

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ»



Факультет «Городской кадастр»

Направление подготовки 120700.62

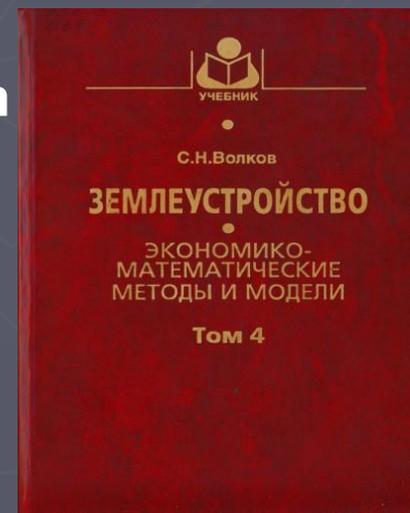
**«Землеустройство и кадастры»,
профиль «Городской кадастр»**

Кафедра «Землеустройство»

**Дисциплина «Экономико-математические методы и
моделирование»**

**Лекция 12. Экономический анализ и корректировка
оптимального решения**

**Лектор: доцент кафедры землеустройства,
к.э.н. Сорокина Ольга Анатольевна**



План лекции

1. Каноническая форма задачи
2. Виды дополнительных переменных
3. Оптимальный план задачи
4. Анализ оптимального решения
5. Корректурa оптимального плана

1. Естественная и каноническая формы задачи

Задача - Определение направления и площади застройки городских земель

- ▶ При разработке схемы генерального плана развития населенного пункта предполагаются различные виды и направления застройки земель.
- ▶ Учитывая ресурсы, выделяемые на строительство и соответствующие нормы затрат, необходимо определить оптимальное сочетание направлений и площади застройки населенного пункта.
- ▶ Критерий эффективности - чистый доход, получаемый от использования объектов недвижимости.

Условия	Многоэтажные жилые здания, м2	Малоэтажные жилые здания, м2	Магазины, м2	Складские помещения, м2	Заправочные станции, м2	Ресурсы населенного пункта
Общая площадь выделяемых земель, га	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	Не менее 20,0
Инвестиционные вложения на 1м2 площади, тыс. руб/м2	0,5	1,0	0,5	0,2	0,3	3000
Трудовые затраты, чел.дн/м2	10	15	10	8	10	50000
Площадь объектов, м2	100	300	1000	800	2000	max

1. Естественная и каноническая формы задачи

Основные переменные:

- ▶ X_1 – количество м² в жилых многоэтажных зданиях;
- ▶ X_2 – количество м² в жилых коттеджах;
- ▶ X_3 – площадь магазинов, м²;
- ▶ X_4 – площадь складских помещений, м²;
- ▶ X_5 – площадь под заправочными станциями, м².

1. Естественная и каноническая формы задачи

Ограничения:

- ▶ по площади выделяемых земель, га:

$$0,0001 * X_1 + 0,0001 * X_2 + 0,0001 * X_3 + 0,0001 * X_4 + 0,0001 * X_5 \geq 20$$

- ▶ по инвестиционным вложениям на 1м² площади, тыс. руб.

$$0,5 * X_1 + 1,0 * X_2 + 0,5 * X_3 + 0,2 * X_4 + 0,3 * X_5 \leq 3000$$

- ▶ по трудовым затратам на 1м², чел. дн.

$$10 * X_1 + 15 * X_2 + 10 * X_3 + 8 * X_4 + 10 * X_5 \leq 50000$$

1. Естественная и каноническая формы задачи

► Целевая функция:

$$Z = 100 \cdot X_1 + 300 \cdot X_2 + 1000 \cdot X_3 + 800 \cdot X_4 + 2000 \cdot X_5 \longrightarrow \max$$

1. Естественная и каноническая формы задачи

- ▶ Далее следует перейти к канонической форме задачи, то есть от неравенств к уравнениям.
- ▶ Данный переход осуществляется путем введения дополнительных переменных в определенном порядке: избыточные, остаточные, искусственные.

2. Виды дополнительных переменных

- ▶ Избыточные переменные вводятся в ограничения типа \geq со знаком "-". Они показывают насколько левая часть неравенства превышает правую, а с экономической точки зрения, показывают - превышение плана.
- ▶ Избыточная переменная X_6 , вставляется в ограничение 1 со знаком "-"

2. Виды дополнительных переменных

1. по площади выделяемых земель, га:

$$0,0001 * X_1 + 0,0001 * X_2 + 0,0001 * X_3 + \\ 0,0001 * X_4 + 0,0001 * X_5 - X_6 = 20$$

X_6 – площадь дополнительно выделенных земель, га

2. Виды дополнительных переменных

- ▶ В ограничениях типа \leq к основным переменным добавляется остаточная переменная, она показывает насколько левая часть неравенства меньше правой, насколько ресурсы недоиспользуются.
- ▶ Остаточные переменные X_7, X_8 вставляются в ограничения 2, 3 со знаком "+".

2. Виды дополнительных переменных

2) по инвестиционным вложениям на 1м² площади, тыс. руб.

$$0,5 * X_1 + 1,0 * X_2 + 0,5 * X_3 + 0,2 * X_4 + 0,3 * X_5 + X_7 = 3000$$

3) по трудовым затратам на 1м², чел. дн.

$$10 * X_1 + 15 * X_2 + 10 * X_3 + 8 * X_4 + 10 * X_5 + X_8 = 50000$$

X_7 – недоиспользованные инвестиционные вложения, тыс. руб.

X_8 – недоиспользованные трудовые затраты на 1м², чел. дн.

2. Виды дополнительных переменных

- ▶ При решении задач с ограничениями типа \geq кроме дополнительных переменных вводят искусственные, с целью получения положительных значений базисных переменных.
- ▶ Искусственную переменную X_9 вставляют в ограничение 1 со знаком "+"

3. Оптимальный план задачи

- ▶ оптимальное решение находится в последней таблице результатов программы Симпл-Delphi

```

=====
14-я итерация.      M = 16,   Ni = 10,   N = 26,   N1 = 10
=====

```

На 8-й итерации понижена размерность задачи - исключены искусственные переменные.

Результаты решения симплексной задачи
(Максимизация целевой функции)

Z = 5.47201E+0002

```

=====
Ном. | базисные | Ном. | Aio | Коэфф. замещ. для некоторых небаз. перем.
ст- | пере- | огр. | (Значение |
ро- | менные | для | базисной | Ai2 | Ai4 | Ai11 | Ai13 | Ai15 | Ai22 | Ai24 |
ки | | доп. | перем.) | (X2) | (X4) | (X11) | (X13) | (X15) | (X22) | (X24) |
и | Xjb | пер. | | (осн.) | (осн.) | (изб. в | (изб. в | (ост. в | (ост. в | (ост. в |
| | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |
-----
1 | X7 (осн.) | - | 216.418 | -0.221 | 0.060 | 1.254 | 0.254 | 0.000 | 3.284 | -0.299 |
2 | X16 (ост.) | 2 | 145.672 | -0.084 | -0.061 | 0.015 | 0.015 | 0.000 | 0.134 | -0.194 |
3 | X17 (ост.) | 3 | 3400.000 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
4 | X18 (ост.) | 4 | 425.000 | -0.700 | 0.000 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
5 | X19 (ост.) | 5 | 2300.000 | 0.000 | 1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
6 | X20 (ост.) | 6 | 682.463 | -0.973 | -1.791 | 0.388 | -0.612 | 0.000 | 1.493 | -1.045 |
7 | X21 (ост.) | 7 | 2698.790 | 0.110 | -0.030 | -0.627 | 0.373 | 0.000 | -1.642 | 0.149 |
8 | X14 (изб.) | 16 | 715.672 | -0.884 | 0.239 | 5.015 | 1.015 | 0.000 | 13.134 | -1.194 |
9 | X23 (ост.) | 9 | 1160.260 | 0.302 | -1.463 | -0.416 | -0.016 | 0.000 | -2.448 | -0.687 |
10 | X3 (осн.) | - | 25.000 | 0.700 | 0.000 | -1.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
11 | X10 (осн.) | - | 935.075 | -0.654 | -1.418 | -2.776 | 0.224 | -1.000 | -2.985 | 2.090 |
12 | X12 (изб.) | 14 | 820.149 | 3.893 | 7.164 | -1.552 | 2.448 | 0.000 | -5.970 | 4.179 |
13 | X8 (осн.) | - | 5.000 | -0.960 | 0.000 | -0.200 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | -1.000 |
14 | X5 (осн.) | - | 292.537 | 0.973 | 1.791 | -0.388 | 0.612 | 0.000 | -1.493 | 1.045 |
15 | X6 (осн.) | - | 41.791 | 0.110 | -0.030 | -0.627 | -0.627 | 0.000 | -1.642 | 0.149 |
16 | X9 (осн.) | - | 670.000 | 0.960 | 0.000 | 0.200 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 1.000 |
-----
(Zj-Cj) | | | 547.201 | 0.145 | 0.872 | 0.204 | 0.104 | 0.000 | 0.940 | 0.642 |
=====

```

Индексная строка:

```

=====
Небазисная переменная, | X1 | X2 | X4 | X11 | X13 | X15 |
ее тип (номер соотв. ограничения) | осн. | осн. | осн. | изб. ( 13) | изб. ( 15) | ост. ( 1) |
-----
(Zj-Cj) | 8.7E-0001 | 1.4E-0001 | 8.7E-0001 | 2.0E-0001 | 1.0E-0001 | 0.0E+0000 |
=====

```

```

=====
X22 | X24 | X25 | X26 |
ост. ( 8) | ост. ( 10) | ост. ( 11) | ост. ( 12) |
-----
9.4E-0001 | 6.4E-0001 | 6.4E-0001 | 6.4E-0001 |
=====

```

3. Оптимальный план задачи

Суть решения задачи заключается в таком выборе значений основных, остаточных и избыточных переменных X_j , при котором,

- ▶ во-первых, удовлетворяются ограничения и,
- ▶ во-вторых, целевая функция принимает оптимальное (наибольшее или наименьшее) значение.

3. Оптимальный план задачи

К основным блокам информации, содержащимся в нем, относятся:

- ▶ собственно оптимальное решение — значения в столбце A_{i0} базисных переменных
- ▶ оптимальное значение целевой функции, находящееся в индексной строке в том же столбце (Z_j);
- ▶ небазисные переменные равны нулю ;
- ▶ коэффициенты замещения (коэффициенты структурных сдвигов), расположенные в столбцах небазисных переменных (A_{ij});
- ▶ элементы индексной строки, соответствующие небазисным переменным ($Z_j - C_j$).

4. Анализ оптимального решения

Основные переменные, попавшие в базис, характеризуют эффективные отрасли хозяйства, направления производства, или в нашей задаче виды землеустроительных работ, которые целесообразно развивать для достижения максимального чистого дохода.

4. Анализ оптимального решения

- ▶ *Основные переменные, не попавшие в базис, характеризуют неэффективные землеустроительные работы, которые проводить нецелесообразно.*

4. Анализ оптимального решения

- ▶ Экстремальное значение целевой функции показывает максимально возможный чистый доход фирмы, достигаемый при оптимальном землеустроительных работ (Z_{max});
- ▶ Любое другое сочетание отраслей в условиях ограниченности ресурсов, в том числе проведение неэффективных работ (придание ненулевых значений небазисным переменным), будет приводить к ухудшению оптимального плана.

4. Анализ оптимального решения

- ▶ *Остаточные переменные, попавшие в базис, характеризуют недоиспользованные ресурсы, то есть соответствующие им ресурсы являются недефицитными.*

4. Анализ оптимального решения

- ▶ *Остаточные переменные, не попавшие в базис (и соответственно равные нулю), характеризуют полностью исчерпанные, то есть дефицитные, ресурсы.*
- ▶ Всякое увеличение дефицитного ресурса обеспечивает дополнительное развитие эффективных землеустроительных работ и увеличение дохода фирмы.

4. Анализ оптимального решения

- ▶ Избыточные переменные, вошедшие в базис, характеризуют сверхплановое производство работ

4. Анализ оптимального решения

- ▶ *Избыточная переменная, не вошедшая в базис (и, стало быть, равная нулю), свидетельствует о точном выполнении (без перевыполнения) заданного в соответствующем ограничении требования по производству работ.*
- ▶ *Более того, попадание избыточной переменной в число небазисных свидетельствует о том, что перевыполнение плана невыгодно с точки зрения максимизации целевой функции.*
- ▶ *Соответствующие плановые задания можно назвать критическими — их включение в условия задачи, как правило, сдерживает дальнейшее повышение эффективности работы фирмы в целом.*

5. Корректурa оптимального плана

- ▶ Уже получив оптимальный план, решение симплексной задачи, возможно скорректировать, изменить исходные данные.
- ▶ Для этого используют коэффициенты замещения.

5. Корректировка оптимального плана

- ▶ Корректировка оптимального плана может быть оправдана, если:
- ▶ возникает необходимость проведения землеустроительных работ, не вошедших в базисное решение;
- ▶ появляются дополнительные источники дефицитных ресурсов в фирме или, наоборот, реальная ресурсная база по сравнению с предварительно прогнозируемой сужается.

5. Корректурa оптимального плана

Коэффициенты замещения

- ▶ Коэффициенты замещения или коэффициенты структурных сдвигов показывают, как изменяется значение базисной переменной из i -и строки при изменении небазисной переменной на единицу (то есть при введении в оптимальный план небазисной переменной), соответствующей j -му столбцу.
- ▶ Аналогично элементы индексной строки определяют изменения целевой функции.

5. Корректурa оптимального плана

Коэффициенты замещения

- ▶ Коэффициентами замещения (или структурных сдвигов) их называют прежде всего потому, что с их использованием можно корректировать оптимальное решение по данным последней симплекс-таблицы, «замещая» значения базисных переменных небазисными.
- ▶ При этом существенно экономится время на приближение оптимального решения к новым экономическим условиям, возникающим после решения задачи.

5. Корректурa оптимального плана. Введение в базис основной небазисной переменной

- ▶ Последствия включения в оптимальный план небазисной переменной, ее влияние на значения базисных переменных и целевой функции зависят от того, является ли она основной, остаточной или избыточной.
- ▶ Проведение неэффективной землеустроительной работы, то есть введение в план основной небазисной переменной, всегда будет приводить к ухудшению решения.
- ▶ Можно вводить в оптимальный план только положительные значения переменных.

5. Корректурa оптимального плана. Введение в базис основной небазисной переменной

- ▶ При введении в план основной небазисной переменной x_j сначала необходимо определить узкое место, то есть максимальное значение небазисной переменной которое можно ввести в базис.
- ▶ Для этого значения базисных переменных делятся на значения коэффициентов замещения вводимой переменной. Эти манипуляции совершаются только с положительными коэффициентами замещения. $x_j \max = A_{jб} / +A_{ij}$
- ▶ Определяем допустимый интервал значений вводимой в базис основной переменной x_j .

$$0 < x_j < D_{\min}.$$

- ▶ Далее рассчитывают новые значения целевой функции и базисных переменных.
- ▶ $A_{i0_{\text{нов}}} = A_{i0} - A_{ij} * x_j$
- ▶ $Z_{j_{\text{нов}}} = Z_j - A_{ij} * x_j$

5. Корректурa оптимального плана. Введение в базис дополнительной небазисной переменной

- ▶ Далее введем в базис остаточную переменную
- ▶ Также ищем узкое место, но в случае дополнительных переменных здесь делим значения базисных переменных и на положительные и на отрицательные коэффициенты замещения. $A_{jb}/-A_{ij} \leq X_j \max \leq A_{jb}/+A_{ij}$
- ▶ Далее рассчитывают новые значения целевой функции и базисных переменных.

$$A_{io_{\text{нов}}} = A_{io} - A_{ij} * X_j$$

$$Z_{j_{\text{нов}}} = Z_j - A_{ij} * X_j$$

► Спасибо за внимание!