Лекция № 3

Эффективные и эквивалентные ставки процентов

Учебные вопросы

1. Эквивалентные ставки простых и сложных процентов .
2. Эффективные и номинальные ставки процентов. Финансовые функции MS Excel ЭФФЕКТ, НОМИНАЛ
3. Эквивалентность простых учетных и простых процентных ставок
4. Эквивалентные ставки простых и сложных процентов с учетом инфляции

Литература

1. Кочетыков А.А. Финансовая математика. Серия «Учебники, учебные пособия». – Ростов н/Д: Феникс», 2004. – 480с.
2. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики: методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных и страховых схем. – М.:Дело,1998. – 304с.
3. Овчаренко Е.К., Ильина О.П., Балыбердин Е.В. Финансово-экономические расчеты в Excel. Издание 3-е, перераб. и доп. – М.: «Филин», 1999. – 328с.
4. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Дело Лтд., 1995. – 320с.

1. Эквивалентные ставки простых и сложных процентов

Определим эквивалентную процентную ставку, при которой наращенная сумма по ***простым*** и ***сложным*** процентам ***одинакова***.

Эквивалентная процентная ставка

Это такая ставка ***простых*** или ***сложных*** процентов, при которой наращенная сумма по ***простым*** и ***сложным*** процентам ***одинакова***

Вывод формулы эквивалентной процентной ставки

$$S_n = P(1 + ni_n)$$

– наращенная сумма по простым процентам

$$S_c = P(1 + i_c)^n$$

– наращенная сумма по сложным процентам

Доходность одинаковая, значит

$$S_n = S_c \quad \Rightarrow \quad (1 + ni_n) = (1 + i_c)^n \quad \Rightarrow$$

Вывод формулы эквивалентной процентной ставки

Эквивалентная процентная ставка

$$i_n = \frac{(1+i_c)^n - 1}{n}$$

или

$$i_c = \sqrt[n]{1+ni_n} - 1$$

Здесь i_n — *Ставка простых процентов*

i_c — *Ставка сложных процентов*

По доходности ставки эквивалентны

Пример 1

Определить эквивалентную ставку ***сложных*** процентов i_c, если ставка ***простых*** процентов составляет $i_п$**=50%,** а срок кредита **n=2** года.

$$i_c = \sqrt[n]{1 + n i_n} - 1$$

$$i_c = \sqrt{1 + 2 \cdot 0,5} - 1 = \sqrt{2} - 1 = 1,4 - 1 = 0,4 = 40\%$$

Ответ: $i_c = 40\%$

2. **Эффективные и номинальные ставки процентов. Финансовые функции MS Excel ЭФФЕКТ, НОМИНАЛ**

Определим ***эффективную процентную ставку*** ***i***, при которой наращенная сумма по ***сложным*** процентам и начислении процентов ***один раз*** в году такая же, что и при ***m* - *разовом*** наращении в год по ставке $\frac{j}{m}$

Вывод формулы эффективной процентной ставки

$$S = P(1+i)^n$$

– наращенная сумма по сложным процентам при начислении раз в год

$$S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}$$

– наращенная сумма по сложным процентам при начислении m раз в год

$$S = S \quad \Rightarrow \quad (1+i)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} \quad \Rightarrow$$

Вывод формулы эффективной процентной ставки

Эффективная процентная ставка, рассчитанная по номинальной

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

Номинальная процентная ставка, рассчитанная по эффективной

$$j = m\left(\sqrt[m]{i+1} - 1\right)$$

1. ***При*** ***m>1*** ***эффективная (годовая) ставка больше номинальной*** ***i>j***

2. ***При*** ***m=1*** ***эффективная ставка равна номинальной, то есть*** ***i=j***

В принципе в договоре заемщика и кредитора ***номинальную*** ставку можно ***заменить*** на ***эффективную***, так как никто от этой замены не проигрывает в финансовом отношении.

Пример 2

Определить ***эффективную*** ставку ***i***, если ***номинальная*** ставка равна ***j*****=25%,** при помесячном начислении, то есть при **m=12, n=1**

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}25}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}28073$$

Вывод: для сторон безразлично, применять ли ставку **j=25%** при помесячном начислении или годовую ставку **i=28%.**

Функция ЭФФЕКТ

Вычисляет фактическую *эффективную* ставку, если заданы номинальная годовая процентная ставка и количество периодов начисления сложных процентов

Синтаксис функции

ЭФФЕКТ(Номинальная_ставка; Кол_пер)

Эта функция соответствует формуле :

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1$$

Функция ЭФФЕКТ

Аргументы функции

Номинальная_ставка

Номинальная годовая процентная ставка (j)

Кол_пер

Количество периодов в году, за которые начисляются сложные проценты (m)

Пример 3

Имеется заем P=5 000 000 руб. с номинальной годовой процентной ставкой 19% и сроком уплаты 4 года.

Рассчитать **эффективные процентные ставки**, если начисление процентов:

а) полугодовое, т.е. $m=2$;

б) квартальное, т.е. $m=4$;

в) ежемесячное, т.е. $m=12$;

г) ежедневное, т.е. $m=365$.

Определить также сумму, которая будет выплачена (**S**).

Пример 3

а) **ЭФФЕКТ**(19%;2) = 0,1990;

б) **ЭФФЕКТ**(19%;4) = 0,2040;

в) **ЭФФЕКТ**(19%;12) = 0,2075;

г) **ЭФФЕКТ**(19%;365) = 0,2092.

Проверить в Excel по формуле:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

Самостоятельно

а) **БС** ( ) = 10 334 345,04 руб.;

б) **БС** ( ) = 10 505 930,18 руб.;

в) **БС** ( ) = 10 627 914,79 руб.;

г) **БС** ( ) = 10 689 267,20 руб.

Функция НОМИНАЛ

Вычисляет *номинальную* годовую процентную ставку (j), если известна эффективная ставка (i) и число периодов, составляющих расчетный год.

Синтаксис функции

НОМИНАЛ(Факт_ставка; Кол_пер)

Эта функция соответствует формуле :

$$j = m\left(\sqrt[m]{i+1} - 1\right)$$

Функция НОМИНАЛ

Аргументы функции

Факт_ставка

Фактическая (эффективная) ставка (i)

Кол_пер

Количество периодов в году, за которые начисляются сложные проценты (m)

Пример 4

Допустим, эффективная ставка составляет i=25 %, а начисление процентов производится ежемесячно, то есть m=12. Рассчитать номинальную процентную ставку (j).

НОМИНАЛ(25%;12) = 0,2252 или **j=22,52 %.**

3. **Эквивалентность простых учетных и простых процентных ставок**

Определим ***простую учетную*** ставку **(d)**, эквивалентную ***простой процентной*** ставке **(i)**

Вывод формулы простой учетной ставки *d*, эквивалентной простой процентной ставке *i*

$$S_{уч} = \frac{P}{(1 - nd)}$$

– наращенная сумма по простой учетной ставке

$$S_{пр} = P(1 + ni)$$

– наращенная сумма по простой процентной ставке

Доходность одинаковая, значит

$$S_{пр} = S_{уч} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(1 - nd)} = (1 + ni) \quad \Rightarrow$$

Вывод формулы простой учетной ставки *d*, эквивалентной простой процентной ставке *i*

$$i = \frac{d}{1 - nd}$$

– простая процентная ставка, эквивалентная по доходности простой учетной ставке

или

$$d = \frac{i}{1 + ni}$$

– простая учетная ставка, эквивалентная по доходности простой процентной ставке

Пример 5

Что выгоднее - депозит на 3 месяца под i=120% годовых или покупка дисконтной ценной бумаги со сроком погашения 3 месяца и учетной ставкой d=100%.

$$i = \frac{d}{1 - nd} = \frac{d}{1 - \frac{t}{k}d}$$

$$i = \frac{1}{1 - \frac{3}{12}1} = \frac{4}{3} = 1{,}33 = 133\%$$

Ответ: Так как оказалось, что эквивалентная процентная ставка, рассчитанная по учетной (i=133%) больше предложенной i=120%, то лучше купить дисконтную ценную бумагу, ее потенциальная доходность выше, использовать вклад невыгодно.

4. **Эквивалентные ставки простых и сложных процентов с учетом инфляции**

Виды инфляции:

- Ползучая (умеренная) I_{inf}=3…10% в год
- Галопирующая I_{inf}=10…100% в год
- Гиперинфляция I_{inf} свыше 30% в год

Определим ***эквивалентную ставку простых процентов с учетом инфляции***, то есть найдем такую ставку $i_{экв}$, которая компенсировала бы рост цен

Обозначим:

S *– номинальная наращенная сумма*

C *– реальная наращенная сумма*

I_{inf} *– индекс (уровень) инфляции*

I_p *– индекс цен (показывает во сколько раз за период выросли цены)*

$$\boxed{C = S} \Rightarrow \boxed{\frac{P(1+ni_{экв})}{I_p} = P(1+ni)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1+ni_{экв}}{I_p} = 1+ni} \Rightarrow i_{экв} = \frac{I_p(1+ni)-1}{n}$$

Так как $\boxed{I_p = 1 + I_{\inf}}$ **, то** $i_{экв} = \dfrac{I_{\inf}(1+ni)-ni}{n}$

Определим ***эквивалентную ставку сложных процентов с учетом инфляции***, то есть найдем такую ставку $i_{экв}$, которая компенсировала бы рост цен

$$\boxed{C = S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{P\left(1+i_{экв}\right)^n}{I_p} = P\left(1+i\right)^n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(1+i_{экв}\right)^n = I_p\left(1+i\right)^n} \quad \Rightarrow \quad i_{экв} = \sqrt[n]{I_p}\left(1+i\right)-1$$

Если в каждом из *n* периодов начисления процентов индивидуальный индекс цен одинаковый, то

$$\boxed{\sqrt[n]{I_p} = \sqrt[n]{i_p i_p \ldots i_p} = \sqrt[n]{i_p^n} = i_p} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{i_{экв} = i_p\left(1+i\right)-1} \quad \textbf{или} \quad i_{экв} = i_{\inf}\left(1+i\right)+i$$