



КУРС ЛЕКЦИЙ

ПЛАНИРОВАНИЕ И ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТА

**Старший преподаватель
Львов Владимир Анатольевич**

СТРУКТУРА КУРСА

Виды учебной работы	Объем в часах по семестрам
	02 семестр 17 недель
Лекции	28
Семинары	6
Лабораторные работы	0
Практические занятия	0
Самостоятельная работа	68
Итого в часах	102
Итого в зачетных единицах	3
Проверка знаний	зачет

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

1. Математическая статистика./ Под ред. В.Б. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 424 с.
2. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высш. шк., 1999. – 497 с.
3. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. – М.: Высш. шк., 1988. – 239 с.
4. Чарыков А.К. Математическая обработка результатов химического анализа. – Л.: Химия, 1984. – 168 с.
5. Новицкий П.В., Зоргаф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.
6. Многомерный статистический анализ в экономике./Под. ред. В.Н. Тамашевича. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 1999. – 598 с.
7. Шкляр В.Н. Планирование эксперимента и обработка результатов. – Томск.: Из-во Томского политехнического университета, 2010. – 90 с.



ОСНОВНЫЕ ПОТРАТИТЕЛЬНЫЕ ДОКУМЕНТЫ

1. ГОСТ 24026-80 «Исследовательские испытания. Планирование эксперимента. Термины и определения». – М.: Госстандарт, 1980
2. ГОСТ 8.011-72 (отменен) «Показатели точности измерений и формы представления результатов измерений»
3. МИ 1317-2004 «Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров». – М.: 2004
4. ГОСТ 16263-70 (отменен) «Метрология. Термины и определения». Терминология и система обозначений, рекомендованные научным советом по аналитической химии.
5. РМГ 29-99 «ГСИ. Метрология. Основные термины и определения». – Минск, 2001
6. ГОСТ 8.009-84 «Нормируемые метрологические характеристики средств измерений». – М.: Стандартиформ, 2006
7. ГОСТ 8.401-80 «Классы точности средств измерений. Общие требования»
8. ГОСТ 11.002-73 (отменен) «Прикладная статистика. Правила оценки аномальности результатов наблюдений». – М.: Госстандарт, 1973
9. ГОСТ Р ИСО 5479-2002 «Статистические методы. Проверка отклонения распределения вероятностей от нормального распределения». – М.: Госстандарт России, 2002

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- ▣ **Аналитический сигнал** – среднее результатов измерения физической величины в заключительной стадии анализа функционально связанное с содержанием определенным компонентом. Экстенсивная величина (пропорциональная массе или концентрации) физического свойства анализируемой пробы.
- ▣ **Эксперимент** - система операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях.
- ▣ **Опыт** - воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов.
- ▣ **План эксперимента** - совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.
- ▣ **Планирование эксперимента** - выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям.
- ▣ **Фактор (Параметр)** - переменная величина, по предположению влияющая на результаты эксперимента.
- ▣ **Уровень фактора** - фиксированное значение фактора относительно начала отсчета.
- ▣ **Основной уровень фактора** - натуральное значение фактора, соответствующее нулю в безразмерной шкале.
- ▣ **Нормализация факторов** - преобразование натуральных значений факторов в безразмерные значения.



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- ▣ **Априорное ранжирование факторов** - метод выбора наиболее важных факторов, основанный на экспертной оценке.
- ▣ **Размах варьирования фактора** - разность между максимальным и минимальным натуральными значениями фактора в данном плане.
- ▣ **Интервал варьирования фактора** - половина размаха варьирования фактора.
- ▣ **Эффект взаимодействия факторов** - показатель зависимости изменения эффекта одного фактора от уровней других факторов.
- ▣ **Факторное пространство** - пространство, координатные оси которого соответствуют значениям факторов.
- ▣ **Область экспериментирования (область планирования)** - область факторного пространства, где могут размещаться точки, отвечающие условиям проведения опытов.
- ▣ **Активный эксперимент** - эксперимент, в котором уровни факторов в каждом опыте задаются исследователем.
- ▣ **Пассивный эксперимент** - эксперимент, при котором уровни факторов в каждом опыте регистрируются исследователем, но не задаются.
- ▣ **Последовательный эксперимент (шаговый эксперимент)** - эксперимент, реализуемый в виде серий, в котором условия проведения каждой последующей серии определяются результатами предыдущих.
- ▣ **Отклик (Реакция на Параметр)** - наблюдаемая случайная переменная, по предположению, зависящая от факторов.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- ▣ **Функция отклика** - зависимость математического ожидания отклика от факторов.
- ▣ **Оценка функции отклика** - зависимость, получаемая при подстановке в функцию отклика оценок значений ее параметров.
- ▣ **Дисперсия оценки функции отклика** - дисперсия оценки математического ожидания отклика в некоторой данной точке факторного пространства.
- ▣ **Поверхность отклика (Поверхность регрессии)** - геометрическое представление функции отклика.
- ▣ **Поверхность уровня функции отклика** - геометрическое место точек в факторном пространстве, которому соответствует некоторое фиксированное значение функции отклика.
- ▣ **Область оптимума** - область факторного пространства в окрестности точки, в которой функция отклика достигает экстремального значения.
- ▣ **Рандомизация плана** - один из приемов планирования эксперимента, имеющий целью свести эффект некоторого неслучайного фактора к случайной ошибке.
- ▣ **Параллельные опыты** - рандомизированные во времени опыты, в которых уровни всех факторов сохраняются неизменными.
- ▣ **Временный дрейф** - случайное или неслучайное изменение функции отклика во времени.



ЛЕКЦИЯ 1. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ И ПРИБОРОВ И ИЗМЕРЕНИЙ

Разновидности погрешностей

Качество средств и результатов измерений принято характеризовать указанием их погрешностей. Характер проявления и причины возникновения погрешностей весьма разнообразны, поэтому в практике установилось их деление на ряд разновидностей, за каждой из которых закреплено определенное наименование. Этих наименований более 30 (самых названий погрешностей более 50) и исследователь должен четко усвоить эту терминологию.

- **Погрешность результата измерений** – это число, указывающее возможные границы неопределенности значения измеряемой величины.
- **Погрешность прибора (средства измерения)** – это его определенное свойство, для описания которого приходится пользоваться целым рядом соответствующих правил.

Внимание! Грубейшая ошибка считать, что прибор с классом точности 1,0 имеющий предел приведенной погрешности 1% позволяет получить результат измерения с погрешностью равной 1% .

Вывод: Погрешности средств измерений (СИ) и погрешности результатов измерений (РИ) – понятия не идентичные.

РАЗНОВИДНОСТИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Замечание: Исторически часть наименований разновидностей погрешностей закрепилась за погрешностями **СИ**, другая за **РИ**, а некоторые применяются к тем и другим. Поэтому следует обращать внимание на области применения терминов и отмечать те случаи, когда один и тот же термин в разных областях имеет не совпадающие значения.

• **Инструментальными (приборными или аппаратными) погрешностями** называются такие, которые принадлежат данному средству измерений, могут быть определены при его испытаниях (поверках и проверках) и занесены в его паспорт.

• **Методическими погрешностями** называют погрешности не связанные с самим прибором, а обусловленные с методом его использования. Эти погрешности не могут быть приписаны данному прибору (**СИ**) и указаны в его паспорте.

Примером такой погрешности является погрешность **квантования** (округления показаний) при отсчете со шкалы аналогового прибора. Согласно РМГ 29-99 эта погрешность называют погрешностью **отсчитывания**. Некоторые авторы используют термин ***личностной*** погрешности (зависящей от личности оператора), т.к. один воспринимает 77,0 другой 77,1, третий 76,9.



РАЗНОВИДНОСТИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Замечание: Часто причиной возникновения методических погрешностей является возможность измерения не той величины, которая нам необходима. Нередко трудно указать способ измерения, исключая методическую погрешность.

Внимание! Методические погрешности не указываются в паспорте и должны оцениваться самим экспериментатором при организации методики измерений. При этом он должен четко различать *фактически измеряемую им величину*, от величины, *подлежащей измерению*. Эта оценка достаточно сложна. В стандартизированных методах эта оценка заносится в *паспорт метода* и является одной из насущных задач современной метрологии.

В последнее время термин "методическая погрешность" начали широко употреблять в совсем другом смысле, как погрешность, вызванную методом положенным в основу создания самого прибора, не зависящую от разработчика.

Например, погрешность квантования в цифровых приборах. Однако в паспорте прибора эта погрешность обязательно должна быть указана как инструментальная, согласно ГОСТ 8.009-84.

Вывод: Отличительной особенностью методических погрешностей является то, что они могут быть определены лишь путем создания математической модели или имитационным моделированием измеряемого объекта и не могут быть найдены сколь угодно тщательным исследованием лишь самого СИ.

ЛЕКЦИЯ 2. РАЗНОВИДНОСТИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Основная и дополнительная погрешности СИ

Любое СИ (датчик, измерительный прибор, регистратор) работает в сложных, изменяющихся во времени условиях под воздействием множества факторов. Каждый из этих факторов в принципе может быть измерен в отдельности, но в реальных условиях он действует на СИ со всеми остальными факторами.

- Интересующий нас единственный фактор мы называем *измеряемой величиной*.
- Мы требуем от СИ, чтобы оно выделило эту единственную измеряемую величину и "отстроилось" от всех других факторов, которые именуют *влияющими, мешающими или помехами*.

Естественно, что в таких условиях СИ наряду с чувствительностью к измеряемой величине неминуемо имеет чувствительность к неизмеряемым, влияющим величинам.

Прежде всего, это:

- ✓ *температура,*
- ✓ *вибрации,*
- ✓ *пульсации напряжения и др.*



РАЗНОВИДНОСТИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

При аттестации (градуировке, тарировании, поверке, проверке) СИ все значения влияющих величин поддерживают в узких пределах изменения.

- Эти условия, оговоренные в технической документации, принято называть — *нормальными*, а погрешность СИ в этих условиях — *основной погрешностью*.

Внимание! В эксплуатационных условиях пределы изменения влияющих величин существенно шире.

Изменения показаний СИ вследствие отклонения условий эксплуатации от нормальных называют *дополнительными погрешностями* и нормируют с указанием *коэффициента влияния* изменения отдельных влияющих величин на изменение показаний.

Например, в виде:

$$\psi_{\Theta} \% / 10\text{К} \quad \psi_U (10\% \Delta U / U)$$

В общем случае функции влияния нелинейные, однако, для простоты вычислений дополнительные погрешности определяют в виде:

где ψ - коэффициент влияния, $\Theta^{\text{доп}} = \psi \Delta \Theta$ - отклонение от нормальных условий.



РАЗНОВИДНОСТИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

- Погрешность СИ в реальных условиях эксплуатации называется эксплуатационной погрешностью и складывается из основной погрешности и всех дополнительных и может быть существенно больше основной погрешности.

Вывод: Таким образом, деление на основную и дополнительную погрешности чисто условно и оговаривается в технической документации на каждое СИ.

Статические и динамические погрешности, присущие как СИ, так и методам измерений, различают по их зависимости от скорости изменения измеряемой величины во времени.

- Погрешности, не зависящие от скорости, называют статическими.
- Погрешности, отсутствующие при скорости близкой к нулю и возрастающие по мере отклонения от нуля называют динамическими.
- Систематическими называют погрешности, не изменяющиеся с течением времени (включая знак) или являющимися не изменяющимися во времени функциями определенных параметров.

Замечание: Основной признак таких погрешностей их предсказуемость и возможность устранения введением соответствующих поправок.

РАЗНОВИДНОСТИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Внимание! Особая опасность *постоянных систематических* погрешностей - трудность их обнаружения, т.к. внешне они себя никак не проявляют и могут долгое время оставаться незамеченными.

Вывод: Единственный способ их обнаружения – в поверке СИ путем повторной аттестации по образцовым мерам и сигналам.

Внимание! Примером систематических погрешностей служит большинство дополнительных погрешностей, являющихся неизменяющимися во времени функциями, вызывающих их влияющих величин (температура, частота, напряжение и т.д.).

• **Прогрессирующими (дрейфовыми)** называют непредсказуемые погрешности, медленно изменяющиеся во времени. Как правило, они вызваны процессами старения, остаточной и усталостной деформации.

Внимание! Их особенностью является возможность корректировки путем введения поправок лишь в заданный момент времени, а далее их влияние вновь непредсказуемо возрастает.

Вывод: В отличие от систематических, где требуется разовая корректировка, прогрессирующие требуют непрерывного (периодического) коррекции.

Внимание! Изменение прогрессивных погрешностей во времени представляет собой нестационарный случайный процесс и в рамках стационарной теории описываются лишь с оговорками!!!

РАЗНОВИДНОСТИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

- Случайными погрешностями называют непредсказуемые ни по знаку, ни по значению (либо недостаточно изученные) погрешности.

Они определяются совокупностью причин, трудно поддающихся анализу. Присутствие случайных погрешностей (в отличие от систематических) легко обнаруживается при повторных измерениях в виде некоторого разброса полученных результатов.

Внимание! Главной отличительной особенностью этих погрешностей является их *непредсказуемость* от одного отсчета к другому. Поэтому описание случайных погрешностей может быть осуществлено *только* на основе теории вероятностей и математической статистики!!!

Замечания: Применение "обычных" методов математической статистики к обработке результатов измерений правомерно лишь в предположении о независимости между собой отдельных полученных отсчетов.

Большинство "обычных" формул теории вероятностей и математической статистики правомерно только для непрерывных распределений, в то время как распределения погрешностей из-за квантования строго говоря всегда дискретны.

Вывод: Таким образом, условия непрерывности и независимости для случайных погрешностей ~~соблюдаются приближенно, а иногда могут и не соблюдаться, т. е.~~ термин "непрерывная случайная величина" в математике является более узким, оговоренным рядом условий понятием, чем термин "случайная погрешность" в измерительной технике.

РАЗНОВИДНОСТИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Тем не менее, большинство составляющих погрешностей СИ, методов измерений и результатов измерений действительно являются случайными погрешностями, и единственным возможным разработанным способом их описания является использование теории вероятностей и математической статистики и их дальнейшее развитие применительно к процессам передачи информации обработки результатов и планирования эксперимента.

Внимание! Именно эта группа фундаментальных разделов математики является основой современной теории оценок погрешностей средств, процессов и результатов измерений.

Вывод: С учетом указанных замечаний процесс проявления случайных погрешностей средств и результатов измерений (за вычетом систематических и прогрессирующих погрешностей) может рассматриваться как стационарный случайный процесс с использованием для его описания теории статистически независимых случайных величин и стационарных случайных процессов.

Замечание: Деление на систематические, прогрессирующие и случайные погрешности является упрощенным приемом их анализа. В реальности они проявляются совместно, образуя единый нестационарный случайный процесс.

РАЗНОВИДНОСТИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Погрешности адекватности, градуировки и воспроизводимости СИ

Присутствие погрешностей приводит к неоднозначности характеристики СИ. При их экспериментальном определении (градуировке) получается лишь ряд точек, через которые проводят плавную среднюю кривую, которую и принимают за характеристику СИ, хотя некоторые экспериментальные точки от нее отклоняются. Для наименования этих отклонений используют ряд терминов.

- **Погрешностью адекватности** выбранной функциональной зависимости в общем случае называют систематически наблюдающиеся отклонения между выбранной в качестве характеристики плавной кривой и фактической характеристикой СИ.
- Если в качестве характеристики выбрана прямая, то погрешность адекватности называют **погрешностью линейности** СИ.
- Если погрешность адекватности имеет свой знак в зависимости от направления отсчета измерения, то такую погрешность называют погрешностью от *гистерезиса* или *вариацией* СИ.

Погрешности СИ могут быть обусловлены недостаточной точностью образцовых мер (**погрешность меры**) и СИ, используемых при градуировке.

Вывод: Вызывая систематические погрешности этот случай очень опасный т.к. связан с огромными объемами брака. Поэтому законодательная метрология требует, чтобы погрешность образцовых средств измерения была не более 1/3 погрешности градуируемых СИ.

РАЗНОВИДНОСТИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Если причины погрешности градуировки являются случайные погрешности градуируемого и образцового **СИ**, а также самого метода градуировки, то при градуировке будут возникать, неповторяющиеся от отметки к отметке погрешности в их расположении.

В этом случае возникающая погрешность **СИ** может быть отнесена к систематической, т.к. нанесенные точки сохраняются на протяжении всего срока службы и устраняются путем внесения соответствующих поправок.

Это так если **СИ** придается график поправок, но если его нет или он не используется, то погрешность является случайной. Для шкалы в целом она является случайной и указывается в паспорте **СИ** и используется при измерениях.

- Все эти погрешности (случайные и систематические) объединяют термином погрешность градуировки.
- Под термином погрешность воспроизводимости СИ обычно понимают погрешности, возникающие при повторных измерениях одной и той же величины в различных условиях (различные моменты времени или в различных местах, различными **СИ**, различными методами и операторами).

Замечание: Природа этих погрешностей многообразна и сложна и как правило плохо исследована, поэтому их обычно относят к случайным погрешностям.

ЛЕКЦИЯ 3. ПОНЯТИЯ ПОЛОСЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ, РЕАЛЬНОЙ И НОМИНАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИК СИ

Все перечисленные выше причины приводят к тому, что многократно снятые характеристики СИ или серии однотипных СИ занимают на графике некоторую полосу.

В результате в теории измерений вводится понятие **полосы неопределенности**, или **полосы погрешностей** данного типа или данного экземпляра СИ измерительного канала измерительно-информационной системы (ИИС) или измерительно-вычислительного комплекса (ИВК).

Некоторая детерминированная средняя линия этой полосы принимается за номинальную характеристику СИ данного типа, указывается в паспорте и используется для определения РИ.

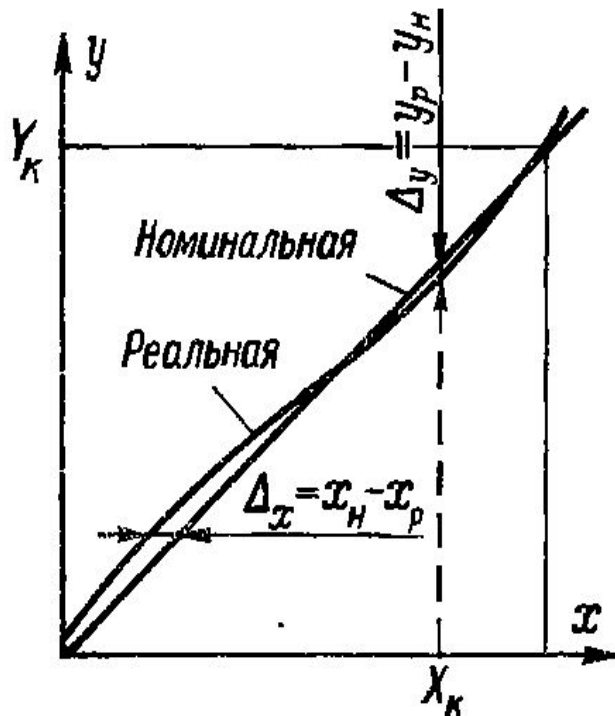
Вывод: Отсюда погрешность данного СИ, ИИС или ИВК – есть разность между реальной и номинальной его характеристиками, т.е. не число, а функция измеряемой величины.

Абсолютная, относительная и приведенная погрешности СИ

Разности между реальными и номинальными характеристиками найденные при заданном значении x в виде $\Delta_y = y_p - y_n$ или при заданном значении y в виде $\Delta_x = x_n - x_p$, суть **абсолютные** погрешности т.к. они выражаются в единицах величин x и y .

АБСОЛЮТНАЯ, ОТНОСИТЕЛЬНАЯ И ПРИВЕДЕННАЯ ПОГРЕШНОСТИ СИ

Знак абсолютной погрешности принимают положительным, если реальная характеристика проходит *выше* номинальной.



Внимание! Абсолютная погрешность не может служить сама по себе показателем точности измерений, т.к. одно и то же ее значение, в одних условиях соответствует достаточно высокой точности, а в других низкой.

Вывод: Поэтому для характеристики точности результатов измерения вводится понятие относительной погрешности

$$\gamma = \Delta_x / x \approx \Delta_y / y$$

выражаемой в относительных единицах или в процентах (где x и y - текущие значения входной и выходной величин СИ или преобразователя).

Замечание: Но эта очень наглядная характеристика точности **РИ** не годится для нормирования **СИ**, т.к. при различных значениях принимает различные значения вплоть до при $x=0$. Поэтому для указания и нормирования погрешности **СИ** используется еще одна разновидность погрешности, а именно так называемая приведенная погрешность.

АБСОЛЮТНАЯ, ОТНОСИТЕЛЬНАЯ И ПРИВЕДЕННАЯ ПОГРЕШНОСТИ СИ

Приведенная погрешность определяется как отношение абсолютной погрешности, выраженной в единицах Δ_x или Δ_y , к протяженности диапазона измерений X_K или Y_K СИ или преобразователя и выражается в относительных единицах или процентах, т.е.

$$\gamma_{пр} = \Delta_x / X_K \approx \Delta_y / Y_K$$

Вывод: Основное отличие приведенной погрешности от относительной погрешности состоит в том, что Δ_x или Δ_y относится не к переменной текущей величине x или y , а к постоянной величине протяженности диапазона X_K или Y_K .

Внимание! Приведенная погрешность удобна тем, что для многопредельных СИ она имеет одно и то же значение, как для всех точек каждого поддиапазона, так и для всех его поддиапазонов, т.е. ее очень удобно использовать для нормирования свойств СИ.

Замечание: Понятия абсолютной, относительной и приведенной погрешностей существующими стандартами установлены только для СИ, но их удобно использовать и при характеристике погрешностей результатов измерений.

АБСОЛЮТНАЯ, ОТНОСИТЕЛЬНАЯ И ПРИВЕДЕННАЯ ПОГРЕШНОСТИ СИ

Пример: Широко используемый в математической статистике показатель тесноты группирования экспериментальных точек вокруг определенной функциональной зависимости в виде коэффициента множественной корреляции ρ по смыслу есть полный аналог понятия приведенной погрешности лишь с той разницей, что он отсчитывается "с другой стороны".

Вывод: Поэтому сумма ρ^2 и γ^2 равна единице. Правда, из-за несколько разного определения этих понятий погрешности это соотношение имеет вид:

$$\rho^2 + 3\gamma^2 = 1, \text{ т.е. } \rho^2 = 1 - 3\gamma^2 \text{ или } \gamma^2 = (1 - \rho^2)/3$$

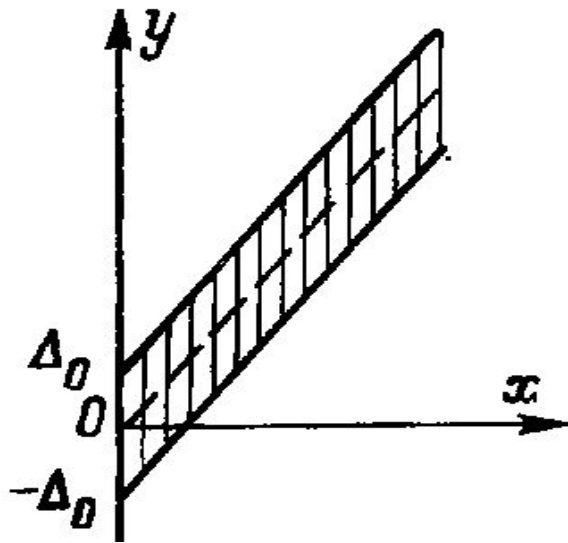
Внимание!!! Для границы применения МНК $\rho < 0,96$, $\rho^2 < 0,92$ имеем $\gamma > 0,16$

Практический вывод: При представлении экспериментальных результатов в графическом виде на рисунках в обязательном порядке должны быть представлены не только выражения для регрессионных зависимостей, но и величины квадрата коэффициента множественной корреляции ρ , а также планки погрешностей.

ПОГРЕШНОСТИ

Термины аддитивные и мультипликативные погрешности служат для описания формы границ полосы погрешностей СИ.

При поверке или градуировке СИ получают ряд значений входной величины x_i и ряд соответствующих значений выходной величины y_i . Если эти данные нанести на график с координатами XOY , то полученные точки разместятся в границах некоторой полосы.



В том случае, когда эти точки лежат в границах линий параллельных друг другу, т.е. абсолютная погрешность СИ во всем диапазоне измерений ограничена **постоянным** (не зависящим от текущего значения x) пределом $\pm\Delta_0$, то такая погрешность называется **аддитивной**, т.е. получаемой путем сложения, или **погрешностью нуля**.

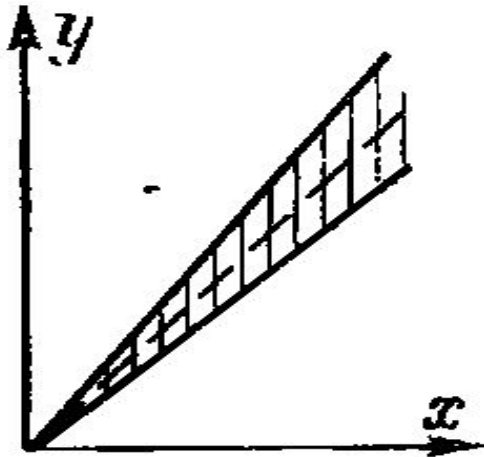
Внимание! Это понятие применимо как к случайным, так и к систематическим погрешностям.

Примерами систематических аддитивных погрешностей являются погрешности от постороннего груза на чашке весов, от неточной установки прибора на нуль перед измерением и т.п.

ПОГРЕШНОСТИ

Примерами случайных аддитивных погрешностей являются наводки ЭДС на входе прибора, тепловые шумы, трение, погрешность порога трогания и т.п.

Пример устранения систематических аддитивных погрешностей – корректор нуля (механическое или электрическое устройство для установки нуля).

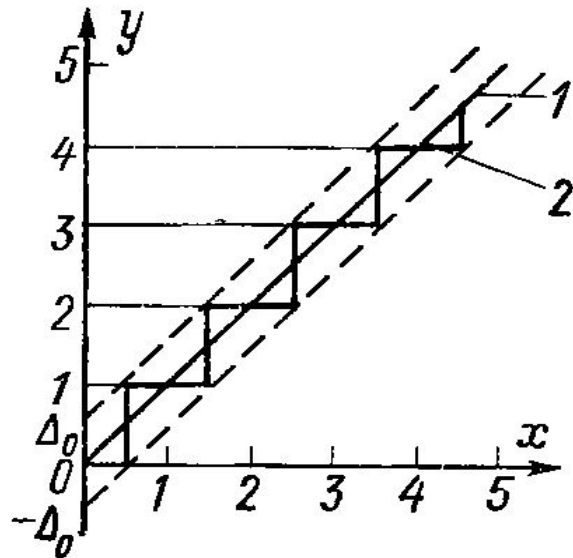


Если же ширина границ погрешностей возрастает пропорционально росту входной величины x , а при $x=0$ также равна **нулю**, то такая погрешность называется мультипликативной, т.е. полученной путем умножения, или **погрешностью чувствительности**. вне зависимости от того, является ли эта погрешность случайной или систематической.

Причины этой погрешности – изменение коэффициента усиления в усилителе, изменение жесткости мембраны в манометре или пружинке прибора, изменение опорного напряжения в вольтметре и т.п.



ПОГРЕШНОСТЬ КВАНТОВАНИЯ



Погрешность квантования — специальная разновидность погрешности, возникающая в цифровых приборах и дискретных преобразователях.

При плавном изменении входной величины (например от 0 до 5 мВ) цифровой вольтметр с пределом 1000 мВ не может дать других показаний, кроме дискретных 0-1-2-3-4 и 5 мВ. Поэтому при возрастании x от 0 до 0,5 В прибор (при хорошей регулировке) показывает $x=0$. При превышении значения 0,5 В он показывает $x=1$ и сохраняет его до $x=1,5$ и т.д.

Поэтому, хотя его номинальной характеристикой мы считаем прямую **1**, его реальная характеристика — ступенчатая **2**. Текущая разность номинальной **1** и реальной **2** характеристик и составляет **погрешность квантования**.

Полоса погрешностей квантования (штриховые прямые) сохраняет постоянную ширину и аналогична полосе аддитивных погрешностей. Вследствие того, что измеряемая величина x случайным образом может принимать любые промежуточные значения, погрешность квантования также случайным образом принимает значения от $+\Delta_0$ до $-\Delta_0$.

Вывод: Погрешность квантования является случайной аддитивной статистической погрешностью, т.к. не зависит от текущего значения результата измерения величины x , ни от скорости изменения x во времени.

СИ

Различные СИ обладают погрешностями, характер проявления которых может быть весьма разнообразным: у одних погрешность практически аддитивная или мультипликативная, у других аддитивная и мультипликативная, у третьих еще более сложная.

Замечание: У каждого СИ имеется случайная и систематическая составляющие погрешности, причем соотношение между составляющими может быть различным.

Внимание! Условия работы однотипных СИ могут существенно различаться.

Вывод: Для того чтобы ориентироваться в метрологических свойствах конкретного СИ, чтобы заранее оценить погрешность, которую вносит данное СИ в результат, пользуются нормированными значениями погрешности.

Под нормированным значением понимаются погрешности, являющиеся предельными для данного типа СИ.

Замечание: Погрешности отдельных экземпляров СИ одного и того же типа могут отличаться друг от друга, как по систематической, так и случайной составляющей, однако в целом для этого типа СИ они не превосходят гарантированного значения.

Вывод: Нормируется основная и дополнительные погрешности. Именно эти границы *основной погрешности*, а также *коэффициентов влияния* и заносятся в паспорт каждого экземпляра СИ.

МЕТОДЫ НОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СИ

Правила, согласно которым назначаются эти границы, значения погрешностей и форма записи, т.е. вся процедура нормирования погрешностей СИ, основываются на *системе стандартов, обеспечивающих единство измерений*.

Класс точности СИ – характеристика, определяющая гарантированные границы значений основных и дополнительных погрешностей, а также других свойств СИ, влияющих на точность. Соответствующие погрешности СИ, приписанному им классу точности во время эксплуатации проверяются при *периодических поверках*. Если погрешность оказывается меньше нормированной СИ продолжают эксплуатировать, если нет СИ *ремонтуют и регулируют*.

Практический вывод: При проведении любых экспериментальных исследований, наличие паспортов СИ с отметками об их поверках и проверках является обязательным. В противном случае СИ может рассматриваться только как индикатор.

Справочно: *Индикатор* – устройство или вещество для установления существования входного сигнала и/или определения его значения без указания погрешности.

Внимание! Основные способы установления пределов допустимых погрешностей и обозначения классов точности СИ были установлены ГОСТ 8.401-80.

МЕТОДЫ НОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СИ

Основная погрешность СИ нормируется *четырьмя* различными способами.

Замечание: Чтобы уяснить эти различия и грамотно использовать нормируемые значения при расчете РИ, необходимо рассмотреть характер изменения относительной и абсолютной погрешности СИ в диапазоне измеряемой величины и обусловленные этим положения стандартов, регламентирующих нормирование погрешностей средств измерений.

Внимание! Основное различие в способах нормирования обусловлено разным соотношением аддитивной и мультипликативной составляющих погрешностей тех или иных СИ.

При чисто мультипликативной погрешности СИ абсолютная погрешность $\Delta(x)$ возрастает прямо пропорционально текущему значению измеряемой величины. Поэтому относительная погрешность, т.е. погрешность чувствительности такого преобразователя,

$$\gamma_s = \Delta(x)/x$$

оказывается постоянной величиной при любом значении x и ее удобно использовать для нормирования погрешностей такого преобразования и указания его класса точности.

Замечание: Таким способом нормируются погрешности масштабных преобразователей (делителей напряжения, шунтов, измерительных трансформаторов тока и напряжения, пружинных преобразователей и т.п.).

МЕТОДЫ НОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СИ

Вывод: В этом случае класс точности СИ указывается в виде значения γ_s , выраженного в процентах.

Граница относительной погрешности РИ $\gamma(x)$ в этом случае постоянна и при любом x просто равна значению γ_s , а абсолютная погрешность РИ рассчитывается по формуле

$$\Delta(x) = \gamma_s x$$

Замечание: Если бы эти соотношения оставались справедливыми для всего диапазона от 0 до X_K (где X_K – предел диапазона измерений), то такие СИ были бы наиболее совершенными, т.к. имели бы бесконечно широкий рабочий диапазон, т.е. обеспечивали бы измерения сколь угодно малых значений x с той же погрешностью.

Внимание! Однако реально таких преобразователей не существует. Всегда присутствует аддитивная погрешность из-за шумов, дрейфа, трения наводок, вибрации и т.п.

Вывод: Поэтому для реальных СИ, погрешность которых нормируется одним числом – погрешностью чувствительности γ_s – всегда указывают границы рабочего диапазона, в которых эта оценка приближенно справедлива.

МЕТОДЫ НОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СИ

При чисто аддитивной полосе погрешностей граница абсолютной погрешности нуля $\Delta(x)=\Delta_0=\text{const}$ остается неизменной для любых значений x .

Но нормировать абсолютное значение Δ_0 неудобно, т.к. для много предельных СИ оно бывает различным для каждого поддиапазона и в паспорте пришлось бы указывать эти значения для каждого из поддиапазонов.

Вывод: Поэтому нормируется не абсолютное значение Δ_0 , а приведенное значение этой погрешности:

$$\gamma_0 = \Delta_0 / X_N$$

где X_N - нормирующее значение измеряемой величины.

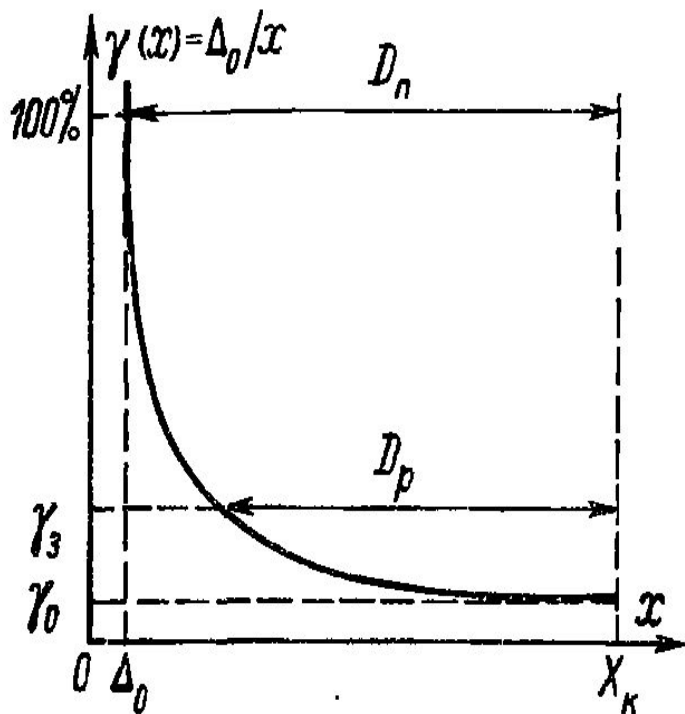
Замечание: ГОСТ 8.401-80 определяет для приборов с равномерной или степенной шкалой, если нулевая отметка находится на краю или вне шкалы, нормирующее значение X_N равным верхнему пределу измерений. Если же нулевая отметка находится посередине шкалы, то нормирующее значение X_N принимают равным всей протяженности диапазона измерений.

Пример: для прибора со шкалой от -30 до +60 ед. $X_N = 60 - (-30) = 90$ ед.

Внимание! Значение приведенной погрешности γ_0 , выраженное в процентах используется для обозначения класса точности таких СИ.

МЕТОДЫ НОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СИ

Внимание! Грубейшая ошибка считать, что для прибора с классом точности 1,0 относительная погрешность **РИ** составляет $\pm 1\%$.



В действительности текущее значение относительной погрешности $\gamma(x) = \Delta_0/x$, т.е. растет обратно пропорционально x и изменяется по гиперболе.

Вывод: Относительная погрешность $\gamma(x)$ равна классу прибора γ_0 только на последней отметке шкалы (при $x = X_K$). При $x = 0,1X_K$, она в 10 раз больше γ_0 , а при дальнейшем уменьшении x стремится к бесконечности.

При уменьшении измеряемой величины x до значения абсолютной погрешности нуля Δ_0 относительная погрешность **РИ** достигает:

$$\gamma_ч = \gamma(x) = \Delta_0 / x = \Delta_0 / \Delta_0 = 1 = 100\%$$

Такое значение измеряемой величины, когда $x = \Delta_0$ и $\gamma(x) = 100\%$, называют **порогом чувствительности СИ**.

МЕТОДЫ НОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СИ

Вывод: *Полный диапазон D_n измеряемых величин* для любого СИ ограничивается снизу порогом чувствительности (стрелка СИ всегда отстает от упора), а сверху – пределом измерений.

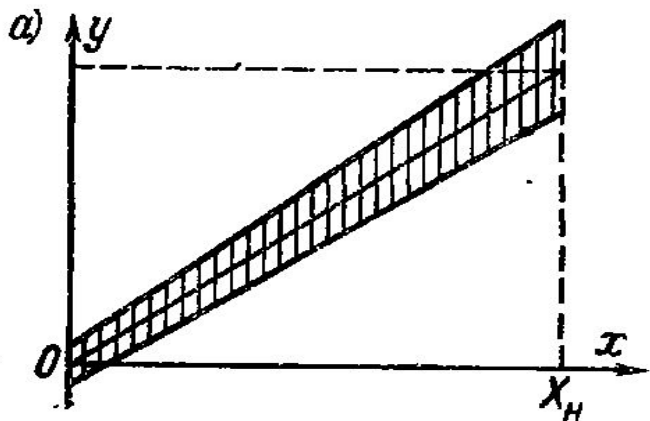
Так как в области малых значений x погрешностей измерений очень велика, то *рабочий диапазон D_p* ограничивают снизу таким значением x , где относительная погрешность измерений не превосходит некоторого заданного значения γ_z (например, 4, 10, 20 или 25%).

Вывод: Рабочий диапазон СИ назначается достаточно произвольно, и составляет только некоторую часть полного диапазона СИ.

Внимание! В начальной части шкалы измерения недопустимы, в чем и заключается отрицательное влияние аддитивной погрешности, не позволяющее использовать СИ для измерения как больших, так и малых значений.

Практический вывод: В случае регистрации давлений с помощью манометров при отсутствии значительных пульсаций измерения следует производить вне первой четверти шкалы СИ, при наличии существенных пульсаций давления – вне первой трети шкалы СИ.

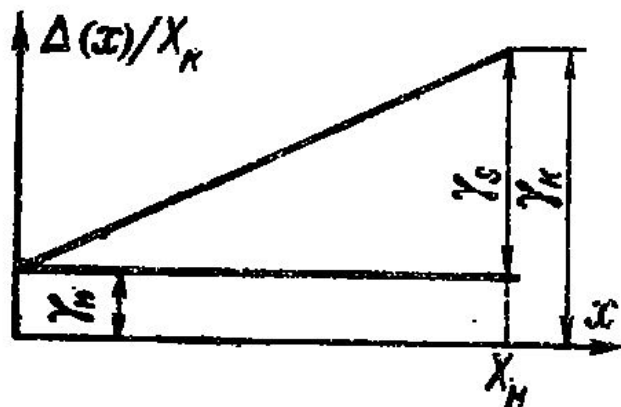
При одновременном присутствии как аддитивной, так и мультипликативной составляющих полоса погрешностей имеет трапециевидальную форму.



Текущее значение абсолютной погрешности в функции измеряемой величины $\Delta(x)$ описывается соотношением:

$$(1-1)$$

где Δ_0 - аддитивная, $\gamma_s x$ - мультипликативная составляющие абсолютной погрешности.



Если все члены (1-1) разделить на предел измерений X_K , то для приведенного значения погрешности получим:

$$(1-2)$$

$$\gamma_{пр}(x) = \frac{\Delta(x)}{X_K} = \frac{\Delta_0}{X_K} + \gamma_s \frac{x}{X_K}$$

Приведенное значение погрешности в начале диапазона (при $x=0$) обозначим через $\gamma_H = \Delta_0 / X_K$

Тогда (1-2) принимает вид:

$$\gamma_{пр}(x) = \frac{\Delta(x)}{X_K} = \frac{\Delta_0}{X_K} + \gamma_s \frac{x}{X_K} = \gamma_H + \gamma_s \frac{x}{X_K}$$

Вывод: При наличии у СИ и аддитивной и мультипликативной составляющих погрешностей его приведенная погрешность линейно возрастает от $\gamma_H = \Delta_0 / X_K$ в начале диапазона (при $x=0$) до значения $\gamma_K = \gamma_H + \gamma_s$ в конце диапазона (при $x=X_K$)

МЕТОДЫ НОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СИ

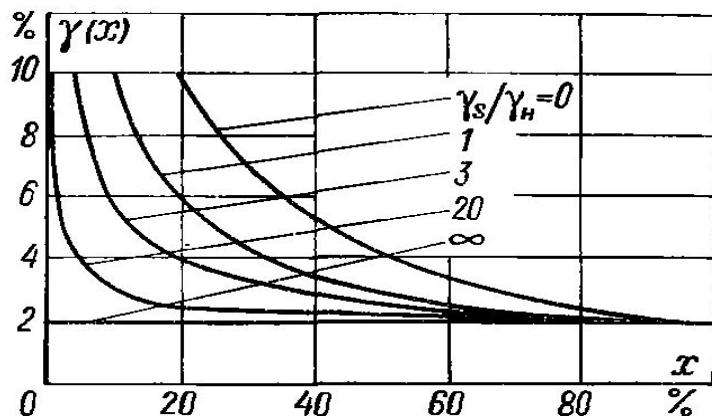
Относительная погрешность **РИ** согласно (1-1) составляет:

$$\gamma(x) = \frac{\Delta(x)}{x} = \frac{\Delta_0}{x} + \gamma_s = \gamma_n \frac{X_k}{x} + \gamma_s \quad (1-3)$$

т.е. при $x=X_k$ она равна $\gamma(x) = \gamma_k = \gamma_n + \gamma_s$, а по мере уменьшения x возрастает до бесконечности.

Внимание! Отличие $\gamma(x)$ от чисто аддитивной погрешности состоит в том, что заметное возрастание $\gamma(x)$ начинается тем позже, чем меньше γ_n по сравнению с γ_s .

Пример: Изображенные на рисунке кривые $\gamma(x)$ при уменьшении x при различных γ_s/γ_n для частного случая $\gamma_k = \gamma_n + \gamma_s = 2\% = \text{const}$ наглядно показывают, расширение рабочего диапазона **СИ** по мере увеличения отношения γ_s/γ_n , т.е. уменьшения Δ_0 и приближения полосы погрешностей к чисто мультипликативной полосе.



Если заданное значение погрешности γ_s , ограничивающее нижнюю границу рабочего диапазона, принять в нашем примере $\gamma_s = 4\%$, то при $\gamma_s/\gamma_n = 0$ рабочий диапазон будет двукратным (от 50 до 100%); $\gamma_s/\gamma_n = 3$ рабочий диапазон будет пятикратным (от 20 до 100%); $\gamma_s/\gamma_n = 20$ рабочий диапазон будет двадцатикратным (от 5 до 100%).

Практический вывод: Такой вид погрешностей обычно имеют высокоточные электронные приборы (потенциометры постоянного тока, цифровые вольтметры и т.д.). Формальным отличительным признаком для них является запись класса точности (по ГОСТ 8.401-80) в виде условной дроби, через косую черту (двух чисел) γ_k/γ_n - погрешности в конце диапазона измерений и в нуле диапазона.

МЕТОДЫ НОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СИ

Специальные формы нормирования погрешностей СИ

Кроме указанных выше разновидностей нормирования погрешностей СИ (путем указания классов точности в виде: $\gamma_s, \gamma_0, \gamma_k/\gamma_n$) ГОСТ 8.401-80 разрешает использовать специальные формы нормирования погрешностей.

Замечание: Ряд СИ не могут быть нормированы описанными выше способами, т. к. имеют более сложный вид полосы погрешностей.

Пример: Цифровые частотомеры, мосты для измерения сопротивлений и т.п. имеют более сложные формы полосы погрешностей, как правило, нелинейного типа. Эти приборы отличаются тем, что имеют не только нижний, но и верхний порог чувствительности, когда погрешность достигает 100%.

В этом случае погрешность **РИ** описывается трехчленной формулой вида:

(1-4)

где Δ_∞ Δ_0 - верхний и нижний пороги измеряемых величин.

$$\gamma(x) = \frac{\Delta(x)}{x} = \frac{\Delta_0}{x} + \gamma_0 + x/\Delta_\infty$$

Вывод: Во всех случаях необходимо внимательно изучать документацию на соответствующее СИ и использовать для вычисления РИ измерений соответствующие зависимости. В противном случае, мы имеем дело с индикатором !!!

МЕТОДЫ НОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СИ

Обозначения классов точности СИ

Согласно ГОСТ 8.401-80 для указания нормированных значений погрешности чувствительности γ_s , приведенной аддитивной погрешности γ_0 , приведенных погрешностей в начале γ_n и конце γ_k диапазона измерений не могут использоваться произвольные числа. Выраженные в %, они могут иметь значения 6 – 4 – 2,5 – 1,5 – 1,0 – 0,5 – 0,2 – 0,1 – 0,05 – 0,02 – 0,01 – 0,005 – 0,002 – 0,001 и т.д. Значение класса прибора маркируется на его шкале.

Для того чтобы различать, какая из погрешностей обозначена в качестве класса точности, используются следующие *условные обозначения*:

1. Если класс точности СИ установлен по значению погрешности чувствительности γ_s (форма условно принята чисто мультипликативной), обозначенное на шкале значение класса точности обводится кружком $\gamma_s = 1,5\%$ 1,5
2. Если полоса погрешностей принята аддитивной и погрешность СИ нормируется приведенной погрешностью нуля γ_0 (таких СИ большинство), то класс точности указывается без каких-либо подчеркиваний, просто 1,5
3. На СИ с резко неравномерной шкалой (омметры), класс СИ указывается в долях от длины шкалы и обозначается внутри "галки" 1,5
4. Обозначение класса точности в виде условной дроби 0,02/0,01 означает, что погрешность СИ нормирована по двучленной формуле с $\gamma_n = 0,01\%$ $\gamma_k = 0,02\%$

Вывод: Обозначение класса СИ дает достаточно полную информацию для вычисления приближенной оценки погрешностей РИ.

МЕТОДЫ НОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СИ

Практические замечания по использованию нормированных погрешностей СИ

ГОСТ 8.401-80 был направлен на единообразие нормирования СИ.

Замечание: Однако в измерительной технике такого единообразия до сих пор нет, т.к. есть более старые СИ.

Внимание! СИ иностранного производства и т.д., которые не удовлетворяют требованиям стандарта.

Пример: Высокоточные потенциометры постоянного тока чаще всего нормируются двучленной формулой (1-1), а класс точности прибора указывают одним числом – относительной погрешностью чувствительности.

Внимание! В этом случае указание класса точности в виде γ_s не является признаком отсутствия аддитивной погрешности.

Вывод: Нужно быть внимательным при изучении паспортных данных, чтобы не допустить ошибки в оценке РИ.

Замечание: При нормировании сложных СИ двучленной формулой (1-3) ГОСТ 8.401-80 предусматривал несколько иное её написание, когда текущее значение погрешности $\gamma(x)$ выражается не через значение аддитивной γ_n и мультипликативной γ_s составляющих предела допустимых погрешностей, а через указанные в обозначении класса точности приведенные погрешности в начале γ_n и в конце γ_k диапазона измерений.

В этом случае, учитывая что $\gamma_k = \gamma_n + \gamma_s$, соотношение (1-3) принимает вид:

$$\gamma(x) = \gamma_k + \gamma_n \left(\frac{X_k}{x} - 1 \right) \quad (1-5)$$

МЕТОДЫ НОРМИРОВАНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ СИ

Замечание: Практически соотношением (1-5) более удобно пользоваться для вычисления γ (x) по известным x , X_K , γ_n и γ_k , чем соотношением (1-3).

У широкодиапазонных СИ (мосты) весьма часто вместо (1-4) указывают диапазон измерений и его предельную погрешность. Однако и в этом случае можно произвести пересчет и возврат к (1-4).

Пример: Пусть относительная погрешность не превосходит:

- ✓ 0,5% в диапазоне от 10^2 до 10^4 Ом;
- ✓ 1% в диапазоне от 5 до 10^5 Ом;
- ✓ 5% в диапазоне от 0,5 до 10^6 Ом;
- ✓ 10% в диапазоне от 0,2 до $2 \cdot 10^6$ Ом;
- ✓ 20% в диапазоне от 0,1 до $4 \cdot 10^6$ Ом.

Эти данные достаточно точно соответствуют трехчленной формуле (1-4), по ним можно определить коэффициенты Δ_∞ , Δ_0 и γ_s этой формулы и использовать ее для аналитического определения при любом произвольном значении x .

Так, приведенным выше данным соответствует:

$$\Delta_0 = 0,02 \text{ Ом}, \Delta_\infty = 20 \cdot 10^6 \text{ Ом и } \gamma_s = 0,5\%$$

В результате для любого x погрешность (в процентах) составляет:

$$\gamma(x) = 100 \cdot \left(\frac{0,02}{x} + \frac{0,5}{100} + \frac{x}{20 \cdot 10^6} \right)$$



ЛЕКЦИЯ 6. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РИ

Расчет оценки статической погрешности РИ по паспортным данным используемого СИ

Внимание! РИ имеет ценность лишь тогда, когда можно оценить его интервал неопределенности, т.е. степень достоверности.

Вывод: Согласно МИ 1317-2004 «Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления» сообщение о любом РИ обязательно должно сопровождаться указанием его погрешности!

Замечание: Погрешность результата прямого однократного измерения зависит от многих факторов, но в первую очередь определяется погрешностью используемого СИ.

Вывод: В первом приближении погрешность РИ можно принять равной погрешности, которой в данной точке диапазона характеризуется используемое СИ.

Замечание: Поскольку погрешности СИ изменяются в диапазоне измерений, должны производиться соответствующие вычисления по рассмотренным ранее формулам.

Вывод: В обязательном порядке вычисляется абсолютная и относительная погрешности, т.к. первая нужна для округления и правильной записи результата, а вторая – для однозначной сравнительной характеристики его точности.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РИ

Для различных характеристик погрешностей СИ эти вычисления производятся по-разному, поэтому рассмотрим три характерных случая:

1. Класс прибора указан в виде одного числа γ_s , заключенного в кружок (чисто мультипликативная составляющая погрешности). Тогда относительная погрешность РИ (в процентах)

$$\gamma(x) = \gamma_s,$$

а абсолютная

$$\Delta(x) = \gamma_s x/100$$

2. Класс прибора указан в виде одного числа γ_0 , (без кружка) (чисто аддитивная погрешность). Тогда абсолютная погрешность РИ:

$$\Delta(x) = \gamma_0 X_K/100$$

(X_K - предел измерений, на котором оно проводилось),

а относительная погрешность РИ (в процентах):

$$\gamma(x) = \frac{\Delta(x)}{x} = \gamma_0 \frac{X_K}{x} \quad (1-6)$$

Замечание: Здесь кроме отсчета измеряемой величины x , обязательно должен быть зафиксирован и предел измерения X_K , иначе нельзя вычислить погрешность РИ.

3. Класс прибора указан двумя числами в виде γ_k/γ_n .

В этом случае в начале вычисляется относительная погрешность по (1-5), а затем абсолютная как:

$$\Delta(x) = \gamma(x)x/100.$$

Замечание: Здесь также кроме отсчета измеряемой величины x , обязательно должен быть зафиксирован и предел измерения X_K , иначе нельзя вычислить погрешность РИ. Следует помнить о процентах в относительной погрешности и делить на сто в абсолютной.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РИ

Правила округления значений погрешности и результата измерений

Расчет значений погрешностей по формулам (1-5), (1-6) с использованием ПК дает величины с большим числом знаков.

Замечание: Однако исходными данными для расчета являются нормируемые значения погрешности СИ, которые указываются всего с одной или двумя значащими цифрами.

Вывод: В окончательном значении рассчитанной погрешности должны быть оставлены только первые одна-две значащие цифры.

Внимание! Если число начинается с цифр 1 или 2, то отбрасывание второго знака приводит к большой ошибке (до 30-50%), что недопустимо.

Если число начинается с цифры 9, то сохранение второго знака (0,94 вместо 0,9) является дезинформацией, т.к. исходные данные не обеспечивают такой точности.

Исходя из этого, на практике установилось **правило**:

Если полученное число начинается с цифры равной или большей, чем $10^{0,5} \approx 3$ то в нем сохраняется один знак, в противном случае (с цифр 1 или 2) – два знака.

Например, 1,5 % или 2,5%, но 0,5, 4, 6%.

Вывод: В итоге было сформулированы следующие три правила округления рассчитанных значений погрешности и полученного экспериментального результата измерений:

1. Погрешность результата измерения указывается двумя значащими цифрами, если первая из них 1 или 2, и одной – если первая 3 и более.

2. РИ округляется до того же десятичного разряда, которым оканчивается округление значения абсолютной погрешности.

3. Округление производится лишь в окончательном ответе, а все предварительные вычисления проводят с одним или двумя "лишними" знаками.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РИ

Пример: Вольтметр класса 2,5 с пределом 300 В, зафиксировал $x = 267,5\text{В}$.

Определяем абсолютную погрешность:

$$\Delta(x) = \frac{\gamma_0 X_K}{100} = \frac{2,5 \cdot 300}{100} = 7,5\text{В} \approx 8\text{В}$$

Относительная погрешность:

$$\gamma(x) = \frac{\Delta(x)}{x} = \gamma_0 \frac{X_K}{x} = \frac{7,5}{267,5} \cdot 100 = 2,81\% \approx 2,8\%$$

Замечание: Первая значащая цифра абсолютной погрешности > 3 , поэтому, согласно правилам, должно быть произведено округление до 8В, но в значении относительной погрешности первая значащая цифра < 3 , поэтому в ответе должны быть сохранены два десятичных разряда и указано 2,8%.

Результат: Измерение произведено с относительной погрешностью $\gamma(x)=2,8\%$, измеренное напряжение $x = (268 \pm 8)\text{В}$, или $268\text{В} \pm 8\text{В}$ или пределы неопределенности измеренной величины $x = 260 \div 276\text{В}$ или $260 < x < 276\text{В}$.

Замечание: Недостаток правила $10^{0,5}$ - скачек от округления относительной погрешности при переходе, например от числа **0,29** $(0,3 - 0,29)/0,3 = 3\%$ к числу **0,3** $(0,4 - 0,3)/0,3 = 30\%$.

Практический вывод: Для устранения скачка относительной погрешности округления предлагается каждую декаду округляемых значений делить на три части 0,1-0,2, 0,2-0,5 и 0,5-1, с шагом округления 0,02, 0,05 и 0,1. Получаем ряд: 0,1-0,12-...-0,2-0,25-0,3-...-0,5-0,6-...-1,0. с погрешностью округления 5 ... 10%. Однако в этом случае последние цифры результата после округления должны также соответствовать этому ряду.