

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

- *Предмет вычислительной математики. Основные понятия вычислительной математики: линейные, метрические и нормированные пространства, сходящиеся и фундаментальные последовательности, открытые и замкнутые шары. Полные метрические пространства. Примеры.*
- *Элементы общей теории погрешностей и компьютерной арифметики. Основные определения, утверждения, примеры.*
- *Прямые и итерационные методы и алгоритмы.*

Предмет вычислительной математики

- **Математическая модель** – приближенное математическое описание объекта (технологического процесса, реакции, явления и т.д.).
- **Математическое моделирование, вычислительный эксперимент** – для исследования на ЭВМ очень сложных процессов (натурный эксперимент не возможен).

Основные этапы математического моделирования:

- → Разработка модели – *формализация*.
- Разработка метода (алгоритма) для решения уравнений модели или определения ее параметров.
- Проведение необходимых расчетов (создание программ, тестирование, получение результатов).
- Анализ результатов – *практическое использование*.

Основные понятия: метрические пространства

- **Главная задача численных методов** – фактическое нахождение решения с требуемой или, по крайней мере, оцениваемой точностью.
- Отклонение истинного решения от приближенного называется **погрешностью**.
- Для оценки близости полученного решения к истинному необходимо ввести понятие расстояния (метрики) между парой элементов некоторого множества.
- Множество элементов одной природы называется **метрическим пространством**, если в нем введено расстояние (метрика), которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\rho(x, y)$$

- 1) - вещественное неотрицательное число

$$\rho(x, y) \geq 0$$

• 2)

$$\rho(x, y) = 0 \iff x \equiv y$$

• 3

- свойство симметрии

$$\rho(x, y) = \rho(y, x)$$

• 4)

- неравенство треугольника

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

Линейные пространства

- **Линейное пространство** - частный случай метрического. В нем определены операции сложения элементов и умножения их на число, при этом выполнены аксиомы:
 - 1) $x + y = y + x$
 - 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
 - 3) $\forall x \in L$ существует единственный $\theta \in L$ такой, что $x + \theta = x$
 - 4) $\forall x \in L, \exists -x \in L$ -единственный, такой, что $x + (-x) = \theta$
 - 5) $\forall x \in L$ и $\forall \alpha, \beta \in R$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
 - 6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
 - 7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x); 1 \cdot x = x; 0 \cdot x = \theta$

Линейные нормированные пространства.

- Линейное пространство L называется **нормированным**, если $\forall x \in L$ введена **норма** $\|x\|$:

1) $\|x\| \geq 0$ - вещественное число $\forall x \in L : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta \in L$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ где λ - вещественное число

3) $\forall x, y \in L \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

- Всякое нормированное пространство – метрическое. Метрика может быть введена следующим образом: $\rho(x, y) = \|x - y\|$
- В линейном метрическом пространстве норма – расстояние до нулевого элемента.

Сходящиеся и фундаментальные последовательности, открытые и замкнутые шары. Полные метрические пространства.

- Последовательность элементов метрического пространства x_n называется **сходящейся** (по метрике) к элементу x , если

$$\rho(x_n, x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

- Последовательность x_n называется **фундаментальной**, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при всех $n, m > N$
- Метрическое пространство называется **полным**, если любая фундаментальная последовательность его элементов сходится к элементу того же пространства.
- Открытым (замкнутым) **шаром** с центром в точке x_0 и радиусом r назовем множество точек метрического пространства, для которых

$$\rho(x, x_0) < r \quad (\rho(x, x_0) \leq r)$$

- ε -**окрестность элемента** - шар с центром в этой точке и радиусом

Примеры полных метрических пространств

1. \mathbb{R} – множество вещественных чисел.

$$\rho(x, y) = |x - y| \quad \text{и} \quad \|x\| = |x|$$

2. \mathbb{R}^n - пространство векторов с вещественными координатами

a)
$$\rho_E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad \|x\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

б)
$$\rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad \|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

в)
$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \quad \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

3. $C[a, b]$ – множество функций непрерывных на $[a, b]$

$$\rho(f, g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

Примеры метрических пространств

4. $L_2 [a, b]$ – множество функций интегрируемых с квадратом на $[a, b]$ (неполное пространство)

$$\rho(f, g) = \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 \right)^{1/2}$$

5. Пространство квадратных матриц размера n .

Норма матрицы согласована с нормой вектора, если $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

а) $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$, согласована с $\|X\|_1$

б) $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, согласована с $\|X\|_\infty$

Элементы общей теории погрешностей и компьютерной арифметики. Основные определения, утверждения, примеры

- Точность решения задачи оценивается **абсолютной** или **относительной погрешностью**.
- **Абсолютная погрешность:**

$$\rho(x, x^*) \leq \Delta$$

где x^* - точное решение,
 x - численное решение.

- **Относительная погрешность:** $\delta = \frac{\Delta}{\|x\|}$
- Полная погрешность вычислений состоит из двух составляющих:
1) неустранимая погрешность; 2) устранимая погрешность.

Элементы общей теории погрешностей и компьютерной арифметики. Основные определения, утверждения, примеры

- **Неустраняемая погрешность** обусловлена неточностью исходных данных (модели и ее параметров) и никаким образом не может быть уменьшена в процессе вычислений.
- **Устраняемая погрешность** состоит из двух составляющих:
 - а) погрешность аппроксимации (метода);
 - б) вычислительная погрешность (погрешность округления).
- Эти составляющие могут быть уменьшены выбором более точных методов и увеличением разрядности вычислений.
- Задача вычисления $y = A(x)$ называется **корректно поставленной**, если для любых входных данных из некоторого класса решение задачи существует, единственно и устойчиво по входным данным (т. е. непрерывно зависит от входных данных задачи).

Элементы общей теории погрешностей и компьютерной арифметики. Основные определения, утверждения, примеры

- Пусть решение y , соответствует входным данным x . Реально мы имеем возмущенные входные данные с погрешностью δx , т.е. $x + \delta x$ и находим возмущенное решение: $y + \delta y = A(x + \delta x)$.

Эта погрешность входных данных порождает **неустранимую** погрешность решения: $\delta y = A(x + \delta x) - A(x)$.

Если решение непрерывно зависит от входных данных, то всегда при $\|\delta x\| \rightarrow 0$ и задача устойчива по входным данным $\|\delta y\| \rightarrow 0$.

- Если небольшая погрешность в исходных данных влечет большую погрешность в решении – то задача **плохо обусловлена**.

Элементы общей теории погрешностей и компьютерной арифметики. Основные определения, утверждения, примеры

- Рассмотрим подробнее погрешность округления чисел, участвующих в вычислениях. В позиционной системе счисления с основанием r запись

$$a = \pm a_n a_{n-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$$

означает, что

$$a = \pm(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_0 r^0 + a_{-1} r^{-1} + a_{-2} r^{-2} + \dots)$$

- Здесь r – целое число, большее единицы. Каждое из чисел может принимать одно из значений $\{0, 1, \dots, r-1\}$. Числа называются *разрядами*. Эта запись вещественного числа называется также его представлением в форме **числа с фиксированной запятой**.

Элементы общей теории погрешностей и компьютерной арифметики. Основные определения, утверждения, примеры

- В ЭВМ чаще всего используется представление **чисел в форме с плавающей запятой**. Так как наиболее часто в компьютерах применяется двоичная система с плавающей запятой, то вещественное число можно представить виде

$$a = \pm 2^p \sum_{k=1}^t \alpha_k 2^{-k} = \pm 2^p (\alpha_1 \dots \alpha_t), \quad (|p| \leq p_0), \quad \alpha_1 = 1.$$

Здесь p - целое число и называется **порядком** числа a ,

$(\alpha_1 \boxtimes \alpha_t)$ - **мантисса**

Ограничения на порядки чисел, представляемых в ЭВМ, порой приводят к прекращению вычислений (так называемое **исчезновение порядка**); в других случаях относительно небольшая разрядность представления чисел в ЭВМ приводит к недопустимому искажению результата вычислительной погрешностью.

Примеры

- **Пример 1.** Необходимо отыскать минимальный корень уравнения. Вычисления производим в десятичной системе счисления, причем в числе после округления оставляем четыре действующие цифры (разряда):

$$x^2 - 140x + 1 = 0;$$

$$x = 70 - \sqrt{4899};$$

$$\sqrt{4899} = 69.992 \approx 69.99;$$

$$x = 70 - 69.99 = 0.01.$$

- Рассмотрим другой алгоритм вычисления корня, для чего избавимся от иррациональности в числителе

$$x = 1/(70 + \sqrt{4899});$$

$$70 + 69.99 \approx 140.0;$$

$$x = 1/140 = 0.00714285 \approx 0.007143.$$

Примеры

- Как видно из сравнения полученных результатов, применение "неудачного" алгоритма завышает результат на 30 %. Это явление в практике вычислений называется **потерей значащих цифр**, и часто наблюдается при вычитании близких величин. Потеря значащих цифр, например, довольно часто приводит к существенному искажению результатов при решении даже сравнительно небольших систем линейных алгебраических уравнений.

Примеры

Пример 2

Требуется вычислить: $c = 0,476 + 0,411 + 1,47 + 26,2 + 83$.

Сложим эти числа столбиком и, округлив результат до 3-х значащих цифр, получим значение c :

$$\begin{array}{r} 0,476 \\ 0,411 \\ 1,47 \\ 26,2 \\ 83, \\ \hline 111,557 \approx 112. \end{array}$$

ЭВМ выполняет действия поочередно (складывает пару чисел) и округляет результат после каждого действия.

Выполним суммирование слева направо в порядке записи (как ЭВМ):

$$\begin{array}{cccc} + 0,476 & + 0,887 & + 2,36 & + 28,6 \\ 0,411 & 1,47 & 26,2 & 83, \\ \\ 0,887 \approx 0,887 & 2,357 \approx 2,36 & 28,56 \approx 28,6 & 111,6 \approx 112. \end{array}$$

Примеры

Пусть теперь выражение записано в обратном порядке:
Выполним суммирование как ЭВМ:

+ 83	+ 109	+ 110	+ 110
26,2	1,47	0,411	0,476
109,2 \approx 109	110,47 \approx 110	110,411 \approx 110	110,476 \approx 110

От перестановки слагаемых сумма изменилась, то есть

$$\sum_{i=1}^n X_i \neq \sum_{i=n}^1 X_i$$

Погрешности арифметических операций

- Погрешность вычисления функций:

$$y = f(x_1, \dots, x_m) \quad |x_i - x_i^*| \leq \Delta(x_i^*)$$

$$\Delta(y^*) \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_1^*, \dots, x_n^*) \right| \Delta(x_i^*)$$

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 \pm x_2$$

$$\Delta(y^*) = \Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*)$$

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$
$$\partial(y^*) = \frac{\Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*)}{|x_1^* - x_2^*|}$$

Рекомендации для снижения ошибок округления:

- **В машинной арифметике законы коммутативности (переместительный) и дистрибутивности (распределительный) не всегда соблюдаются.**
- При сложении и вычитании последовательности чисел действия необходимо начинать с наименьших по абсолютной величине значений.
- Следует избегать вычитания двух близких чисел, преобразуя выражения.
- Количество арифметических действий для решения задачи нужно сводить к минимуму.
- Для уменьшения ошибки округления расчеты следует проводить с повышенной разрядностью

При выборе численного метода решения задачи необходимо учитывать следующее

- Погрешность метода должна быть на порядок меньше неустранимой погрешности. Увеличение погрешности метода снижает точность, уменьшение – увеличивает время решения задачи.
- Погрешность округления должна быть значительно меньше (на два порядка) погрешности метода и неустранимой погрешности

**Для оценки погрешности решения на практике
можно использовать следующие приемы:**

- Решить задачу различными численными методами и результаты сравнить.
- Незначительно изменить исходные данные и повторно решить задачу. Результаты сравнить. Если они различаются сильно, задача или метод ее решения являются ***неустойчивым*** – выбрать другой.

Прямые и итерационные методы и алгоритмы решения математических задач

- Прямые и итерационные методы решения математических задач. Основные определения
- Преимущества, недостатки и особенности реализации

Прямые (точные) численные методы и алгоритмы

- Решение будет получено за конечное число шагов;
- Количество шагов и процедура вычисления на каждом шаге строго определены.
- Если предположить, что вычислительная погрешность равна нулю, то такие методы дали бы **точный** результат.

(Примеры – формулы для решения квадратных уравнений, простейших тригонометрических уравнений).

Итерационные численные методы и алгоритмы

- Решение определяется как предел бесконечной итерационной последовательности;
- Определены правила получения итерационной последовательности (очередной итерации метода) при заданной предыдущей итерации (или нескольких предыдущих итераций);
- **Количество шагов, необходимых для вычисления решения с заданной точностью заранее не определено.**

Преимущества, недостатки и особенности реализации алгоритмов для прямых методов

Преимущество: В отсутствие вычислительной погрешности дают точный результат.

Недостатки:

- При большом количестве шагов вычислительная погрешность может накапливаться.
- Может потребоваться сохранять большие объемы информации на каждом шаге для хранения промежуточных результатов (ограничение на ресурсы памяти).

Преимущества, недостатки и особенности реализации алгоритмов для прямых методов

Особенности реализации:

- Требуют исследования влияния ошибок округления и, возможно, преобразования формул вычисления.
- **Не используются при большой размерности задачи.**

Преимущества, недостатки и особенности реализации алгоритмов для итерационных методов

Преимущество:

Вычислительная погрешность не накапливается и даже может быть исправлена при очередной итерации.

Недостаток:

Если итерационная последовательность сходится медленно, то для достижения требуемой точности решения может потребоваться слишком большое число шагов (ограничение на ресурсы времени)

Преимущества, недостатки и особенности реализации алгоритмов для итерационных методов

Особенности реализации:

- Выбор начального приближения;
- Выяснение условий сходимости итерационной последовательности;
- Определение условий прекращения итераций (способов оценки погрешности решения на каждой итерации).