

Лабораторные работы имеют следующие цели:

ознакомление студентов с возможностями использования средств вычислительной техники для решения задач моделирования, оптимизации и управления производственными процессами

привитие студентам навыков корректной постановки задач для решения на ЭВМ, реализация на них вычислительных алгоритмов и получение физически обоснованных результатов расчета;

□ обучение студентов методологии проведения расчетных исследований процессов на ЭВМ и использование последних для решения задач проектирования и оптимизации.

В настоящих методических указаниях к выполнению лабораторных работ рассматриваются вопросы практического применения студентами приемов математического моделирования с использованием методики полного факторного эксперимента, включая следующие этапы:

- проверка воспроизводимости результатов эксперимента;
- построение математической модели в явном виде с расчетом коэффициентов уравнения регрессии;
- проверка адекватности математической модели;
- инженерная интерпретация полученного уравнения регрессии, позволяющая оценить зависимость параметра оптимизации от выбранных факторов и сформулировать условия для повышения эффективности изучаемого технологического процесса.

Теоретические подходы к моделированию технологических процессов.

Технологические процессы представляют собой комплекс взаимосвязанных и протекающих в сложной взаимозависимости явлений, описание которых затрудняется необходимостью установления закономерностей протекания элементарных процессов и их взаимодействия и взаимовлияния друг на друга.

Эти процессы относят к классу стохастических, в котором изменение определяющих величин происходит беспорядочно и часто дискретно. При этом значение выходной величины не находится в однозначном соответствии с входной. Для описания стохастических процессов используют статистико-вероятностные методы.

Одним из методов, хорошо зарекомендовавшим себя в решении такого рода задач, является метод полного факторного эксперимента, в основе которого лежит способ построения зависимости влияния определяющих факторов на параметр оптимизации в виде отрезка степенного ряда Тейлора.

Метод полного факторного эксперимента включает в себя последовательные этапы математического моделирования:

1. Выбор параметра (или параметров) оптимизации и влияющих факторов.
2. Выбор основного уровня и интервала варьирования по каждому фактору.
3. Проверка воспроизводимости результатов эксперимента.
4. Собственно построение математической модели с вычислением коэффициентов уравнения регрессии.
5. Проверка адекватности уравнения регрессии.
6. Инженерная интерпретация уравнения регрессии.

Выбор параметра (или параметров) оптимизации, влияющих факторов, а также выбор основного уровня и интервала варьирования по каждому фактору подробно рассматриваются в лекционном курсе.

На лабораторных занятиях студенты приобретают навыки решения задач проверки воспроизводимости результатов эксперимента, построения математической модели и проверки её адекватности на ЭВМ.

Пример:

Изучить влияние на параметр оптимизации Y , в качестве которого Выбрана **Теплота сгорания**, от следующих факторов:

1. **Зольность** (X_1);
2. **Содержание серы** (X_2);
3. **Влажность** (X_3).

Для факторов 1-3 были выбраны основные уровни, интервалы варьирования

Значения уровней факторов и интервалов варьирования

Показатель	фактор X_1		фактор X_2		фактор X_3	
	натуральное значение, %	кодированное значение	натуральное значение, %	кодированное значение	натуральное значение,	кодированное значение
Основной уровень	1,0	0	0,3	0	40	0
Интервал варьирования	0,5		0,2		20	
Нижний уровень	0,5	-1	0,1	-1	20	-1
Верхний уровень	1,5	+1	0,5	+1	60	+1

Эксперимент для проверки воспроизводимости опытов

Серия	№ опыта	фактор X_1	фактор X_2	фактор X_3	Значения Y_1
1	1	+1	+1	+1	7,1
	2	+1	+1	+1	10,1
	3	+1	+1	+1	8,1
2	1	-1	-1	-1	5,3
	2	-1	-1	-1	4,1
	3	-1	-1	-1	5,1
3	1	0	0	0	4,4
	2	0	0	0	4,2
	3	0	0	0	4,6

Матрица планирования полного факторного эксперимента

№ опыта	X_1	X_2	X_3	$Y_{\text{эксп}} \text{ см}$
1	+1	+1	+1	8,5
2	+1	+1	-1	9,7
3	+1	-1	+1	6,3
4	+1	-1	-1	12,0
5	-1	+1	+1	3,5
6	-1	+1	-1	4,7
7	-1	-1	+1	3,6
8	-1	-1	-1	5,2

в

Выполнение задания:

Обработка результатов ведется по следующему алгоритму:

1. Для каждой серии параллельных опытов вычисляют среднее арифметическое значение функции отклика по формуле

$$\bar{Y}_j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Y_{j,i}$$

где j - номер серии параллельных опытов;

k -число параллельных опытов, проведенных при одинаковых условиях;

$Y_{j,i}$ - текущее значение параметра оптимизации i -го опыта j -й серии.

2. Для каждой серии параллельных опытов вычисляется оценка дисперсии s_j^2 по формуле:

$$s_j^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (Y_{j,i} - \bar{Y}_j)^2$$



3. Расчетное значение G_p находят из отношения максимальной оценки дисперсии к сумме всех дисперсий

и сравнивают с табличным значением критерия Кохрена, выбираемым из справочника при известных значениях общего количества дисперсий N , и числом степеней свободы f , связанным с каждой из них как $f = k - 1$.

Если выполняется условие $G_{расч} \leq G_{табл}$, то опыты считаются воспроизводимыми, а оценки дисперсий - однородными.

$$G_p = \frac{\max s_j^2}{\sum_{j=1}^N s_j^2}$$

Оценки однородных дисперсий можно усреднить и найти величину, называемую оценкой дисперсии воспроизводимости

$$s_Y^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s_j^2,$$

с которой связано число степеней свободы $f = N(k - 1)$.

Оценку дисперсии среднего значения рассчитывают по формуле

$$s_{\bar{Y}}^2 = \frac{s_Y^2}{k}.$$

С ней также связано число степеней свободы $f = N(k - 1)$.

Результаты вычислений и выводы о воспроизводимости результатов эксперимента по параметру оптимизации Y представлены в табл.

Результаты проверки воспроизводимости эксперимента
по параметру оптимизации Y

Серия	№ опы- та	фактор X_1	фактор X_2	фактор X_3	Значения Y_1 ,	\bar{Y} , см	s_j^2
1	1	+1	+1	+1	7,1	8,43	2,333
	2	+1	+1	+1	10,1		
	3	+1	+1	+1	8,1		
2	1	-1	-1	-1	5,3	4,83	0,413
	2	-1	-1	-1	4,1		
	3	-1	-1	-1	5,1		
3	1	0	0	0	4,4	4,40	0,04
	2	0	0	0	4,2		
	3	0	0	0	4,6		

Расчетное значение критерия Кохрена

$$G_p = \frac{2,333}{2,333 + 0,413 + 0,04} = 0,837 .$$

Табличное значение критерия Кохрена $G_{\text{табл}} = 0,871$

$0,837 < 0,871$ - опыты воспроизводимы.

Расчет коэффициентов уравнения регрессии ведется по формулам по исходным данным, представленным в табл.

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j ;$$

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j X_{ji} ;$$

$$b_{lm} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j X_{jm} X_{jl} \quad l \neq m.$$

Оценка значимости коэффициентов уравнения регрессии проводится по условию

$$|b| \geq s_b t,$$

где b - коэффициент уравнения регрессии;

t - критерий Стьюдента;

s_b - оценка коэффициента уравнения регрессии, определяемая по формуле

$$s_b = \sqrt{\frac{s_Y^2}{N}}.$$

Адекватность уравнения регрессии проверяется с помощью критерия Фишера:

где $s_{ад}^2$ - оценка дисперсии адекватности. В числителе дроби находится большая, а в знаменателе - меньшая из указанных оценок дисперсий.

$$F_p = \frac{\max(s_{ад}^2, s_Y^2)}{\min(s_{ад}^2, s_Y^2)}$$

Оценку дисперсии адекватности вычисляют по формуле

$$s_{ад}^2 = \frac{1}{N - B} \sum (Y_j^э - Y_j^р)^2$$

где B - число коэффициентов регрессии искомого уравнения, включая свободный член;

$Y_j^э, Y_j^р$ - экспериментальное и расчетное значение функции отклика в j -том опыте;

N - число опытов полного факторного эксперимента.

С дисперсией адекватности связано число степеней свободы

$$f = N - B .$$

Расчетное значение критерия Фишера выбирается из таблицы.
Уравнение регрессии считается адекватным, если выполняется условие

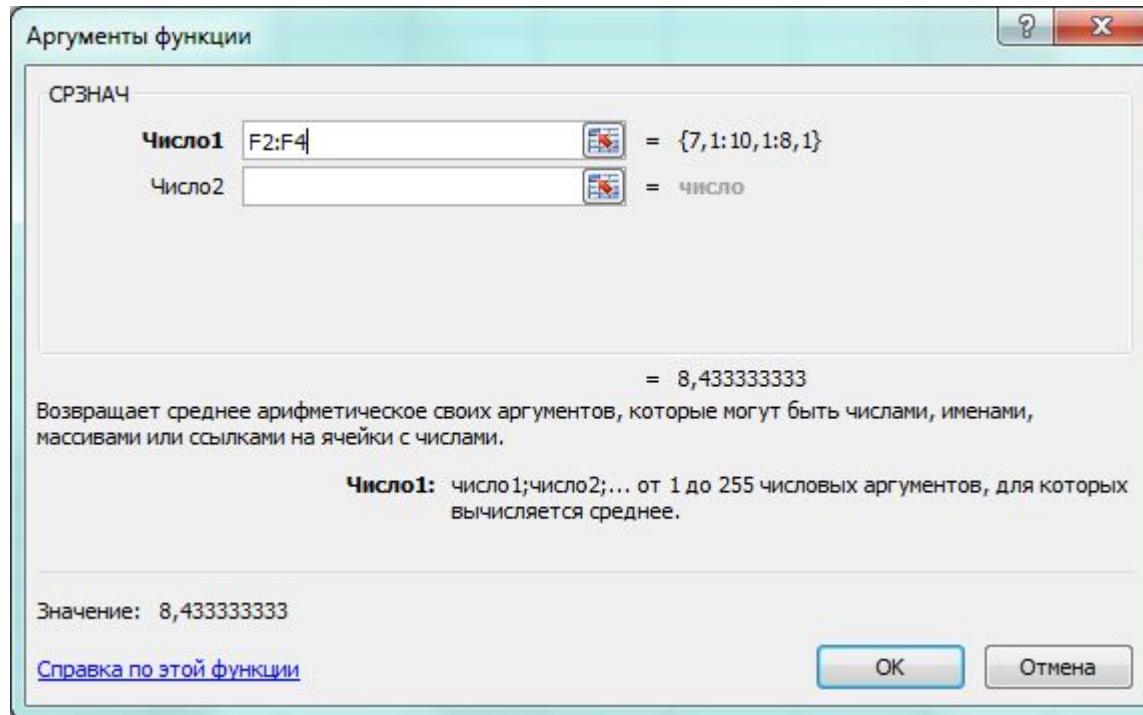
$$F_p \leq F$$

Расчеты по приведенному выше алгоритму проводят в Microsoft Excel путем программирования ячеек электронной таблицы.

Пример расчета: Переносим данные таблицы 2 на лист созданной книги Microsoft Excel

Расчет Y_{cp} и s_j^2 производим путем программирования соответствующих ячеек книги Microsoft Excel. Ввод формулы в ячейку всегда начинается со знака равенства.

Для расчета Y_{cp} активизируем (выделяем мышью) ячейку G3 книги. После этого при помощи клавиатуры вводим знак равенства, а затем, используя мастер функций нажатием правой кнопкой мыши на значок f_x , выбираем в категории «Статистические» функцию «среднее значение» - СРЗНАЧ (рис.) и нажимаем «ОК».



Для указания диапазона вычислений среднего значения указываем в поле окна «число 1» (рис.) массив данных, находящихся в ячейках F2, F3 и F4, выделив правой кнопкой мыши ячейку F2 и, удерживая нажатой клавишу «Shift», ячейку F4. Заканчивается ввод формулы нажатием «Enter».

Для расчета оценки дисперсии для каждой серии параллельных опытов s_j^2 активизируем ячейку H3 и вводим в неё формулу следующим образом:
$$=(1/2)*((F2-G3)^2+(F3-G3)^2+(F4-G3)^2)$$
. Заканчивается ввод формулы нажатием «Enter».

Аналогичным образом для вычисления средних значений по следующим сериям параллельных опытов программируем ячейки G6 и G9. Для вычисления соответствующих оценок дисперсий второй и третьей серий проведенных параллельных опытов ячейки H6 и H9. Результат расчетов представлен на рис.

\bar{Y}

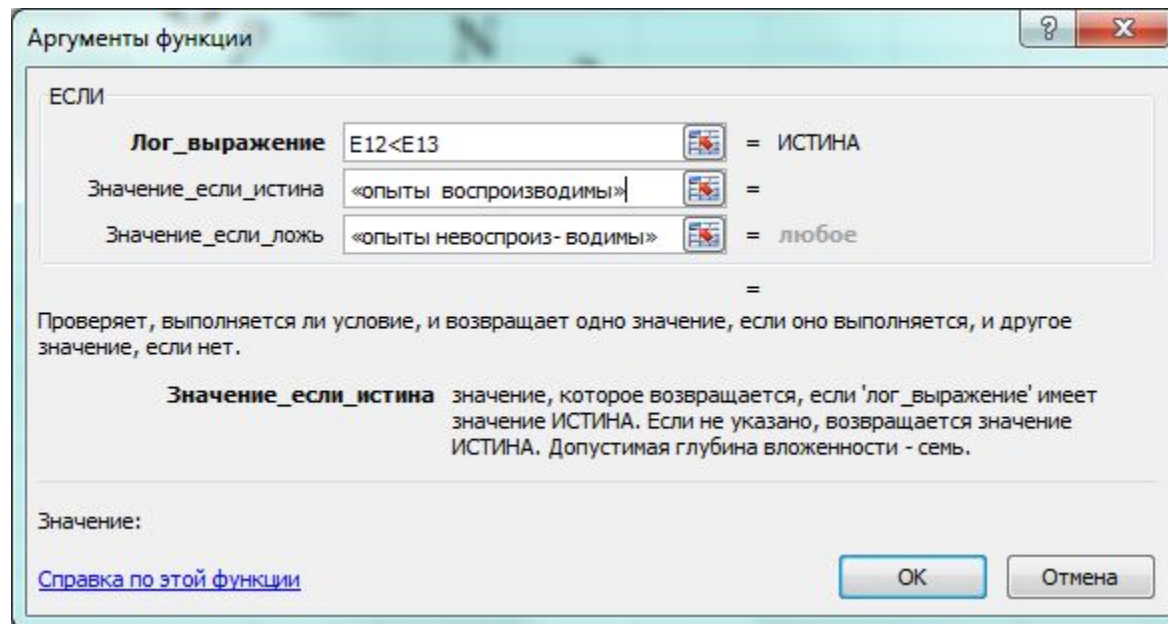
$$s_j^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (Y_{j,i} - \bar{Y}_j)^2$$

Серия	№ опыта	X1	X2	X3	Yэкс	\bar{Y}	s_j^2
1	1	1	1	1	7,10	8,43	109,015
	2	1	1	1	10,10		
	3	1	1	1	8,10		
2	1	-1	-1	-1	5,30	4,83	35,455
	2	-1	-1	-1	4,10		
	3	-1	-1	-1	5,10		
3	1	0	0	0	4,40	4,40	29,08
	2	0	0	0	4,20		
	3	0	0	0	4,60		

Вводим в ячейку A12 текст «Расчетное значение критерия Кохрена», а в ячейку A13 - текст «Табличное значение критерия Кохрена».

В ячейку E12 вводим формулу (3) как = МАКС(G3:G9)/СУММ(G3:G9), а в ячейку E13 – табличное значение критерия Кохрена из Приложения

Для сравнения расчетного и табличного значений критерия Кохрена используем логическую функцию «ЕСЛИ», программируя поле «Лог_выражение» как F12<F13, поле «Значение_если_истина» как «опыты воспроизводимы», а поле «Значение_если_ложь» как «опыты невоспроизводимы»



Скрия	№ опыта	X1	X2	X3	Yэкс	\bar{Y}	s_j^2	
1	1	I	I	I	7,10	8,43	2,33333	1,77778
	2	1	1	1	10,10			2,77778
	3	1	1	1	8,10			0,11111
2	1	-1	-1	-1	5,30	4,83	0,41333	0,21778
	2	-1	-1	-1	4,10			0,53778
	3	-1	-1	-1	5,10			0,07111
3	1	0	0	0	4,40	4,40	0,04	0
	2	0	0	0	4,20			0,04
	3	0	0	0	4,60			0,04

«Расчетное значение критерия Кохрена», 0,837320574
«Табличное значение критерия Кохрена» 0,871

опыты воспроизводимы

=ЕСЛИ(Е12<Е13;"опыты воспроизводимы";"опыты невоспроизводимы")

Скрия	№ опыта	X1	X2	X3	Үэкс		
1	1	I	I	I	7,10	s_j^2	2,33333
	2	1	1	1	10,10		
	3	1	1	1	8,10		
					\bar{Y}	8,43	
2	1	-1	-1	-1	5,30		0,41333
	2	-1	-1	-1	4,10		
	3	-1	-1	-1	5,10		
						4,83	
3	1	0	0	0	4,40		0,04
	2	0	0	0	4,20		
	3	0	0	0	4,60		
						4,40	

1,777778

2,777778

0,111111

0,217778

0,537778

0,071111

0

0,04

0,04

«Расчетное значение критерия Кохрена»,

0,837320574

«Табличное значение критерия Кохрена»

0,871

опыты воспроизводимы

Оценка дисперсии воспроизводимости

0,928888889

Связанное с ней число степеней свободы f

6

Оценка дисперсии среднего значения

0,31

Связанное с ней число степеней свободы f

6

Расчет коэффициентов уравнения регрессии проводится по формулам

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j;$$

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j X_{ji};$$

$$b_{lm} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j X_{jm} X_{jl} \quad l \neq m.$$

Переносим данные таблицы 3 на лист 2 созданной книги Microsoft Excel и создаем дополнительно таблицу для расчетов коэффициентов уравнения регрессии (рис. .

Буфер обмена

Вставить

Шрифт

Выравнивание

Число

Стили

Ячейки

Условное форматирование

Форматировать как таблицу

Стили ячеек

Вставить

Удалить

Формат

Сортировка и фильтр

Найти и выделить

Редактирование

Object 3 fx =ВНЕДРИТЬ("Equation.3";"")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
№	X ₁	X ₂	X ₃	Y _{экс}	Y _{x1}	Y _{x2}	Y _{x3}	x _{1x2}	x _{1x3}	x _{2x3}				
1	1	1	1	8,5	8,5	8,5	8,5	1	1	1	8,5	8,5	8,5	
2	1	1	-1	9,7	9,7	9,7	-9,7	1	-1	-1	9,7	-9,7	-9,7	
3	1	-1	1	6,3	6,3	-6,3	6,3	-1	1	-1	-6,3	6,3	-6,3	
4	1	-1	-1	12	12	-12	-12	-1	-1	1	-12	-12	12	
5	a	-1	1	3,5	-3,5	3,5	3,5	-1	-1	1	-3,5	-3,5	3,5	
6	6	-1	1	4,7	-4,7	4,7	-4,7	-1	1	-1	-4,7	4,7	-4,7	
7	7	-1	-1	3,6	-3,6	-3,6	3,6	1	-1	-1	3,6	-3,6	-3,6	
8	8	-1	-1	5,2	-5,2	-5,2	-5,2	1	1	1	5,2	5,2	5,2	
9				53,5	19,5	-0,7	-9,7				0,5	-4,1	4,9	

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j;$$

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j X_{ji};$$

$$b_{lm} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j X_{jm} X_{jl} \quad l \neq m.$$

Как показывает практика создания математической модели с использованием метода полного факторного эксперимента, для точности предсказания результатов и адекватности полученного уравнения регрессии, можно не исключать из него элементы с незначимыми коэффициентами уравнения регрессии.

Поэтому проверку значимости коэффициентов уравнении регрессии не проводят.

Полученное уравнение регрессии имеет вид:

$$Y_1 = 6,6875 + 2,4375X_1 - 0,0875X_2 - 1,212X_3 + 0,0625X_1X_2 + 0,6125X_2X_3 - 0,5125^* X_1X_3$$

Проверка адекватности полученного уравнения проводится стандартным методом при помощи сравнения табличного и расчетного значений критерия Фишера.

Решение этой задачи требует вычисления значений $Y1_{\text{эксп}}$. Для этого в уравнение регрессии построчно подставляются значения $X1-X3$ из табл. , соответствующие условиям проведения каждого из опытов полного факторного эксперимента и методом программирования ячеек проводятся соответствующие вычисления

Буфер обмена Вставить

Calibri 11 Шрифт

Ж К Ц Выравнивание

Перенос текста Обьединить и поместить в центре

Общий Число

Условное форматирование Форматировать как таблицу Стили

Вставить Удалить Формат Ячейки

Сортировка и фильтр Найти и выделить Редактирование

O2 = $\$B\$11+\$B\$12*B2+\$B\$13*C2+\$B\$14*D2+\$B\$15*I2+\$B\$16*J2+\$B\$17*K2$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	№	X ₁	X ₂	X ₃	Y _{экс}	Y _{x1}	Y _{x2}	Y _{x3}	x ₁ x ₂	x ₁ *x ₃	x ₂ x ₃				Y ₁ _{экср}			
2	1	1	1	1	8,5	8,5	8,5	8,5	1	1	1	8,5	8,5	8,5	7,9875			
3	2	1	1	-1	9,7	9,7	9,7	-9,7	1	-1	-1	9,7	-9,7	-9,7	10,2125			
4	3	1	-1	1	6,3	6,3	-6,3	6,3	-1	1	-1	-6,3	6,3	-6,3	6,8125			
5	4	1	-1	-1	12	12	-12	-12	-1	-1	1	-12	-12	12	11,4875			
6	a	-1	1	1	3,5	-3,5	3,5	3,5	-1	-1	1	-3,5	-3,5	3,5	4,0125			
7	6	-1	1	-1	4,7	-4,7	4,7	-4,7	-1	1	-1	-4,7	4,7	-4,7	4,1875			
8	7	-1	-1	1	3,6	-3,6	-3,6	3,6	1	-1	-1	3,6	-3,6	-3,6	3,0875			
9	8	-1	-1	-1	5,2	-5,2	-5,2	-5,2	1	1	1	5,2	5,2	5,2	5,7125			
10					53,5	19,5	-0,7	-9,7				0,5	-4,1	4,9				
11	b0	6,6875																
12	b1	2,4375																
13	b2	-0,0875																
14	b3	-1,2125																
15	b12	0,0625																
16	b13	-0,5125																
17	b23	0,6125																
18																		
19	$Y_1 = 6,6875 + 2,4375X_1 - 0,0875X_2 - 1,2125X_3 + 0,0625X_1X_2 + 0,6125X_2X_3 - 0,5125X_1X_3$																	
20																		
21																		

$$s_{ад}^2 = \frac{1}{N - B} \sum (Y_j^э - Y_j^p)^2$$

Затем по формуле $f = N - B$ рассчитывается значение дисперсии адекватности, а по формуле $f = N - B$ – связанное с ней число степеней свободы.

Алгоритм расчета критерия Фишера заключается в сравнении дисперсии воспроизводимости с дисперсией адекватности и делении большего числа на меньшее.

Программирование ячейки I19 заключается во вводе в нее формулы =МАКС(F19;F22)/МИН(F19;F22). Табличное значение критерия Фишера выбирается по Приложению и вводится в ячейку I20.

Аргументы функции

МАКС

Число1	E19	=	2,10125
Число2	E23	=	0,928888889
Число3		=	число

= 2,10125

Возвращает наибольшее значение из списка аргументов. Логические и текстовые значения игнорируются.

Число2: число1;число2;... от 1 до 255 чисел, пустых ячеек, логических или текстовых значений, среди которых ищется наибольшее значение.

Значение: 2,10125

[Справка по этой функции](#)

OK Отмена

Аргументы функции

МИН

Число1	E19	=	2,10125
Число2	E23	=	0,928888889
Число3		=	число

= 0,928888889

Возвращает наименьшее значение из списка аргументов. Логические и текстовые значения игнорируются.

Число2: число1;число2;... от 1 до 255 чисел, пустых ячеек, логических или текстовых значений, среди которых ищется наименьшее значение.

Значение: 2,262111244

[Справка по этой функции](#)

OK Отмена

Excel ribbon: Главная, Вставка, Разметка страницы, Формулы, Данные, Рецензирование, Вид. Font: Calibri, 11. Ribbon buttons: Вставить, Буфер обмена, Шрифт, Выравнивание, Число, Условное форматирование, Форматировать как таблицу, Стили, Ячейки, Сортировка и фильтр, Найти и выделить.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	№	X ₁	X ₂	X ₃	Y _{экс}	Y _{x1}	Y _{x2}	Y _{x3}	x _{1x2}	x _{1*x3}	x _{2x3}				Y _{1эксп}				
2	1	1	1	1	8,5	8,5	8,5	8,5	1	1	1	8,5	8,5	8,5	7,9875	0,262656			
3	2	1	1	-1	9,7	9,7	9,7	-9,7	1	-1	-1	9,7	-9,7	-9,7	10,2125	0,262656			
4	3	1	-1	1	6,3	6,3	-6,3	6,3	-1	1	-1	-6,3	6,3	-6,3	6,8125	0,262656			
5	4	1	-1	-1	12	12	-12	-12	-1	-1	1	-12	-12	12	11,4875	0,262656			
6	a	-1	1	1	3,5	-3,5	3,5	3,5	-1	-1	1	-3,5	-3,5	3,5	4,0125	0,262656			
7	6	-1	1	-1	4,7	-4,7	4,7	-4,7	-1	1	-1	-4,7	4,7	-4,7	4,1875	0,262656			
8	7	-1	-1	1	3,6	-3,6	-3,6	3,6	1	-1	-1	3,6	-3,6	-3,6	3,0875	0,262656			
9	8	-1	-1	-1	5,2	-5,2	-5,2	-5,2	1	1	1	5,2	5,2	5,2	5,7125	0,262656			
10					53,5	19,5	-0,7	-9,7				0,5	-4,1	4,9		2,10125			

$$Y_1 = 6,6875 + 2,4375X_1 - 0,0875X_2 - 1,2125X_3 + 0,0625X_1X_2 + 0,6125X_2X_3 - 0,5125X_1X_3$$

11	b ₀	6,6875
12	b ₁	2,4375
13	b ₂	-0,0875
14	b ₃	-1,2125
15	b ₁₂	0,0625
16	b ₁₃	-0,5125
17	b ₂₃	0,6125
19	дисперсии адекватности	2,10125
21	связанное с ней число степеней свободы	1
23	Оценка дисперсии воспроизводимости	0,92888889
24	Связанное с ней число степеней свободы f	6

$$S_{ад}^2 = \frac{1}{N - B} \sum (Y_j^э - Y_j^p)^2$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N S_j^2$$

f = N(k-1)

критерий Фишера 2,262111
 критерий Фишера 5,99
 модель адекватна

После положительного вывода об адекватности уравнения регрессии, его подвергают инженерной интерпретации следующим образом.

Известно, что величина коэффициента уравнения регрессии - количественная мера его влияния. О характере влияния факторов говорят знаки коэффициентов.

Знак «плюс» свидетельствует о том, что с увеличением значения фактора величина параметра оптимизации растет, а при знаке «минус» - убывает.