

Лекция № 3

Эффективные и эквивалентные ставки процентов

Учебные вопросы

1. Эквивалентные ставки простых и сложных процентов
2. Эффективные и номинальные ставки процентов. Финансовые функции MS Excel **ЭФФЕКТ**, **НОМИНАЛ**
3. Эквивалентность простых учетных и простых процентных ставок
4. Эквивалентные ставки простых и сложных процентов с учетом инфляции

Литератур

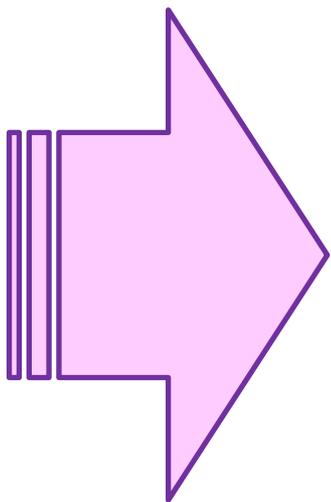
а

1. Кочетыков А.А. Финансовая математика. Серия «Учебники, учебные пособия». – Ростов н/Д: Феникс», 2004. – 480с.
2. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой математики: методы расчета кредитных, инвестиционных, пенсионных и страховых схем. – М.: Дело, 1998. – 304с.
3. Овчаренко Е.К., Ильина О.П., Балыбердин Е.В. Финансово-экономические расчеты в Excel. Издание 3-е, перераб. и доп. – М.: «Филин», 1999. – 328с.
4. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Дело Лтд., 1995. – 320с.

● **1. Эквивалентные ставки простых и сложных процентов**

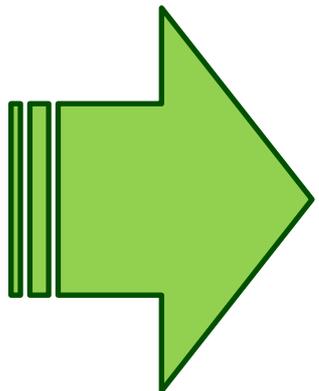
Определим эквивалентную процентную ставку, при которой наращенная сумма по **простым** и **сложным** процентам **одинакова**.

Эквивалентная процентная ставка



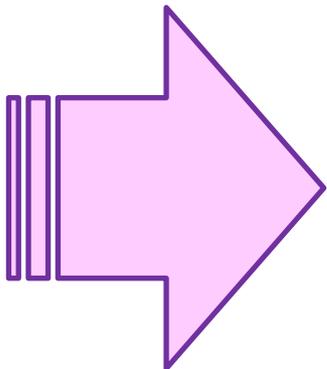
Это такая ставка *простых* или *сложных* процентов, при которой наращенная сумма по *простым* и *сложным* процентам *одинакова*

Вывод формулы эквивалентной процентной ставки



$$S_n = P(1 + ni_n)$$

*– наращенная
сумма по простым
процентам*



$$S_c = P(1 + i_c)^n$$

*– наращенная
сумма по сложным
процентам*

Доходность одинаковая, значит

$$S_n = S_c \Rightarrow (1 + ni_n) = (1 + i_c)^n \Rightarrow$$

Вывод формулы эквивалентной процентной ставки

Эквивалентная
процентная ставка

$$i_n = \frac{(1 + i_c)^n - 1}{n}$$

или

$$i_c = \sqrt[n]{1 + ni_n} - 1$$

Здесь

i_n

Ставка простых процентов

i_c

Ставка сложных процентов

По доходности ставки эквивалентны

Пример 1

Определить эквивалентную ставку **сложных** процентов i_c , если ставка **простых** процентов составляет $i_n=50\%$, а срок кредита $n=2$ года.

$$i_c = \sqrt[n]{1 + ni_n} - 1$$

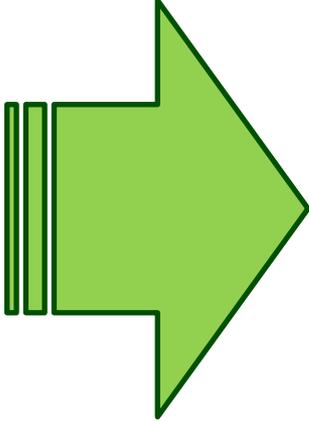

$$i_c = \sqrt{1 + 2 \cdot 0,5} - 1 = \sqrt{2} - 1 = 1,4 - 1 = 0,4 = 40\%$$

Ответ: $i_c=40\%$

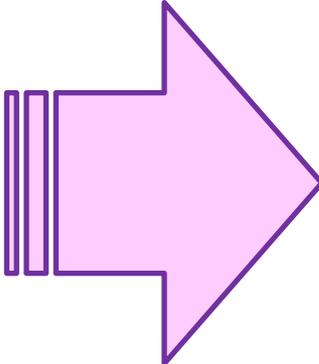
- **2. Эффективные и номинальные ставки процентов. Финансовые функции MS Excel ЭФФЕКТ, НОМИНАЛ**

Определим **эффективную процентную ставку** i , при которой наращенная сумма по **СЛОЖНЫМ** процентам и начислении процентов **один раз** в году такая же, что и при m - **разовом** наращении в год по ставке $\frac{j}{m}$

Вывод формулы **эффективной** процентной ставки


$$S = P(1 + i)^n$$

– **наращенная сумма по сложным процентам при начислении *раз в год***


$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn}$$

– **наращенная сумма по сложным процентам при начислении *t раз в год***

$$S = S \quad \Rightarrow \quad (1 + i)^n = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mn} \quad \Rightarrow$$

Вывод формулы **эффективной** процентной ставки

Эффективная
процентная ставка,
рассчитанная по
номинальной

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

Номинальная
процентная ставка,
рассчитанная по
эффективной

$$j = m \left(\sqrt[m]{i + 1} - 1 \right)$$

1. При $m > 1$ эффективная (годовая) ставка больше номинальной $i > j$

2. При $m = 1$ эффективная ставка равна номинальной, то есть $i = j$

В принципе в договоре заемщика и кредитора **номинальную** ставку можно **заменить** на **эффективную**, так как никто от этой замены не проигрывает в финансовом отношении.

Пример 2

Определить **эффективную** ставку i , если **номинальная** ставка равна $j=25\%$, при **п**омесячном начислении, то есть при $m=12, n=1$

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

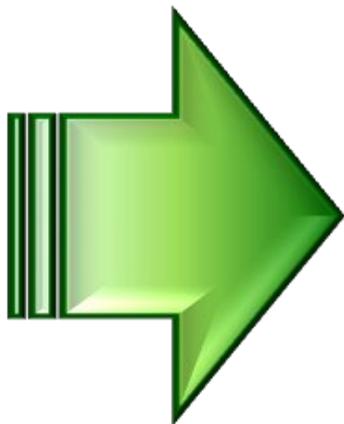


$$i = \left(1 + \frac{0,25}{12}\right)^{12} - 1 = 0,28073$$

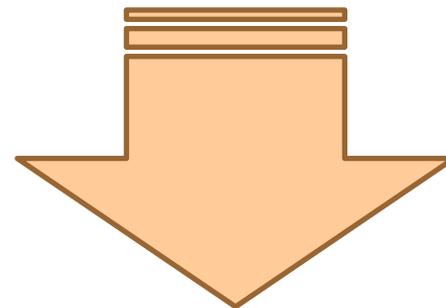
Вывод: для сторон безразлично, применять ли ставку $j=25\%$ при **п**омесячном начислении или годовую ставку $i=28\%$.

Функция ЭФФЕКТ

Вычисляет фактическую *эффективную* ставку, если заданы номинальная годовая процентная ставка и количество периодов начисления сложных процентов



Синтаксис
функции



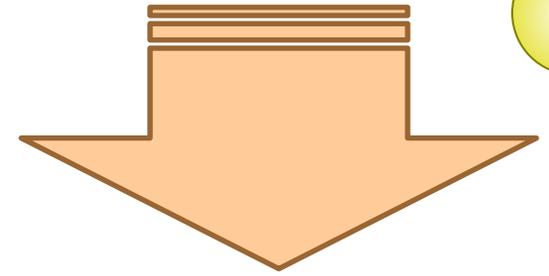
ЭФФЕКТ(Номинальная_ставка; Кол_пер)

Эта функция соответствует формуле :

$$i = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m - 1$$

**Функция
ЭФФЕКТ**

**Аргументы
функции**



1
6

Номинальная_ставка

Номинальная годовая процентная ставка (j)

Кол_пер

Количество периодов в году, за которые начисляются сложные проценты (m)

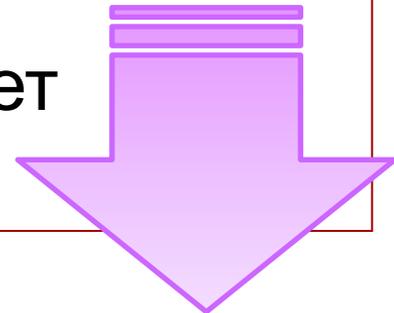
Пример 3

Имеется заем $P=5\,000\,000$ руб. с номинальной годовой процентной ставкой 19% и сроком уплаты 4 года.

Рассчитать **эффективные процентные ставки**, если начисление процентов:

- а) полугодовое, т.е. $m=2$;
- б) квартальное, т.е. $m=4$;
- в) ежемесячное, т.е. $m=12$;
- г) ежедневное, т.е. $m=365$.

Определить также сумму, которая будет выплачена (**S**).



Пример 3

а) ЭФФЕКТ(19%;2) = 0,1990;

б) ЭФФЕКТ(19%;4) = 0,2040;

в) ЭФФЕКТ(19%;12) = 0,2075;

г) ЭФФЕКТ(19%;365) = 0,2092.

Проверить в Excel по формуле:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m} \right)^m - 1$$

Самостоятельно

а) БС () = 10 334 345,04 руб.;

б) БС () = 10 505 930,18 руб.;

в) БС () = 10 627 914,79 руб.;

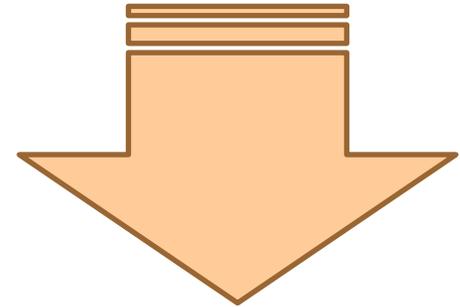
г) БС () = 10 689 267,20 руб.

Функция НОМИНАЛ

Вычисляет *номинальную* годовую процентную ставку (j), если известна эффективная ставка (i) и число периодов, составляющих расчетный год.



Синтаксис
функции



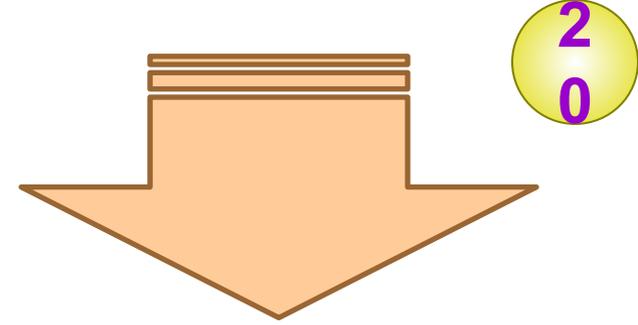
НОМИНАЛ(Факт_ставка; Кол_пер)

Эта функция
соответствует формуле :

$$j = m \left(\sqrt[m]{i + 1} - 1 \right)$$

**Функция
НОМИНАЛ**

**Аргументы
функции**



ФАКТ_ставка

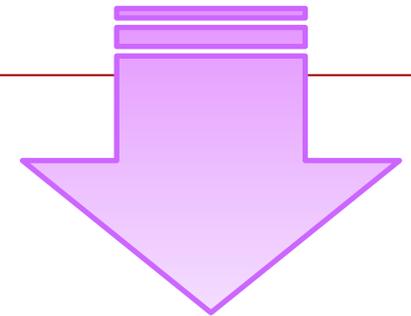
Фактическая (эффективная) ставка (i)

Кол_пер

Количество периодов в году, за которые начисляются сложные проценты (m)

Пример 4

Допустим, эффективная ставка составляет $i=25\%$, а начисление процентов производится ежемесячно, то есть $m=12$. Рассчитать номинальную процентную ставку (j).

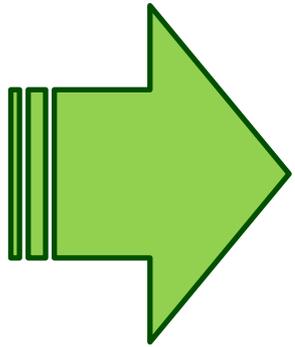


$$\text{НОМИНАЛ}(25\%;12) = 0,2252 \text{ или } j=22,52\%.$$

● **3. Эквивалентность простых
учетных и простых процентных
ставок**

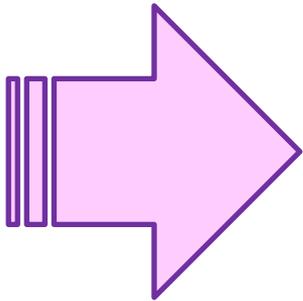
Определим ***простую учетную*** ставку **(*d*)**, эквивалентную ***простой процентной*** ставке **(*i*)**

Вывод формулы **простой учетной** ставки d , эквивалентной **простой процентной** ставке i



$$S_{уч} = \frac{P}{(1 - nd)}$$

– **наращенная сумма по простой учетной ставке**



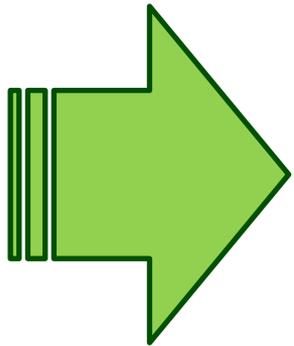
$$S_{пр} = P(1 + ni)$$

– **наращенная сумма по простой процентной ставке**

Доходность одинаковая, значит

$$S_{пр} = S_{уч} \Rightarrow \frac{1}{(1 - nd)} = (1 + ni) \Rightarrow$$

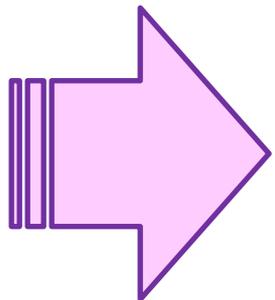
Вывод формулы **простой учетной** ставки d , эквивалентной **простой процентной** ставке i



$$i = \frac{d}{1 - nd}$$

– **простая процентная ставка, эквивалентная по доходности простой учетной ставке**

или



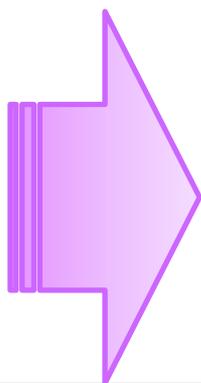
$$d = \frac{i}{1 + ni}$$

– **простая учетная ставка, эквивалентная по доходности простой процентной ставке**

Пример 5

Что выгоднее - депозит на 3 месяца под $i=120\%$ годовых или покупка дисконтной ценной бумаги со сроком погашения 3 месяца и учетной ставкой $d=100\%$.

$$i = \frac{d}{1 - nd} = \frac{d}{1 - \frac{t}{k}d}$$

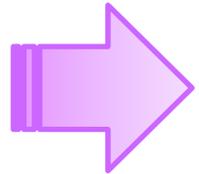


$$i = \frac{1}{1 - \frac{3}{12} \cdot 1} = \frac{4}{3} = 1,33 = 133\%$$

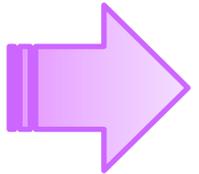
Ответ: Так как оказалось, что эквивалентная процентная ставка, рассчитанная по учетной ($i=133\%$) больше предложенной $i=120\%$, то лучше купить дисконтную ценную бумагу, ее потенциальная доходность выше, использовать вклад невыгодно.

 **4. Эквивалентные ставки простых и сложных процентов с учетом инфляции**

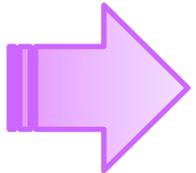
Виды инфляции:



Ползучая (умеренная) $I_{inf} = 3...10\%$ в год



Галопирующая $I_{inf} = 10...100\%$ в год



Гиперинфляция I_{inf} свыше 30% в год

Определим **эквивалентную ставку простых процентов с учетом инфляции**, то есть найдем такую ставку $i_{\text{эке}}$, которая компенсировала бы рост цен

Обозначим:

S – номинальная наращенная сумма

C – реальная наращенная сумма

I_{inf} – индекс (уровень) инфляции

I_p – индекс цен (показывает во сколько раз за период выросли цены)

$$\boxed{C = S} \Rightarrow \frac{P(1 + ni_{экр})}{I_p} = P(1 + ni) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1 + ni_{экр}}{I_p} = 1 + ni \Rightarrow i_{экр} = \frac{I_p(1 + ni) - 1}{n}$$

Так как $\boxed{I_p = 1 + I_{inf}}$, то $i_{экр} = \frac{I_{inf}(1 + ni) - ni}{n}$

Определим **эквивалентную ставку сложных процентов с учетом инфляции**, то есть найдем такую ставку $i_{\text{эке}}$, которая компенсировала бы рост цен

$$\boxed{C = S} \Rightarrow \frac{P(1 + i_{\text{экв}})^n}{I_p} = P(1 + i)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(1 + i_{\text{экв}})^n = I_p (1 + i)^n} \Rightarrow i_{\text{экв}} = \sqrt[n]{I_p} (1 + i) - 1$$

Если в каждом из n периодов начисления процентов индивидуальный индекс цен одинаковый, то

$$\sqrt[n]{I_p} = \sqrt[n]{i_p i_p \otimes i_p} = \sqrt[n]{i_p^n} = i_p \Rightarrow$$

$$\boxed{i_{\text{экв}} = i_p (1 + i) - 1} \quad \text{или} \quad i_{\text{экв}} = i_{\text{inf}} (1 + i) + i$$