Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н.Ульянова»

Выпуклые функции – определение. Понятие о точке перегиба, необходимое условие перегиба.

Выполнила: студентка 1 курса Наумова А.

Группа: ИИЯ-19

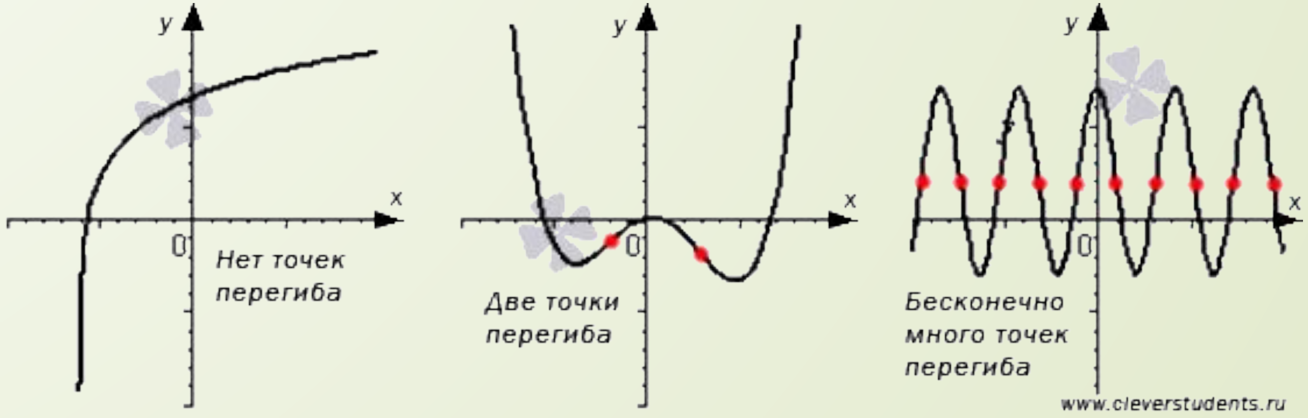
Преподаватель(проверила): Волкова Н.А.

Выпуклость графика функции.

- График дифференцируемой функции y=f(x) называется выпуклым вниз на интервале (a;b), если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале.
- График функции y=f(x) называется выпуклым вверх на интервале (a;b), если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.

Точка перегиба. Определение точки перегиба.

- Точкой перегиба называется точка графика непрерывной функции y=f(x), отделяющая его части разной выпуклости.
- Из этого определения следует, что точки перегиба — это точки точки экстремума первой производной.



Теорема: Если функция y=f(x) во всех точках интервала (a;b) имеет отрицательную вторую производную, т.е. f''(x)<0,то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же f''(x)>0 □x∈ (a;b)- график выпуклый вниз.

Доказательство. Пусть f''(x)<0 □x∈ (a;b).

1) Возьмем на графике функции произвольную точку M с абсциссой x_0 ∈ (a;b).

2) Проведем через точку M касательную.

3) Сравним в точке x∈ (a;b) ординату y кривой y=f(x) с ординатой y ее касательной.

$y_{кас} - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, т. е. $y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Тогда $y - y_{кас} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа, $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, где c лежит между x_0 и x. Поэтому

$$y - y_{кас} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

т. е.

$$y - y_{кас} = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Разность $f'(c) - f'(x_0)$ снова преобразуем по формуле Лагранжа:

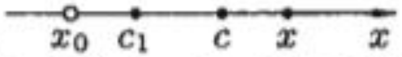
$$f'(c) - f'(x_0) = f''(c_1)(c - x_0),$$

где c_1 лежит между x_0 и c. Таким образом, получаем

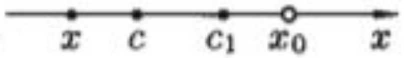
$$y - y_{кас} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0).$$

Исследуем это равенство:

1) если $x > x_0$, то $x - x_0 > 0$, $c - x_0 > 0$ и $f''(c_1) < 0$. Следовательно, $y - y_{кас} < 0$, т. е. $y < y_{кас}$:



2) если $x < x_0$, то $x - x_0 < 0$, $c - x_0 < 0$ и $f''(c_1) < 0$. Следовательно, $y - y_{кас} < 0$, т. е. $y < y_{кас}$:



Теорема(необходимое условие перегиба)

- Для того, чтобы точка x_0 являлась точкой перегиба дважды дифференцируемой функции $y=f(x)$, необходимо, чтобы ее вторая производная в этой точке равнялась нулю($f''(x_0)=0$) или не существовала.

- Если точка x_0-точка перегиба функции $f(x)$ и если $\exists f''(x)$ в некоторой окрестности точки x_0(непрерывная в точке x_0),то $f''(x_0)=0$.
- <u>Доказательство:</u>

Докажем методом от противного, т.е предположим, что $f''(x_0)\neq 0$. Тогда $f''(x_0)<0$ либо $f''(x_0)>0$.

По условию f'' непрерывна в точке $x_0 \rightarrow$ по свойству сохранения знака непрерывной функции получим :

$\exists \delta: \forall x \in U(\delta)\ (x_0)$, sign $f''(x)=$ sign $f''(x_0)$

т.е. по достаточному условию строгой выпуклости $f''(x)>0\ \forall x \in (a;b)$ (функция выпукла вниз) или $f''(x)<0\ \forall x \in (a;b)$(функция выпукла вверх).

Это противоречит определению точки перегиба, которое гласит, что при переходе через точку x_0 направление выпуклости меняется.