

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ»



Факультет «Городской кадастр»

Направление подготовки 120700.62

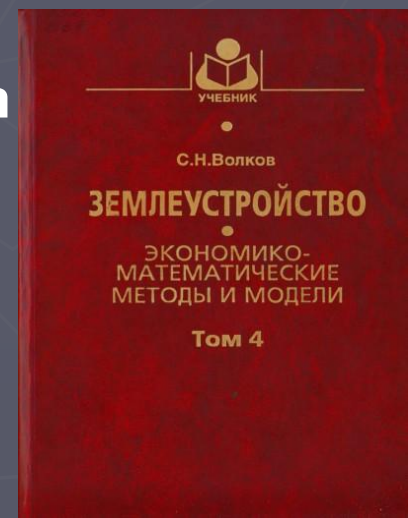
**«Землеустройство и кадастры»,
профиль «Городской кадастр»**

Кафедра «Землеустройство»

**Дисциплина «Экономико-математические методы и
моделирование»**

**Лекция 12. Экономический анализ и корректировка
оптимального решения**

**Лектор: доцент кафедры землеустройства,
к.э.н. Сорокина Ольга Анатольевна**



План лекции

1. Каноническая форма задачи
2. Виды дополнительных переменных
3. Оптимальный план задачи
4. Анализ оптимального решения
5. Корректурa оптимального плана

1. Естественная и каноническая формы задачи

Задача - Определение направления и площади застройки городских земель

- ▶ При разработке схемы генерального плана развития населенного пункта предполагаются различные виды и направления застройки земель.
- ▶ Учитывая ресурсы, выделяемые на строительство и соответствующие нормы затрат, необходимо определить оптимальное сочетание направлений и площади застройки населенного пункта.
- ▶ Критерий эффективности - чистый доход, получаемый от использования объектов недвижимости.

| Условия | Многоэтажные жилые здания, м2 | Малоэтажные жилые здания, м2 | Магазины, м2 | Складские помещения, м2 | Заправочные станции, м2 | Ресурсы населенного пункта |
|--|--------------------------------------|-------------------------------------|---------------------|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| Общая площадь выделяемых земель, га | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | Не менее 20,0 |
| Инвестиционные вложения на 1м2 площади, тыс. руб/м2 | 0,5 | 1,0 | 0,5 | 0,2 | 0,3 | 3000 |
| Трудовые затраты, чел.дн/м2 | 10 | 15 | 10 | 8 | 10 | 50000 |
| Площадь объектов, м2 | 100 | 300 | 1000 | 800 | 2000 | max |

1. Естественная и каноническая формы задачи

Основные переменные:

- ▶ X_1 – количество м² в жилых многоэтажных зданиях;
- ▶ X_2 – количество м² в жилых коттеджах;
- ▶ X_3 – площадь магазинов, м²;
- ▶ X_4 – площадь складских помещений, м²;
- ▶ X_5 – площадь под заправочными станциями, м².

1. Естественная и каноническая формы задачи

Ограничения:

- ▶ по площади выделяемых земель, га:

$$0,0001 * X_1 + 0,0001 * X_2 + 0,0001 * X_3 + 0,0001 * X_4 + 0,0001 * X_5 \geq 20$$

- ▶ по инвестиционным вложениям на 1м² площади, тыс. руб.

$$0,5 * X_1 + 1,0 * X_2 + 0,5 * X_3 + 0,2 * X_4 + 0,3 * X_5 \leq 3000$$

- ▶ по трудовым затратам на 1м², чел. дн.

$$10 * X_1 + 15 * X_2 + 10 * X_3 + 8 * X_4 + 10 * X_5 \leq 50000$$

1. Естественная и каноническая формы задачи

► Целевая функция:

$$Z = 100 * X_1 + 300 * X_2 + 1000 * X_3 + 800 * X_4 + 2000 * X_5 \longrightarrow \max$$

1. Естественная и каноническая формы задачи

- ▶ Далее следует перейти к канонической форме задачи, то есть от неравенств к уравнениям.
- ▶ Данный переход осуществляется путем введения дополнительных переменных в определенном порядке: избыточные, остаточные, искусственные.

2. Виды дополнительных переменных

- ▶ Избыточные переменные вводятся в ограничения типа \geq со знаком "-". Они показывают насколько левая часть неравенства превышает правую, а с экономической точки зрения, показывают - превышение плана.
- ▶ Избыточная переменная X_6 , вставляется в ограничение 1 со знаком "-"

2. Виды дополнительных переменных

1. по площади выделяемых земель, га:

$$0,0001 * X_1 + 0,0001 * X_2 + 0,0001 * X_3 + \\ 0,0001 * X_4 + 0,0001 * X_5 - X_6 = 20$$

X_6 – площадь дополнительно выделенных земель, га

2. Виды дополнительных переменных

- ▶ В ограничениях типа \leq к основным переменным добавляется остаточная переменная, она показывает насколько левая часть неравенства меньше правой, насколько ресурсы недоиспользуются.
- ▶ Остаточные переменные X_7, X_8 вставляются в ограничения 2, 3 со знаком "+".

2. Виды дополнительных переменных

2) по инвестиционным вложениям на 1м² площади, тыс. руб.

$$0,5 * X_1 + 1,0 * X_2 + 0,5 * X_3 + 0,2 * X_4 + 0,3 * X_5 + X_7 = 3000$$

3) по трудовым затратам на 1м², чел. дн.

$$10 * X_1 + 15 * X_2 + 10 * X_3 + 8 * X_4 + 10 * X_5 + X_8 = 50000$$

X_7 – недоиспользованные инвестиционные вложения, тыс. руб.

X_8 – недоиспользованные трудовые затраты на 1м², чел. дн.

2. Виды дополнительных переменных

- ▶ При решении задач с ограничениями типа \geq кроме дополнительных переменных вводят искусственные, с целью получения положительных значений базисных переменных.
- ▶ Искусственную переменную X_9 вставляют в ограничение 1 со знаком "+"

3. Оптимальный план задачи

- ▶ оптимальное решение находится в последней таблице результатов программы Симпл-Delphi

```

=====
14-я итерация.      M = 16,   Ni = 10,   N = 26,   N1 = 10
=====

```

На 8-й итерации понижена размерность задачи - исключены искусственные переменные.

Результаты решения симплексной задачи
(Максимизация целевой функции)

Z = 5.47201E+0002

```

=====
Ном. | базисные | Ном. | Aio | Коэфф. замещ. для некоторых небаз. перем.
ст- | пере- | огр. | (Значение |
ро- | менные | для | базисной | Ai2 | Ai4 | Ai11 | Ai13 | Ai15 | Ai22 | Ai24 |
ки | | | перем.) | (X2) | (X4) | (X11) | (X13) | (X15) | (X22) | (X24) |
i | Xjb | | | (осн.) | (осн.) | (изб. в | (изб. в | (ост. в | (ост. в | (ост. в |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
-----
1 | X7 (осн.) | - | 216.418 | -0.221 | 0.060 | 1.254 | 0.254 | 0.000 | 3.284 | -0.299 |
2 | X16 (ост.) | 2 | 145.672 | -0.084 | -0.061 | 0.015 | 0.015 | 0.000 | 0.134 | -0.194 |
3 | X17 (ост.) | 3 | 3400.000 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
4 | X18 (ост.) | 4 | 425.000 | -0.700 | 0.000 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
5 | X19 (ост.) | 5 | 2300.000 | 0.000 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
6 | X20 (ост.) | 6 | 682.463 | -0.973 | -1.791 | 0.388 | -0.612 | 0.000 | 1.493 | -1.045 |
7 | X21 (ост.) | 7 | 2698.790 | 0.110 | -0.030 | -0.627 | 0.373 | 0.000 | -1.642 | 0.149 |
8 | X14 (изб.) | 16 | 715.672 | -0.884 | 0.239 | 5.015 | 1.015 | 0.000 | 13.134 | -1.194 |
9 | X23 (ост.) | 9 | 1160.260 | 0.302 | -1.463 | -0.416 | -0.016 | 0.000 | -2.448 | -0.687 |
10 | X3 (осн.) | - | 25.000 | 0.700 | 0.000 | -1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
11 | X10 (осн.) | - | 935.075 | -0.654 | -1.418 | -2.776 | 0.224 | -1.000 | -2.985 | 2.090 |
12 | X12 (изб.) | 14 | 820.149 | 3.893 | 7.164 | -1.552 | 2.448 | 0.000 | -5.970 | 4.179 |
13 | X8 (осн.) | - | 5.000 | -0.960 | 0.000 | -0.200 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -1.000 |
14 | X5 (осн.) | - | 292.537 | 0.973 | 1.791 | -0.388 | 0.612 | 0.000 | -1.493 | 1.045 |
15 | X6 (осн.) | - | 41.791 | 0.110 | -0.030 | -0.627 | -0.627 | 0.000 | -1.642 | 0.149 |
16 | X9 (осн.) | - | 670.000 | 0.960 | 0.000 | 0.200 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 1.000 |
-----
(Zj-Cj) | | | 547.201 | 0.145 | 0.872 | 0.204 | 0.104 | 0.000 | 0.940 | 0.642 |
=====

```

Индексная строка:

```

=====
Небазисная переменная, | X1 | X2 | X4 | X11 | X13 | X15 |
ее тип (номер соотв. ограничения) | осн. | осн. | осн. | изб. ( 13) | изб. ( 15) | ост. ( 1) |
-----
(Zj-Cj) | 8.7E-0001 | 1.4E-0001 | 8.7E-0001 | 2.0E-0001 | 1.0E-0001 | 0.0E+0000 |
=====

```

```

=====
X22 | X24 | X25 | X26 |
ост. ( 8) | ост. ( 10) | ост. ( 11) | ост. ( 12) |
-----
9.4E-0001 | 6.4E-0001 | 6.4E-0001 | 6.4E-0001 |
=====

```

3. Оптимальный план задачи

Суть решения задачи заключается в таком выборе значений основных, остаточных и избыточных переменных X_j , при котором,

- ▶ во-первых, удовлетворяются ограничения и,
- ▶ во-вторых, целевая функция принимает оптимальное (наибольшее или наименьшее) значение.

3. Оптимальный план задачи

К основным блокам информации, содержащимся в нем, относятся:

- ▶ собственно оптимальное решение — значения в столбце A_{i0} базисных переменных
- ▶ оптимальное значение целевой функции, находящееся в индексной строке в том же столбце (Z_j);
- ▶ небазисные переменные равны нулю ;
- ▶ коэффициенты замещения (коэффициенты структурных сдвигов), расположенные в столбцах небазисных переменных (A_{ij});
- ▶ элементы индексной строки, соответствующие небазисным переменным ($Z_j - C_j$).

4. Анализ оптимального решения

Основные переменные, попавшие в базис, характеризуют эффективные отрасли хозяйства, направления производства, или в нашей задаче виды землеустроительных работ, которые целесообразно развивать для достижения максимального чистого дохода.

4. Анализ оптимального решения

- ▶ *Основные переменные, не попавшие в базис, характеризуют неэффективные землеустроительные работы, которые проводить нецелесообразно.*

4. Анализ оптимального решения

- ▶ Экстремальное значение целевой функции показывает максимально возможный чистый доход фирмы, достигаемый при оптимальном землеустроительных работ (Z_{max});
- ▶ Любое другое сочетание отраслей в условиях ограниченности ресурсов, в том числе проведение неэффективных работ (придание ненулевых значений небазисным переменным), будет приводить к ухудшению оптимального плана.

4. Анализ оптимального решения

- ▶ *Остаточные переменные, попавшие в базис, характеризуют недоиспользованные ресурсы, то есть соответствующие им ресурсы являются недефицитными.*

4. Анализ оптимального решения

- ▶ *Остаточные переменные, не попавшие в базис (и соответственно равные нулю), характеризуют полностью исчерпанные, то есть дефицитные, ресурсы.*
- ▶ Всякое увеличение дефицитного ресурса обеспечивает дополнительное развитие эффективных землеустроительных работ и увеличение дохода фирмы.

4. Анализ оптимального решения

- ▶ Избыточные переменные, вошедшие в базис, характеризуют сверхплановое производство работ

4. Анализ оптимального решения

- ▶ *Избыточная переменная, не вошедшая в базис (и, стало быть, равная нулю), свидетельствует о точном выполнении (без перевыполнения) заданного в соответствующем ограничении требования по производству работ.*
- ▶ *Более того, попадание избыточной переменной в число небазисных свидетельствует о том, что перевыполнение плана невыгодно с точки зрения максимизации целевой функции.*
- ▶ *Соответствующие плановые задания можно назвать критическими — их включение в условия задачи, как правило, сдерживает дальнейшее повышение эффективности работы фирмы в целом.*

5. Корректурa оптимального плана

- ▶ Уже получив оптимальный план, решение симплексной задачи, возможно скорректировать, изменить исходные данные.
- ▶ Для этого используют коэффициенты замещения.

5. Корректировка оптимального плана

- ▶ Корректировка оптимального плана может быть оправдана, если:
- ▶ возникает необходимость проведения землеустроительных работ, не вошедших в базисное решение;
- ▶ появляются дополнительные источники дефицитных ресурсов в фирме или, наоборот, реальная ресурсная база по сравнению с предварительно прогнозируемой сужается.

5. Корректурa оптимального плана

Коэффициенты замещения

- ▶ Коэффициенты замещения или коэффициенты структурных сдвигов показывают, как изменяется значение базисной переменной из i -и строки при изменении небазисной переменной на единицу (то есть при введении в оптимальный план небазисной переменной), соответствующей j -му столбцу.
- ▶ Аналогично элементы индексной строки определяют изменения целевой функции.

5. Корректурa оптимального плана

Коэффициенты замещения

- ▶ Коэффициентами замещения (или структурных сдвигов) их называют прежде всего потому, что с их использованием можно корректировать оптимальное решение по данным последней симплекс-таблицы, «замещая» значения базисных переменных небазисными.
- ▶ При этом существенно экономится время на приближение оптимального решения к новым экономическим условиям, возникающим после решения задачи.

5. Корректурa оптимального плана. Введение в базис основной небазисной переменной

- ▶ Последствия включения в оптимальный план небазисной переменной, ее влияние на значения базисных переменных и целевой функции зависят от того, является ли она основной, остаточной или избыточной.
- ▶ Проведение неэффективной землеустроительной работы, то есть введение в план основной небазисной переменной, всегда будет приводить к ухудшению решения.
- ▶ Можно вводить в оптимальный план только положительные значения переменных.

5. Корректурa оптимального плана. Введение в базис основной небазисной переменной

- ▶ При введении в план основной небазисной переменной x_j сначала необходимо определить узкое место, то есть максимальное значение небазисной переменной которое можно ввести в базис.
- ▶ Для этого значения базисных переменных делятся на значения коэффициентов замещения вводимой переменной. Эти манипуляции совершаются только с положительными коэффициентами замещения. $x_j \max = A_{jб} / +A_{ij}$
- ▶ Определяем допустимый интервал значений вводимой в базис основной переменной x_j .

$$0 < x_j < D_{\min}.$$

- ▶ Далее рассчитывают новые значения целевой функции и базисных переменных.
- ▶ $A_{i0_{\text{нов}}} = A_{i0} - A_{ij} * x_j$
- ▶ $Z_{j_{\text{нов}}} = Z_j - A_{ij} * x_j$

5. Корректурa оптимального плана. Введение в базис дополнительной небазисной переменной

- ▶ Далее введем в базис остаточную переменную
- ▶ Также ищем узкое место, но в случае дополнительных переменных здесь делим значения базисных переменных и на положительные и на отрицательные коэффициенты замещения. $A_{jb}/-A_{ij} \leq X_j \max \leq A_{jb}/+A_{ij}$
- ▶ Далее рассчитывают новые значения целевой функции и базисных переменных.

$$A_{io_{\text{нов}}} = A_{io} - A_{ij} * X_j$$

$$Z_{j_{\text{нов}}} = Z_j - A_{ij} * X_j$$

► Спасибо за внимание!