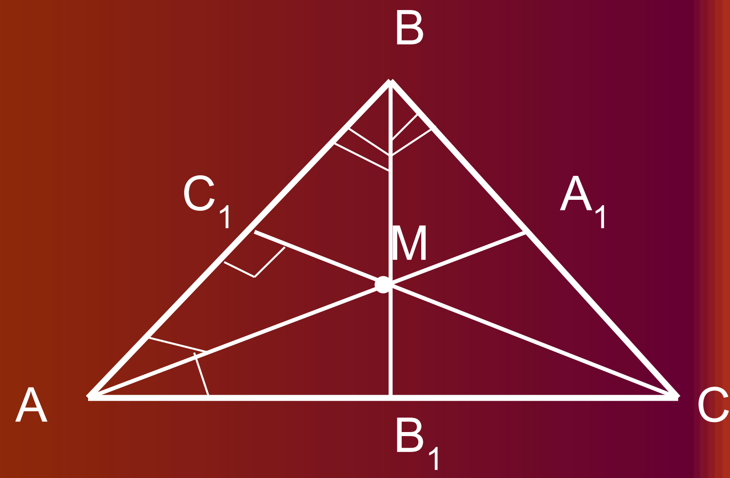
Решение

По условию задачи ∠AOC = ∠BCO и AC = BC, т. е. отрезок CO является биссектрисой равнобедренного треугольника, а поэтому она является также медианой и высотой. Следовательно, прямая CO проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна к этому отрезку, т. е. является серединным перпендикуляром к стороне AB.

в Оглавление до 109

Задача №2

- Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите углы ACM и BCM, если $\angle ABM = 36^0$.



Решение

1) Проведём $CC_1 \perp AB$.

2) Рассмотрим $\Delta ACC_1 = \Delta BCC_1$ (по гипотенузе и острому углу.) $\Rightarrow \angle A = \angle B = 72^0$.

3) $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ (по теореме о сумме углов Δ.) $\Rightarrow \angle C = 36^0$.

4) Точка M- равноудалена от вершин ΔABC. AA_1 и BB_1- биссектрисы $\Rightarrow CC_1$ является биссектрисой и они пересекаются в одной точке M $\Rightarrow \angle BCM = \angle ACM = 18^0$

в Оглавление

до 109