Способы доказательств теоремы Пифагора

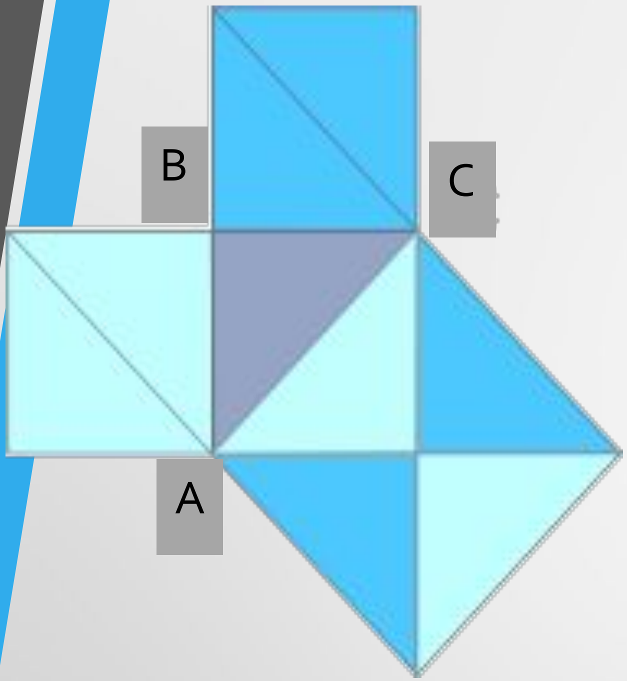
Выполнили: студенты 05-407 группы

Гатауллин Табрис
Гатауллин Фанис

- На данный момент в научной литературе зафиксировано 367 доказательств данной теоремы. Вероятно, теорема Пифагора является единственной теоремой со столь внушительным числом доказательств. Такое многообразие можно объяснить лишь фундаментальным значением теоремы для геометрии.

- Все их можно разбить на малое число классов. Самые известные из них: доказательства методом площадей, аксиоматические.
- Теорему Пифагора также можно доказать с помощью векторов, комплексных чисел, дифференциальных уравнений, стереометрии, и даже физики: если, например, в аналогичные представленным на чертежах квадратные и треугольные объемы залить жидкость. Переливая жидкость, можно доказать равенство площадей и саму теорему в итоге.
- Среди знаменитых авторов доказательств можно вспомнить Леонардо да Винчи и двадцатого президента США Джеймса Гарфилда.

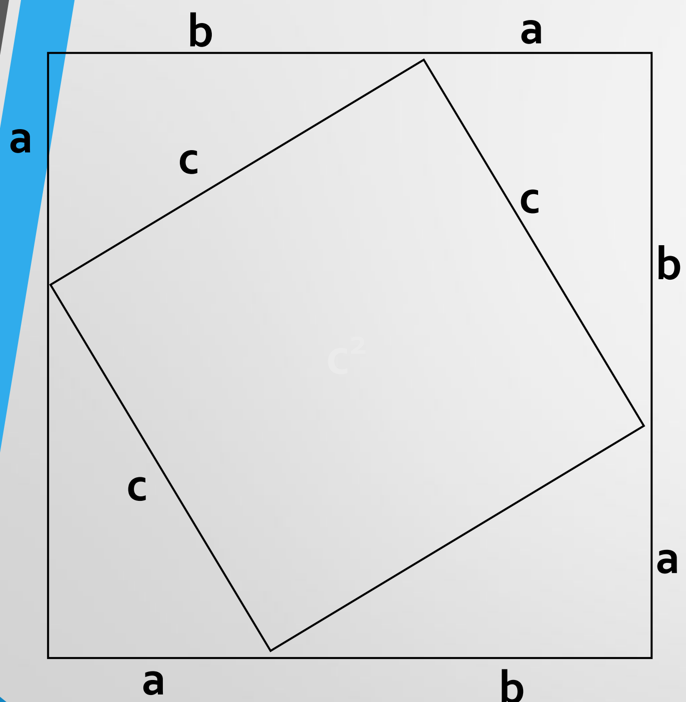
Простейшее доказательство



- Нужно задать идеальные условия: пусть треугольник будет не только прямоугольным, но и равнобедренным. Есть основания полагать, что именно такой треугольник первоначально рассматривали математики древности.

Достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников , чтобы убедиться в справедливости теоремы.
Для треугольника АВС : квадрат, построенный на гипотенузе АС, содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах,- по два.

Алгебраический метод



- Находим площадь квадрата двумя способами:

$$S = 4\frac{1}{2}ab + c^2$$

$$S = (a+b)^2$$

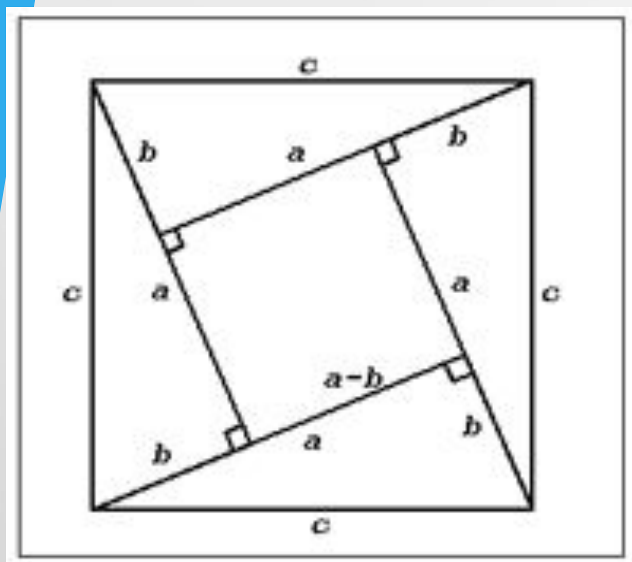
- Приравниваем, упрощаем и получаем:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Доказательство Бхаскара (древнеиндийское доказательство)

- **Бхаскара** (1114—1185) — крупнейший индийский математик и астроном XII века.
- Возглавлял астрономическую обсерваторию в Удджайне.
- Написал трактат «Сиддханта-широмани» («Венец учения»), состоящий из четырёх частей: «Лилавати» посвящена арифметике, «Биждаганита» — алгебре, «Голадхайя» — геометрии на сфере, «Гранхаганита» — теории планетных движений.

Доказательство Бхаскара (древнеиндийское доказательство)

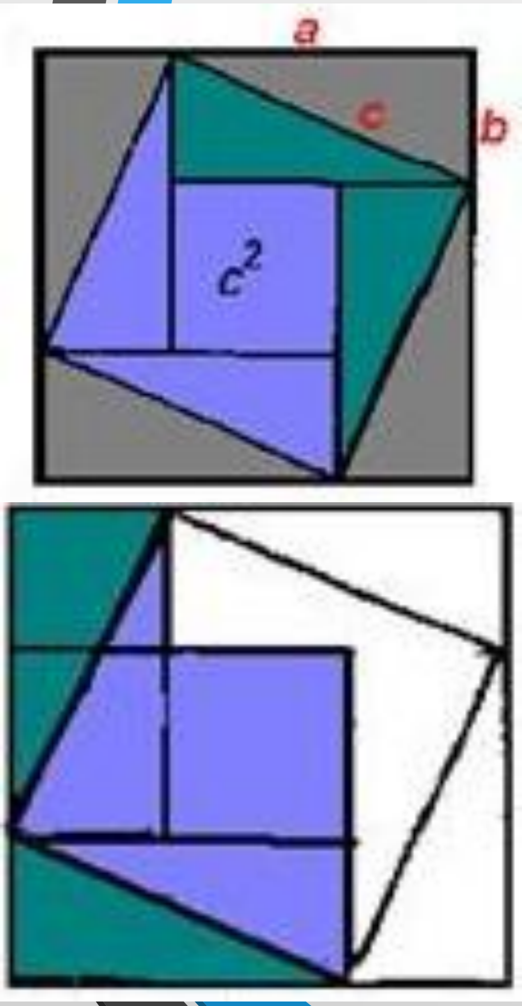


- Этот индийский математик в пояснении к рисунку написал только одну строчку: "Смотри!".
- Используем формулу площади квадрата $S = c^2$,чтобы вычислить площадь внешнего квадрата.

Посчитаем ту же величину, сложив площадь внутреннего квадрата и площади всех четырех прямоугольных треугольников: $S = (a-b)^2 + 4\frac{1}{2}ab$

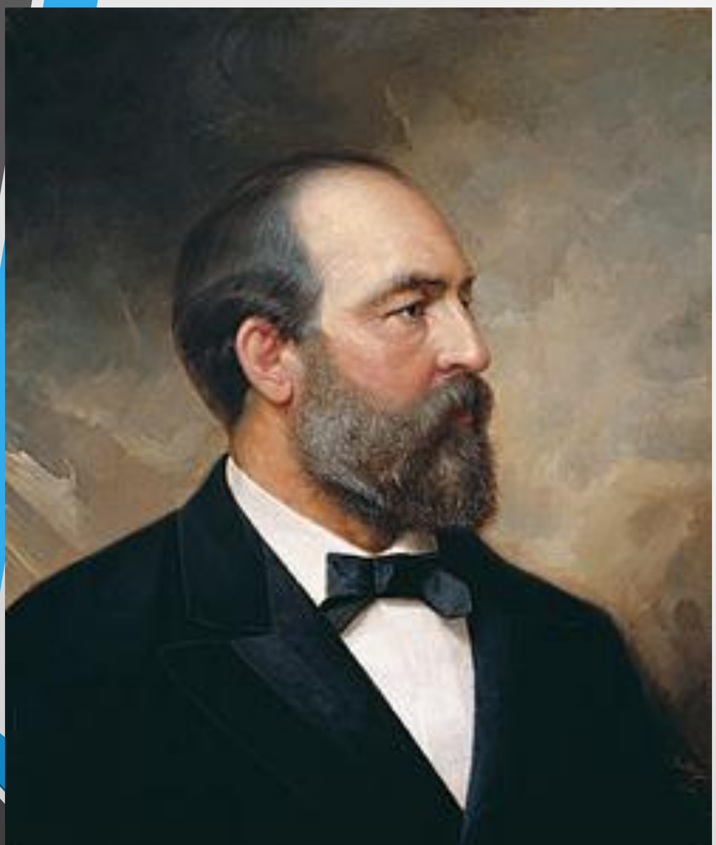
Приравняем обе части, упрощаем и в результате получим формулу теоремы Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

«Стул невесты» (древнекитайское доказательство)



- Если мысленно отрезать от чертежа на первом рисунке два зеленых прямоугольных треугольника, перенести их к противоположным сторонам квадрата со стороной *c* и гипотенузами приложить к гипотенузам сиреневых треугольников, получится фигура под названием «стул невесты».
- Вы убедитесь, что «стул невесты» образует два квадрата: маленький со стороной *b* и большой со стороной *a*.

Доказательство Гарфилда



- Дже́ймс Абрам Га́рфилд (19.11.1831 — 19.09.1881) — 20-й президент США (март — сентябрь 1881), разносторонне одарённый самоучка, военачальник и активист Республиканской партии.
- Был тяжело ранен через три месяца после вступления в должность и умер через два с половиной месяца от последствий неудачного лечения.

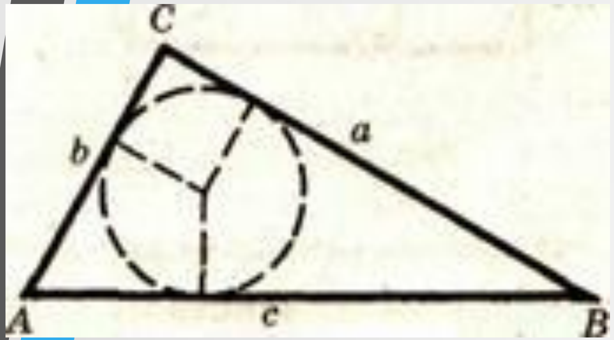
Доказательство Гарфилда

Пользуется тем, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, а площадь трапеции равна произведению полусуммы параллельных оснований на высоту. Чтобы доказать теорему, достаточно только выразить площадь трапеции двумя способами, приравнять полученные равенства и упростить:

$$S_{тр} = \frac{1}{2}(a+b)^2$$

$$S_{тр} = 2\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2$$

Доказательство Мёльманна



- Площадь данного прямоугольного треугольника, с одной стороны, равна $\frac{1}{2}ab$, с другой, $\frac{1}{2}pr$,

где p - полупериметр треугольника, r - радиус вписанной в него окружности.

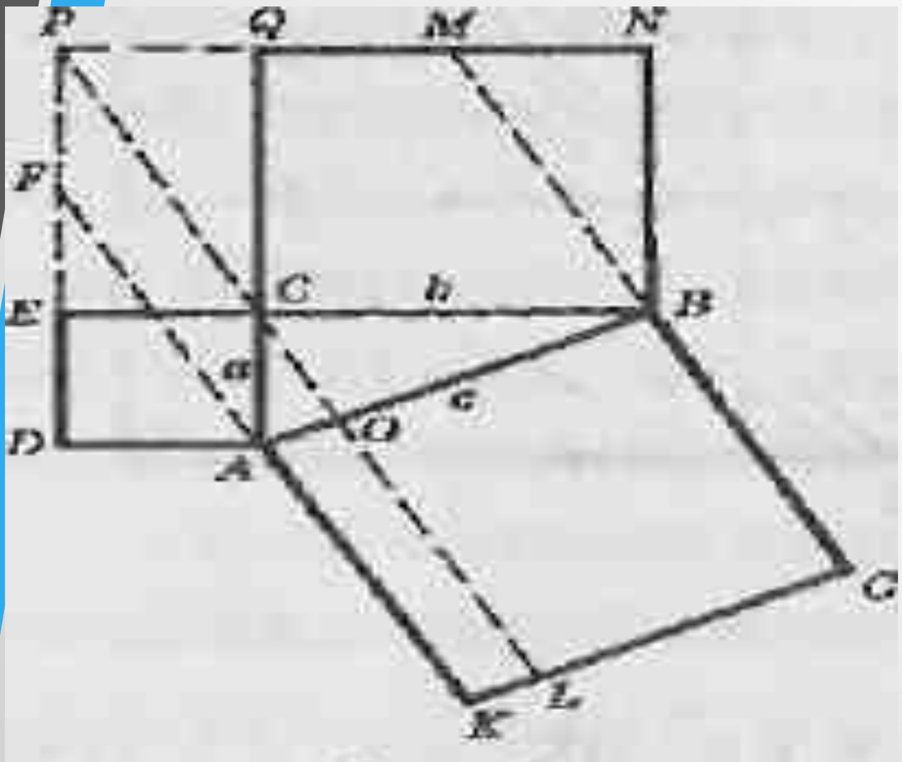
$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}pr; \qquad \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b+c)\frac{1}{2}(a+b-c)$$

Откуда следует, что $c^2 = a^2 + b^2$

Доказательство Насир-эд-Дина

- Насир ад-Ди́н Абу́ Джафар Муха́ммад ибн Муха́ммад Ту́си (18.02.1201 — 26.06.1274) — п ерсидский математик, механик и аст роном XIII века, чрезвычайно разносторонний учёный, автор сочинений по философии, географии, музыке, о птике,медицине, минералогии.
- Был знатоком греческой науки, комментировал труды Евклида, Архимеда, Автолик а, Феодосия, Менелая, Аполлония, Аристарха, Гипсикла, Птолемея.

Доказательство Насир-эд-Дина



ΔABC – прямоугольный, $\angle C = 90^o$

$$\Delta ABC : \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AO} \Rightarrow AO = \frac{AC^2}{AB} = \frac{a^2}{c}$$

$$S_{KLOA} = AO \cdot AK = \frac{a^2}{c} c = a^2$$

$ACPF$ – параллелограмм

$$S_{ACPF} = AC \cdot CE = a^2$$

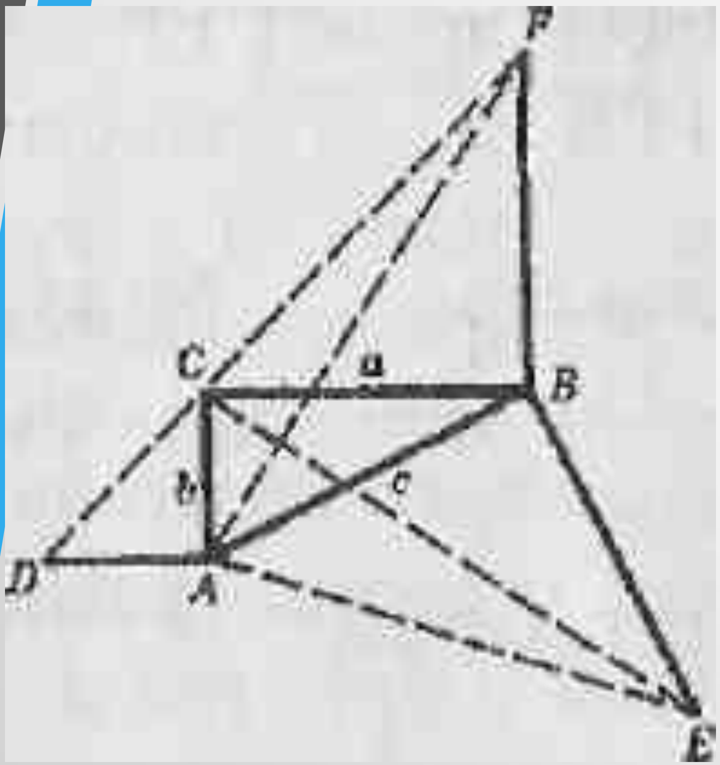
$$S_{KLOA} = S_{ACPF} = S_{ACED} = a^2$$

$$S_{LGBO} = S_{CBMP} = S_{CBNQ} = b^2$$

$$S_{AKGB} = c^2$$

$$S_{AKGB} = S_{AKLO} + S_{LGBO} = a^2 + b^2$$

Доказательство Гофмана



$\Delta ABC - \textit{прямоугольный}$

$\angle C = 90^o$

$BF \perp CB, BF = CB$

$BE \perp AB, BE = AB$

$AD \perp AC, AD = AC$

$F, C, D \in d$

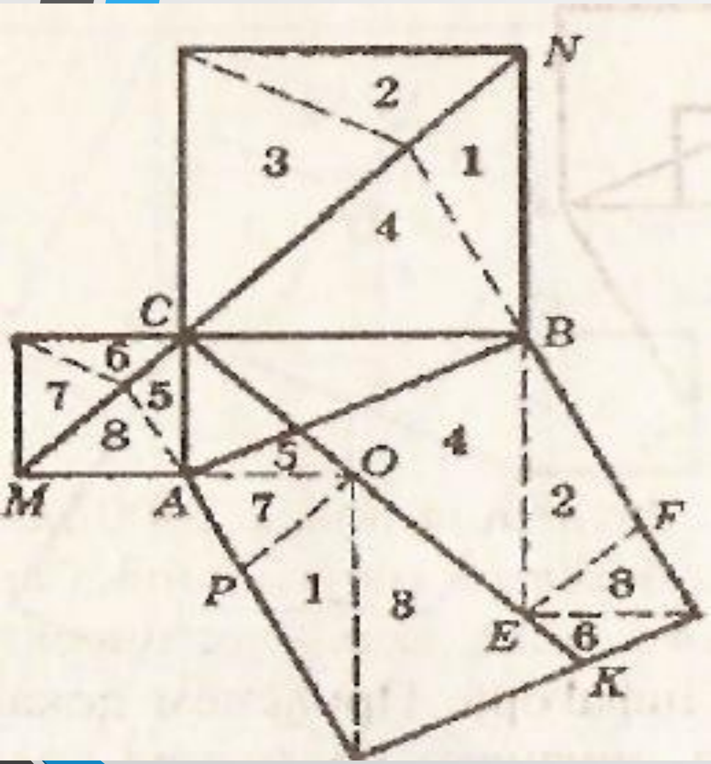
$S_{ADFB} = S_{ACBE}, \textit{т.к.} \Delta AFB = \Delta ECB$

$S_{\Delta ADF} = S_{\Delta ACE}$

Отнимем от обоих равновеликих четырехугольников общий для них ΔABC и получим

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}c^2$$

Доказательство Энштейна



- Основано на разложении квадрата, построенного на гипотенузе, на 8 треугольников.

ΔABC - прямоугольный

$\angle C = 90^{\circ}$

$CO \perp MN, CK \perp MN$

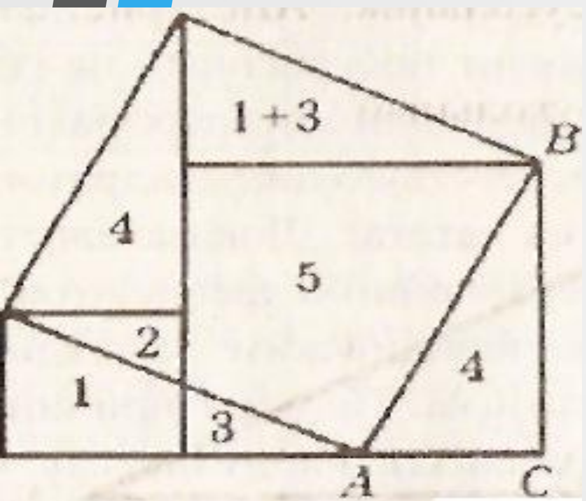
$PO \parallel MN, EF \parallel MN.$

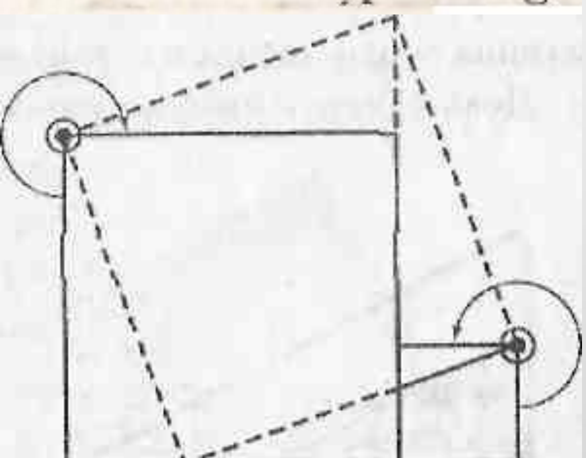
- Соответственно равные треугольники одинаково пронумерованы.

Доказательство Аннариция

- Абу-л-Аббас ал-Фадл ибн Хатим ан-Найризи (ум. ок. 922) — видный персидский математик и астроном, уроженец города Найриза в Ширазе.
- Работал в «Доме мудрости» в Багдаде.
- В Западной Европе был известен под латинизированным именем Аннариций.

Доказательство Аннариция

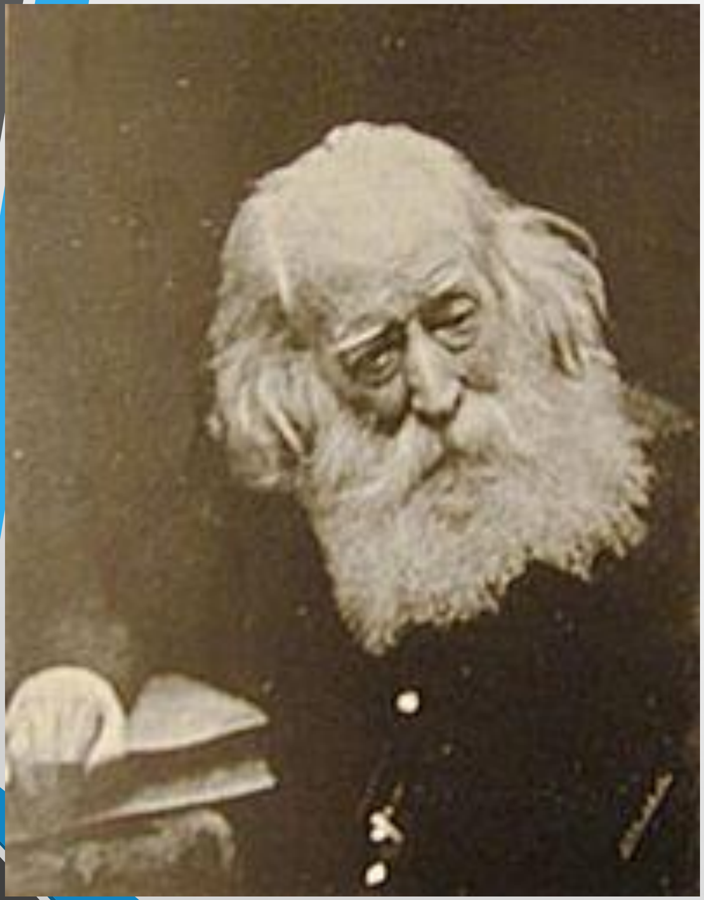




- Квадрат на гипотенузе разбит на 5 частей, из которых составляются квадраты на катетах. Любопытно, что это доказательство является простейшим среди огромного числа доказательств методом разбиения: в нём фигурирует всего 5 частей (или 7 треугольников). Это наименьшее число возможных разбиений.

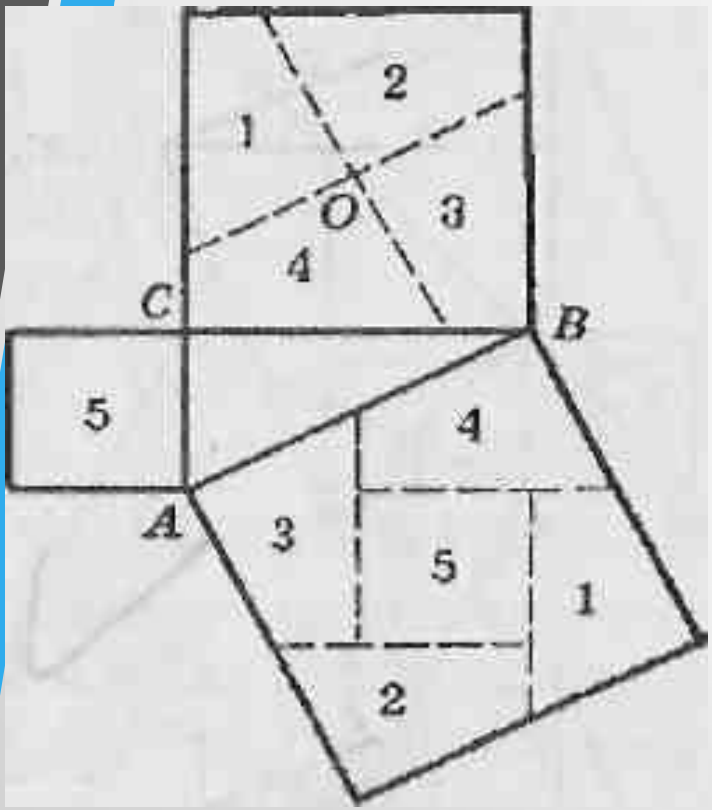
- Также это доказательство называется **«шарнирным»**, потому что здесь меняют своё положение только две части, равные исходному треугольнику, причём они как бы прикреплены к остальной фигуре на шарнирах, вокруг которых поворачиваются

Доказательство Перигаля



- Генри Перигаль, младший (01.03.1801 – 06.06.1898 г.) – британский биржевой брокер и математик-любитель, известен своим способом доказательства теоремы Пифагора и неортодоксальными убеждениями, что Луна не вращается.

Доказательство Перигаля



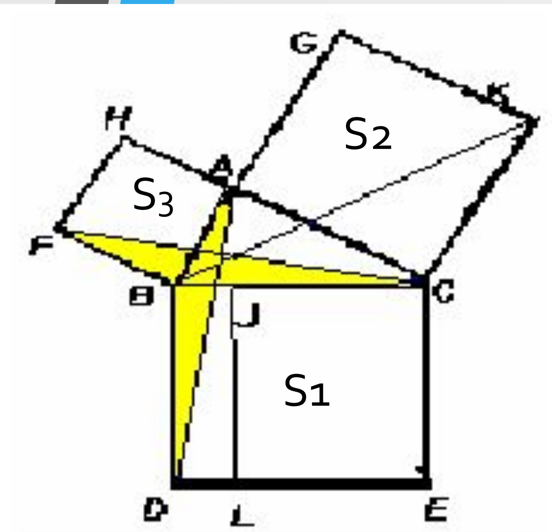
Через центр квадрата, построенного на большем катете, проводят прямые: одну - параллельную и одну - перпендикулярную гипотенузе.

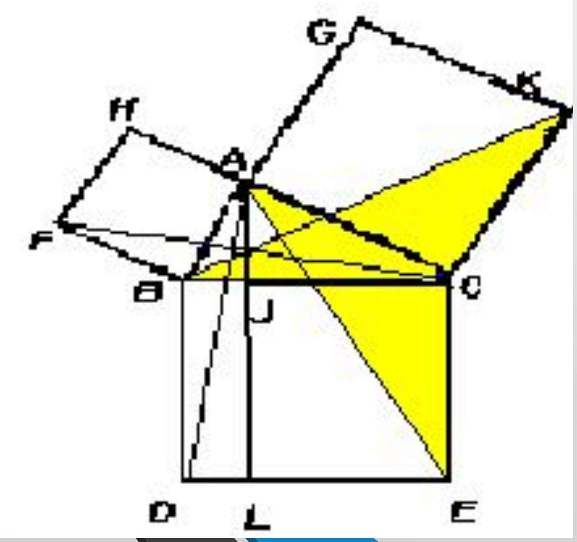
В книгах фрагмент этого рисунка называют **«колесо с лопастями».**

Соответственно равные многоугольники одинаково пронумерованы.

Это разложение квадратов интересно тем, что его попарно равные четырехугольники могут быть отображены друг на друга параллельным переносом.

Доказательство Евклида





ΔABC – *прямоугольный*, $\angle A = 90^o$, AJ – *высота*

Докажем : $S_1 + S_2 = S_3$

$\Delta ABD = \Delta BFC (BF = AB, BC = BD, \angle BFC = \angle ABD)$

$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} S_{BJLD}$ (BD – *общ.основание*,

LD – *общ.высота*)

$S_{\Delta BFC} = \frac{1}{2} S_{ABFH}$ (BF – *общ.основание*,

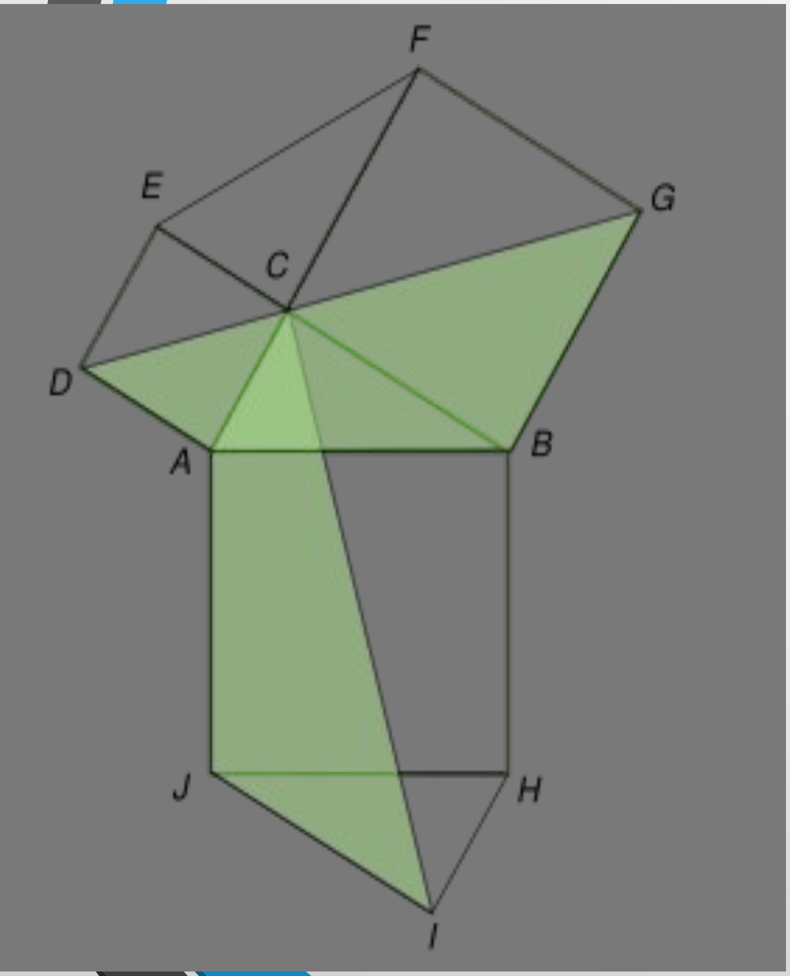
AB – *общ.высота*)

$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BFC} \Rightarrow S_{BJLD} = S_{ABFH}$

$\Delta BCK = \Delta ACE \Rightarrow S_{JCEL} = S_{ACKG}$

$S_{ABFH} + S_{ACKG} = S_{JCEL} + S_{JCEL} = S_{BCED}$

Доказательство Леонардо да Винчи



- Главные элементы доказательства — симметрия и движение.

 Как видно из симметрии, отрезок CI рассекает квадрат ABHJ на две одинаковые части (так как треугольники ABC и JHI равны по построению).

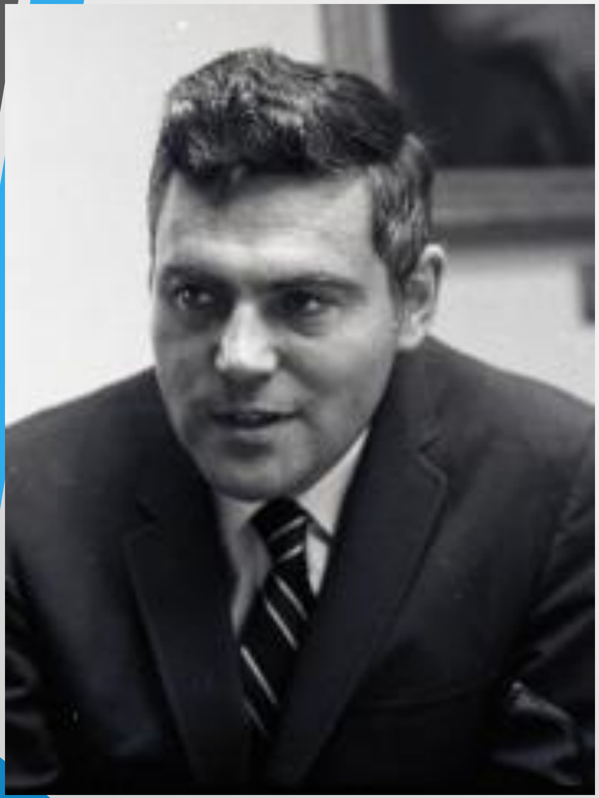
Пользуясь поворотом на 90 градусов против часовой стрелки, мы усматриваем равенство заштрихованных фигур CAJI и GDAB.

 Теперь ясно, что площадь заштрихованной нами фигуры равна сумме половин площадей квадратов, построенных на катетах, и площади исходного треугольника.

С другой стороны, она равна половине площади квадрата, построенного на гипотенузе, плюс площадь исходного треугольника.

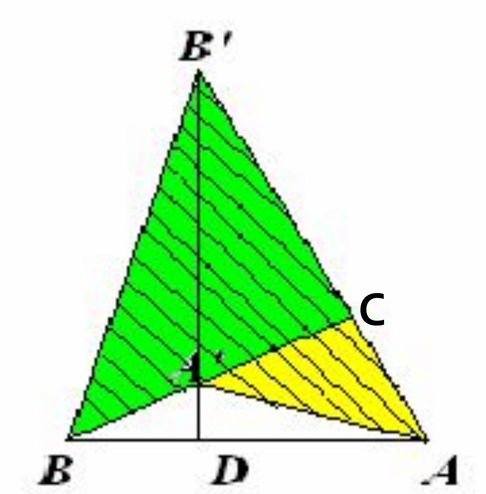
Отсюда и следует доказываемое нами равенство.

Доказательство Хоукинса



- Джеральд Стэнли Хокинс (1928—2003) — британский астроном, широко известен своими исследованиями в области археоастрономии.
- Доктора наук по радиоастрономии, профессор астрономии и председатель управления Бостонского университета, автор работ по самым различным темам.

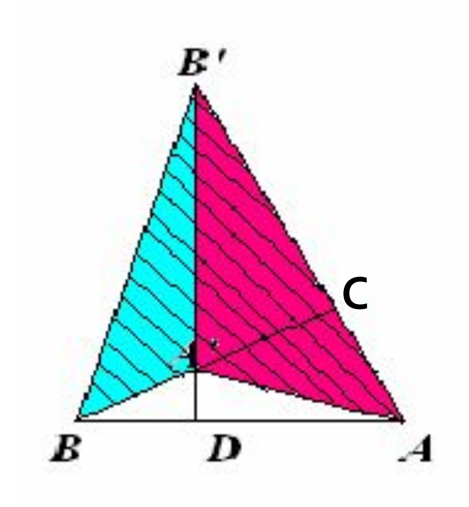
Доказательство Хоукинса



- Хоукинс задаёт поворот плоскости по часовой стрелке с центром в точке C на 90 градусов. Тогда образом ΔBCA при этом повороте станет $\Delta B'CA'$
- Обозначим: $AC = a, BC = b, AB = c$
- Проведём $B'D - высоту \Delta B'AB$
- Четырехугольник $A'AB'B$ можно разложить на два равнобедренных $\Delta CAA'$ и $\Delta CBB'$

$$S_{CAA'} = \frac{a^2}{2}; S_{CBB'} = \frac{b^2}{2}$$

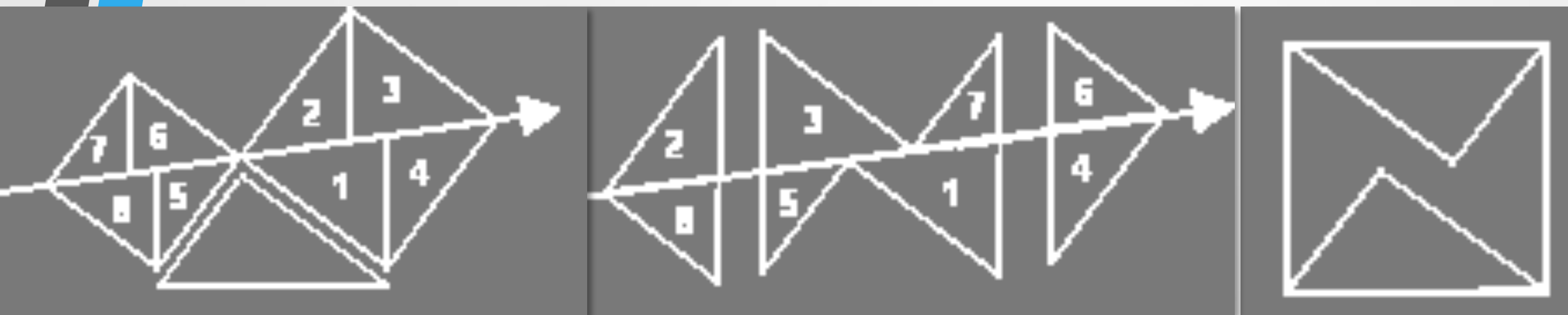
$$S_{A'AB'B} = \frac{a^2+b^2}{2}$$



$\Delta A'B'A, \Delta A'B'B$ имеют общее основание $A'B'$ и высоты DA, DB поэтому :

$$S_{A'AB'B} = c\frac{DA}{2} + c\frac{DB}{2} = c\frac{DA+DB}{2} = \frac{c^2}{2}$$

Доказательство Бетхера



Бетхер показывает, как из треугольников, входящих в состав квадратов, построенных на катетах, составить квадрат, построенный на гипотенузе.

Нижние треугольники 8 и 4 отодвигаем от фигуры 5-1, перераспределяем 7;6;2;3 так, как показано на втором рисунке.

Спасибо за внимание!