Метод скользящего среднего

Одним из предположений, лежащих в основе данного метода, является то, что более точный прогноз на будущее можно получить, если использовались недавние наблюдения, причем, чем “новее” данные, тем их вес для прогноза должен быть больше. Удивительно, но такой “наивный” подход оказывается чрезвычайно полезным для практики. Например, многие авиакомпании используют частный тип скользящего среднего для создания прогнозов спроса на авиаперелеты, которые, в свою очередь, используются в сложных механизмах управления и оптимизации доходов. Более того, практически все программные пакеты управления запасами содержат модули, выполняющие прогнозы на основе того или иного типа скользящего среднего. Исходя из критерия “частота использования” метод скользящего среднего, несомненно, является одной из самых важных и полезных процедур прогнозирования

Простое скользящее среднее

Из группы методов скользящего среднего самым простым является метод *скользящего среднего по n узлам*. В этом методе среднее фиксированного числа n последних наблюдений используется для оценки следующего значения y. Например, если n равняется 4 и существует 15 фактических значений y, то значение для y_{16} определяется по формуле

$$\hat{y}_{16} = \frac{y_{15} + y_{14} + y_{13} + y_{12}}{4}.$$

В общем случае формула скользящего среднего для n узлов выглядит следующим образом:

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{1}{n}(y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-n+1}).$$

Применение скользящего среднего для 3 и 4 узлов к данным объема продаж компании STECO показано в табл. 12.1.

Таблица 12.1. Скользящее среднее для трех и четырех узлов

Месяц	Объем продаж, тыс. долл.	Прогноз на основе скользящего среднего за 3 месяца	Прогноз на основе скользящего среднего за 4 месяца
Январь	20		
Февраль	24		
Март	27		
Апрель	31	(20 + 24 + 27)/3 = 23,67	
Май	37	(24 + 27 + 31)/3 = 27,33	(20 + 24 + 27 + 31)/4 = 25,50
Июнь	47	(27 + 31 + 37)/3 = 31,67	(24 + 27 + 31 + 37)/4 = 29,75
Июль	53	(31 + 37 + 47)/3 = 38,33	(27 + 31 + 37 + 47)/4 = 35,50
Август	62	(37 + 47 + 53)/3 = 45,67	(31 + 37 + 47 + 53)/4 = 42,00
Сентябрь	54	(47 + 53 + 62)/3 = 54,00	(37 + 47 + 53 + 62)/4 = 49,75
Октябрь	36	(53 + 62 + 54)/3 = 56,33	(47 + 53 + 62 + 54)/4 = 54,00
Ноябрь	32	(62 + 54 + 36)/3 = 50,67	(53 + 62 + 54 + 36)/4 = 51,25
Декабрь	29	(54 + 36 + 32)/3 = 40,67	(62 + 54 + 36 + 32)/4 = 46,00

Как видно, прогноз объема продаж в апреле на основе скользящего среднего за три месяца — это среднее объемов продаж за январь, февраль и март, т.е. (20 + 24 + 27)/3 = = 23,67. Фактический объем продаж в апреле составил 31. Поэтому в данном случае спрогнозированный объем продаж отличается от фактического на 7,33 (= 31 – 23,67).

Если сравнить фактические объемы продаж с прогнозами, видно, что ни один из методов прогнозирования не является достаточно точным. Тем не менее пора перейти от *качественного сравнения* к некоторой *количественной величине*, по которой можно судить о точности прогнозов разных методов. Мерой сравнения, которая будет использоваться в этом разделе, является среднее абсолютных отклонений (САО) и среднее относительных ошибок в процентах (СООП), где:

$$\text{САО} = \frac{\sum\limits_{\text{все прогнозы}} \left|\text{факт.продажи - прогноз}\right|}{\text{количество прогнозов}},$$

$$\text{СООП} = \frac{\sum\limits_{\text{все прогнозы}} \dfrac{\left|\text{факт. продажи - прогноз}\right|}{\text{факт. продажи}} \times 100\%}{\text{количество прогнозов}}. \qquad (12.7)$$

Значения среднего абсолютных отклонений для прогноза на основе скользящего среднего за 3 и 4 месяцев можно найти в рабочей книге СТОЙКИ.XLS, которая показана на рис. 12.14. Для скользящего среднего за три месяца значение САО равно 12,67 (ячейка D16), тогда как для скользящего среднего за 4 месяца значение САО равно 15,59 (ячейка F16), это значит, что использование большего количества статистических данных скорее ухудшает, чем улучшает точность прогноза методом скользящего среднего.

Значение прогноза, полученное методом простого скользящего среднего, всегда меньше фактического значения, если исходные данные монотонно возрастают, и больше фактического значения, если исходные данные монотонно убывают. Поэтому, если данные монотонно возрастают или убывают, то с помощью простого скользящего среднего нельзя получить точных прогнозов. Этот метод лучше всего подходит для данных с небольшими случайными отклонениями от некоторого постоянного или медленно меняющегося значения.

Метод простого скользящего среднего имеет два недостатка. Первый возникает в ре-

C5 =СРЗНАЧ(B2 B4)

	A	B	C	D	E	F
1	Месяц	Объемы продаж, тыс.	Прогноз на основе ск. среднего за 3 месяца	Абсолютная ошибка	Прогноз на основе ск. среднего за 4 месяца	Абсолютная ошибка
2	Январь	20				
3	Февраль	24				
4	Март	27				
5	Апрель	31	23 67	7 33		
6	Май	37	27,33	9,67	25,50	11,50
7	Июнь	47	31,67	15,33	29,75	17,25
8	Июль	53	38 33	14,67	35,50	17,50
9	Август	62	45,67	16,33	42 00	20,00
10	Сентябрь	54	54 00	0,00	49,75	4 25
11	Октябрь	36	56 33	20,33	54,00	18 00
12	Ноябрь	32	50,67	18,67	51 25	19,25
13	Декабрь	29	40 67	11 67	46 00	17 00
14						
15			Сумма =	114,00	Сумма =	124,75
16			САО =	12,67	САО =	15,59

	C	D	E	F
1	Прогноз на основе ск. среднего за 3 месяца	Абсолютная ошибка	Прогноз на основе ск. среднего за 4 месяца	Абсолютная ошибка
2				
3				
4				
5	=СРЗНАЧ(B2 B4)	=ABS(B5-C5)		
6	=СРЗНАЧ(B3:B5)	=ABS(B6-C6)	=СРЗНАЧ(B2 B5)	=ABS(B6-E6)
7	=СРЗНАЧ(B4 B6)	=ABS(B7-C7)	=СРЗНАЧ(B3 B6)	=ABS(B7-E7)
8	=СРЗНАЧ(B5:B7)	=ABS(B8-C8)	=СРЗНАЧ(B4 B7)	=ABS(B8-E8)
9	=СРЗНАЧ(B6:B8)	=ABS(B9-C9)	=СРЗНАЧ(B5 B8)	=ABS(B9-E9)
10	=СРЗНАЧ(B7 B9)	=ABS(B10-C10)	=СРЗНАЧ(B6 B9)	=ABS(B10-E10)
11	=СРЗНАЧ(B8 B10)	=ABS(B11-C11)	=СРЗНАЧ(B7 B10)	=ABS(B11-E11)
12	=СРЗНАЧ(B9 B11)	=ABS(B12-C12)	=СРЗНАЧ(B8:B11)	=ABS(B12-E12)
13	=СРЗНАЧ(B10 B12)	=ABS(B13-C13)	=СРЗНАЧ(B9 B12)	=ABS(B13-E13)
14				
15	Сумма =	=СУММ(D5:D13)	Сумма =	=СУММ(F5:F13)
16	САО =	=СРЗНАЧ(D5:D13)	САО =	=СРЗНАЧ(F5:F13)

Рис. 12.14. Сравнение значений САО для прогнозов методом скользящего среднего за 3 и 4 месяца

Метод простого скользящего среднего имеет два недостатка. Первый возникает в результате того, что при вычислении прогнозируемого значения самое последнее наблюдение имеет такой же вес (т.е. значимость), как и предыдущие. Это происходит потому, что вес всех n последних наблюдений, участвующих в вычислении скользящего среднего, равен $1/n$. Присвоение равного веса противоречит интуитивному представлению о том, что во многих случаях последние данные могут больше сказать о том, что произойдет в ближайшем будущем, чем предыдущие (это же показывает анализ данных на рис 12.14).

Взвешенное скользящее среднее

Идея, что более поздние данные важнее более старых, лежит в основе метода *взвешенного скользящего среднего по n узлам*. Данный метод – обобщение метода простого скользящего среднего по *n* узлам, где каждый узел имел вес $1/n$. Например, при $n = 3$ взвешенное среднее вычисляется по формуле $\hat{y}_7 = \alpha_0 y_6 + \alpha_1 y_5 + \alpha_2 y_4$, где коэффициенты α_0, α_1 и α_2, называемые *весами*, представляют собой неотрицательные числа, которые выбираются исходя из условий, что более ранние данные обладают меньшим весом и общий вес всех узлов равен 1. Конечно же, существует бесконечное множество наборов значений α, которые удовлетворяют этим критериям. Например, можно определить взвешенное среднее по трем последним наблюдениям с помощью формулы $\hat{y}_7 = \frac{3}{6}y_6 + \frac{2}{6}y_5 + \frac{1}{6}y_4$. Но возможен и такой вариант: $\hat{y}_7 = \frac{5}{10}y_6 + \frac{3}{10}y_5 + \frac{2}{10}y_4$. В обеих случаях значения α убывают, а их сумма равняется 1. На практике для нахождения подходящих значений α в Excel проще всего воспользоваться средством Поиск решения.

Виктор, чтобы проверить точность метода взвешенного скользящего среднего за 3 месяца, применил этот метод к статистическим данным объема продаж, при этом он назначил веса 3/6, 2/6 и 1/6. Полученный прогноз и значение среднего абсолютных отклонений показаны на новом рабочем листе Веса, который находится в той же рабочей книге СТОЙКИ XLS (см рис 12.15). Сравнение нового значения среднего абсолютных отклонений, равного 11,04 (ячейка G16), со значениями средних абсолютных отклонений, полученных при использовании простого скользящего среднего за 3 (САО = 12,67) и за 4 месяца (САО = 15,59), подтверждает предположение о том, что более поздние данные являются лучшим показателем прогнозируемого объема продаж, чем более ранние данные.

	F5		=СУММПРОИЗВ($B$1.$B$3,E2 E4)				
	A	B	C	D	E	F	G
1	*альфа2 =*	0,167		Месяц	Объемы продаж, тыс.	Прогноз на основе ск. среднего за 3 месяца	Абсолютная ошибка
2	*альфа1 =*	0 333		Январь	20		
3	*альфа0 =*	0,500		Февраль	24		
4	*Сумма весов =*	1 00		Март	27		
5				Апрель	31	24,83	6,17
6				Май	37	28,50	8,50
7				Июнь	47	33 33	13,67
8				Июль	53	41,00	12,00
9				Август	62	48 33	13 67
10				Сентябрь	54	56,50	2,50
11				Октябрь	36	56,50	20,50
12				Ноябрь	32	46,34	14,34
13				Декабрь	29	37 01	8 01
14							
15						Сумма =	99,35
16						САО =	11,04

	B	C	D	E	F	G
1	0,167		Месяц	Объемы прода	Прогноз на основе ск. среднего за 3 месяца	Абсолютная ошибка
2	0,333		Январь	20		
3	0,5		Февраль	24		
4	=СУММ(B1 B3)		Март	27		
5			Апрель	31	=СУММПРОИЗВ($B$1:$B$3;E2:E4)	=ABS(E5-F5)
6			Май	37	=СУММПРОИЗВ($B$1.$B$3;E3:E5)	=ABS(E6-F6)
7			Июнь	47	=СУММПРОИЗВ($B$1:$B$3;E4 E6)	=ABS(E7-F7)
8			Июль	53	=СУММПРОИЗВ($B$1:$B$3;E5:E7)	=ABS(E8-F8)
9			Август	62	=СУММПРОИЗВ($B$1 $B$3;E6:E8)	=ABS(E9-F9)
10			Сентябрь	54	=СУММПРОИЗВ($B$1:$B$3;E7:E9)	=ABS(E10-F10)
11			Октябрь	36	=СУММПРОИЗВ($B$1 $B$3;E8:E10)	=ABS(E11-F11)
12			Ноябрь	32	=СУММПРОИЗВ($B$1 $B$3;E9 E11)	=ABS(E12-F12)
13			Декабрь	29	=СУММПРОИЗВ($B$1 $B$3;E10 E12)	=ABS(E13-F13)
14						
15					Сумма =	=СУММ(G5.G13)
16					САО =	=СРЗНАЧ(G5:G13)

Рис. 12.15. *Использование взвешенного среднего за 3 месяца*

Используя средство Поиск решения, можно определить более оптимальный вес узлов, чем тот, который использовался вначале. Чтобы определить вес узлов с помощью средства Поиск решения, при котором значение среднего абсолютных отклонений было бы минимально, выполните такие действия

1. Выберите команду Сервис⇨Поиск решения.
2. В открывшемся диалоговом окне Поиск решения установите ячейку G16 целевой и укажите, что ее значение должно быть минимальным.
3. В поле Изменяя ячейки введите диапазон B1:B3.
4. Введите ограничения B4 = 1,0, B1.B3 ≥ 0, B1:B3 ≤ 1, B1 ≤ B2 и B2 ≤ B3.
5. Щелкнув на кнопке Выполнить, получите результат, показанный на рис. 12.16.

	A	B	C	D	E	F	G
1	***альфа2 =***	0,000		**Месяц**	**Объемы продаж, тыс.**	**Прогноз на основе ск. среднего за 3 месяца**	**Абсолютная ошибка**
2	***альфа1 =***	0 000		Январь	20		
3	***альфа0 =***	1,000		Февраль	24		
4	***Сумма весов =***	1 00		Март	27		
5				Апрель	31	27,00	4,00
6				Май	37	31,00	6,00
7				Июнь	47	37,00	10,00
8				Июль	53	47,00	6,00
9				Август	62	53,00	9,00
10				Сентябрь	54	62,00	8,00
11				Октябрь	36	54,00	18,00
12				Ноябрь	32	36,00	4,00
13				Декабрь	29	32 00	3,00
14							
15						**Сумма =**	68,00
16						**САО =**	7,56
17							

Рис. 12.16. Применение взвешенного среднего за 3 месяца при оптимальном весе узлов

Полученные результаты показывают, что оптимальное распределение весов таково, что весь вес сосредоточен на самом последнем наблюдении, при этом значение среднего абсолютных отклонений равно 7,56. Этот результат подтверждает предположение о том, что более поздние наблюдения должны иметь больший вес.

Экспоненциальное сглаживание

Очевидно, что в методе взвешенного скользящего среднего существует множество способов задавать значения весов так, чтобы их сумма была равной 1. Один из таких способов называется *экспоненциальным сглаживанием* В этой схеме метода взвешенного среднего для любого $t \geq 1$ прогнозируемое значение $\hat{y}_{t+1}$ в момент времени $t+1$ представляет собой взвешенную сумму *фактического объема продаж* y_t *за период времени* t и *прогнозируемого объема продаж* $\hat{y}_t$ *за период времени* t Другими словами,

$$\hat{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\hat{y}_t, \qquad (12.8)$$

где α — определенная константа такая, что $0 \leq \alpha \leq 1$. Значение константы α определяет значение веса, которое имеет самое последнее наблюдение при вычислении прогнозируемого значения на следующий период. Если в уравнении (12 8) значение α будет близко к 1, то практически весь вес будет приходиться на наблюдение за период t

Чтобы лучше раскрыть метод экспоненциального сглаживания, заметим, что при $t = 1$ $\hat{y}_2$ вычисляется как $\hat{y}_2 = \alpha y_1 + (1-\alpha)\hat{y}_1$. В этом выражении $\hat{y}_1$ представляет собой "начальное предположение" значения y в момент времени 1, а y_1 равно фактическому значению в момент времени 1. Итак, чтобы осуществить прогноз с помощью экспоненциального сглаживания, необходимо знать "начальное предположение". Существует несколько способов его вычисления. Наиболее часто предполагается, что $\hat{y}_1 = y_1$ (т.е. предыдущий прогноз был "идеальным"). Следующий способ предполагает использование всех доступных статистических данных, при этом $\hat{y}_1 = \hat{y}$ (т е $\hat{y}_1$ равно среднему всех доступных данных). Иногда предполагается, что $\hat{y}_1$ равно среднему только нескольких последних наблюдений. Рассмотрим первый способ определения $\hat{y}_1$.

Виктор использовал рабочий лист Экспо, который содержится в той же книге СТОЙКИ XLS, для применения метода экспоненциального сглаживания к данным об объеме продаж На рис. 12.17 показаны фактические и спрогнозированные объемы продаж за 12 месяцев при значении $\alpha = 0,5$.

	A	B	C	D	E	F	G
1	*альфа =*	0 500		**Месяц**	**Объемы продаж, тыс.**	**Прогноз**	**Абсолютная ошибка**
2				Январь	20	20,00	
3				Февраль	24	20,00	4 00
4				Март	27	22,00	5,00
5				Апрель	31	24,50	6,50
6				Май	37	27,75	9,25
7				Июнь	47	32 38	14 63
8				Июль	53	39,69	13,31
9				Август	62	46 34	15 66
10				Сентябрь	54	54 17	0 17
11				Октябрь	36	54,09	18 09
12				Ноябрь	32	45,04	13,04
13				Декабрь	29	38 52	9 52
14							
15						**Сумма =**	109,17
16						**САО =**	9,92

	A	B	C	D	E	F	G
1	*альфа =*	0 5		**Месяц**	**Объемы продаж,**	**Прогноз**	**Абсолютная ошибка**
2				Январь	20	=E2	
3				Февраль	24	=$B$1*E2+(1-$B$1)*F2	=ABS(E3-F3)
4				Март	27	=$B$1*E3+(1-$B$1)*F3	=ABS(E4-F4)
5				Апрель	31	=$B$1*E4+(1-$B$1)*F4	=ABS(E5-F5)
6				Май	37	=$B$1*E5+(1-$B$1)*F5	=ABS(E6-F6)
7				Июнь	47	=$B$1*E6+(1-$B$1)*F6	=ABS(E7-F7)
8				Июль	53	=$B$1*E7+(1-$B$1)*F7	=ABS(E8-F8)
9				Август	62	=$B$1*E8+(1-$B$1)*F8	=ABS(E9-F9)
10				Сентябрь	54	=$B$1*E9+(1-$B$1)*F9	=ABS(E10-F10)
11				Октябрь	36	=$B$1*E10+(1-$B$1)*F10	=ABS(E11-F11)
12				Ноябрь	32	=$B$1*E11+(1-$B$1)*F11	=ABS(E12-F12)
13				Декабрь	29	=$B$1*E12+(1-$B$1)*F12	=ABS(E13-F13)
14							
15						**Сумма =**	=СУММ(G3:G13)
16						**САО =**	=СРЗНАЧ(G3:G13)

Рис. 12.17. Прогнозирование методом экспоненциального сглаживания при значении $\alpha = 0,5$

Ковальский также вычислил среднее абсолютных отклонений прогноза с февраля по декабрь. В модели экспоненциального сглаживания при $\alpha = 0,5$ получено меньшее значение среднего абсолютных отклонений (9,92, ячейка G16), чем в моделях скользящего среднего (см. рис. 12.14) и в начальной модели взвешенного среднего (см. рис. 12 15). Полученное значение среднего абсолютных отклонений меньше, чем в прошлых моделях, при этом вычисления достаточно просты С этой точки зрения разумно рассматривать экспоненциальное сглаживание как достаточно недорогой и простой способ прогнозирования объемов продаж для многих продуктов компании STECO.

Виктор знает, что с помощью средства Поиск решения можно найти оптимальное значение α, при котором среднее абсолютных отклонений будет минимально Чтобы найти такое значение α, выполните следующие действия.

1. Выберите команду Сервис⇨Поиск решения
2. В открывшемся диалоговом окне Поиск решения установите целевую ячейку G16 и укажите, что ее значение должно быть минимальным.
3. Укажите, что изменяемой ячейкой является ячейка B1.
4. Введите ограничения $B1 \geq 0$ и $B1 \leq 1$
5. Щелкнув на кнопке Выполнить, получите результат, показанный на рис. 12 18

	A	B	C	D	E	F	G
1	***альфа =***	1 000		**Месяц**	**Объемы продаж, тыс.**	**Прогноз**	**Абсолютная ошибка**
2				Январь	20	20,00	
3				Февраль	24	20,00	4,00
4				Март	27	24,00	3,00
5				Апрель	31	27,00	4 00
6				Май	37	31,00	6,00
7				Июнь	47	37,00	10 00
8				Июль	53	47,00	6,00
9				Август	62	53 00	9 00
10				Сентябрь	54	62,00	8,00
11				Октябрь	36	54,00	18,00
12				Ноябрь	32	36,00	4,00
13				Декабрь	29	32 00	3 00
14							
15						**Сумма =**	75,00
16						**САО =**	6,82

Рис. 12.18. *Прогноз с помощью метода экспоненциального сглаживания при оптимальном значении α*

Опять, как и в методе взвешенного скользящего среднего, наилучший прогноз будет получен, если назначить весь вес последнему наблюдению. Следовательно, оптимальное значение α равно 1, при этом среднее абсолютных отклонений равно 6,82 (ячейка G16) Виктор получил прогноз, который уже видел ранее.

Загальні підходи до кількісної оцінки ступеня ризику

Інгредієнт економічного показника

Вважають, що економічний показник X (або його характеристика) має ***позитивний інгредієнт***, якщо при прийнятті рішення орієнтуються на його максимальне значення. Для цих випадків записують, що $X = X^{+}$.

Якщо ж під час прийняття рішень орієнтуються на мінімальне значення економічного показника, то вважають, що він має ***негативний інгредієнт***. У цій ситуації пишуть, що $X = X^{-}$.

Ризик як величина очікуваної невдачі

Безсумнівний інтерес становить така оцінка ризику невдачі, яка ґрунтується на всьому спектрі можливих результатів (збитків, платежів тощо). Якщо ж відомі всі можливі наслідки окремої події та ймовірності їх настання, то для *оцінки міри (ступеня) ризику* використовується *величина очікуваної невдачі* (сподіване значення, математичне сподівання), пов'язана з невизначеністю, тобто середньозважена величина цих можливих результатів, де ймовірність кожного з них використовується як частота або питома вага відповідного значення. У випадку, коли всі можливі наслідки події описуються дискретною випадковою величиною

$$X = X^{-} = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\},$$

а розподіл ймовірностей їх настання $P = \{p_1;\ p_2;\dots;\ p_n\}$; $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$, величина ризику очікуваної невдачі:

$$W = M(X^-) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \ .$$

Якщо ж несприятливі наслідки події описуються неперервною випадковою величиною $X^- \in (-\infty;+\infty)$, то

$$W = M(X^-) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx ,$$

де *f*(*x*) — щільність розподілу ймовірності.

Приклад 3.5. Надаючи банківський кредит комерційній фірмі, здійснюють прогноз можливих значень збитків та відповідних значень ймовірності. Числові дані подано в табл.3.1.

Таблиця 3.1

Оцінка можливого результату	Прогнозовані збитки, тис. гривень	Значення ймовірності
Песимістична	30	0,2
Стримана	6	0,5
Оптимістична	– 40	0,3

Визначити сподівану величину ризику, тобто збитків

Розв'язання. Випадкова величина *X*, що характеризує можливі збитки, $X^{-}=\{30;\ 6;\ -40\}$. Тоді величина ризику (сподіваних збитків):

$$W = W^{-} = \sum_{j=1}^{3} p_j x_j = 0{,}2 \cdot 30 + 0{,}5 \cdot 6 + 0{,}3 \cdot (-40) = -3,$$

тобто комерційній фірмі можна надати кредит, оскільки величина сподіваних збитків становить $W = -3$, а це вказує на можливість прибутку. ▬

! ***Висновок.*** *Сподіване значення* є центром групування реалізацій випадкової величини *X*, а тому його можна розглядати як результат (ризик), який ми очікуємо в середньому.

Ризик як міра мінливості результату

У якості *величини ризику в абсолютному вираженні часто використовується міра розсіювання значень економічного показника відносно центра групування* цих значень.
Нехай в якості центра групування значень економічного показника використовується його математичне сподівання.

Дисперсія та середньоквадратичне відхилення

При абсолютному вираженні міри ризику під час прийняття економічних рішень широко використовується дисперсійний підхід.

Дисперсією (варіацією) $V(X)$ випадкової величини X є зважена щодо ймовірності величина квадратів відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання $M(X)$. Дисперсія характеризує міру розсіяння випадкової величини X навколо $M(X)$ і обчислюється за формулою:

$$V(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Для дискретної випадкової величини

$$V(X) = \sum_{j=1}^{n} p_j (x_j - M(X))^2 = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^2 - (M(X))^2.$$

Середньоквадратичним (стандартним) відхиленням випадкової величини X називається величина

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Підхід до оцінки ризику, що спирається на варіацію чи середньоквадратичне відхилення, вважається *класичним*. Причому *чим більшими будуть ці величини, тим більшим буде ступінь ризику*, пов'язаного з певною стратегією, тобто величина ризику

$$W = V(X) \text{ або } W = \sigma(X).$$

Слід зазначити, що такий підхід до оцінки ступеня ризику використовується, коли $X = X^{\pm}$.

Приклад 3.8. Розглядаються два проекти A і B щодо інвестування. Відомі оцінки прогнозованих значень доходу від кожного з цих проектів та відповідні значення ймовірностей. Цифрові дані наведено в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Оцінка можливого результату	Прогнозований прибуток (тис. гривень)		Значення ймовірності	
	A	*B*	*A*	*B*
Песимістична Оптимістична	100 200	51 151	0,5 0,5	0,01 0,99

Потрібно оцінити міру ризику кожного з цих проектів і обрати один з них (той, що забезпечує меншу величину ризику) для інвестування.

Розв'язання. Нехай $X_A = \{100;\ 200\}$, $X_B=\{51;\ 151\}$ відповідно випадкові величини, що відображають можливі прибутки від реалізації проектів.

Знайдемо величини сподіваних прибутків:

$$M(X_A) = 0{,}5 \cdot 100 + 0{,}5 \cdot 200 = 150 \text{ (тис. грн)};$$
$$M(X_B) = 0{,}01 \cdot 51 + 0{,}99 \cdot 151 = 150 \text{ (тис. грн)},$$

тобто обидва проекти мають однаковий прогнозований сподіваний прибуток.

У якості міри ризику використаємо оцінку мінливості (варіацію) можливих результатів інвестування:

$$W_A^- = V(X_A) = 0{,}5 \cdot (200-150)^2 + 0{,}5 \cdot (100-150)^2 = 2500;$$
$$W_B^- = V(X_B) = 0{,}99 \cdot (151-150)^2 + 0{,}01 \cdot (51-150)^2 = 99.$$

Оскільки $W_B^- < W_A^-$, то проект *B* є менш ризикованим порівняно з проектом *A*, і йому слід віддати перевагу.

Аналогічний результат ми отримаємо, якщо за міру ризику візьмемо середньоквадратичне відхилення:

$$W_A^- = \sigma(X_A) = \sqrt{2500} = 50;$$
$$W_B^- = \sigma(X_B) = \sqrt{99} \approx 10,$$

тобто проект *B* є менш ризикованим

Семіваріація та семіквадратичне відхилення

Слід мати на увазі, що при класичному визначенні міри ризику однаково трактуються як додатні, так і від'ємні відхилення величини реального ефекту від сподіваної величини, тобто виконується гіпотеза про те, що коливання випадкової величини X (прибутку, ЧПВ, збитків) в обидві сторони однаково небажані. Але у ряді випадків це не так і цю гіпотезу доводиться відкидати. Якщо випадкова величина $X = \{x_1; \ldots; x_n\}$ відображає прибутки ($X = X^+$) і значення $x_i < M(X)$ (оцінка прибутку x_i є реалізацією випадкової величини X і є меншою від сподіваної величини прибутку), то це є ознакою *несприятливої ситуації.* В той же час додатне відхилення вказує на те, що реалізація випадкової величини (прибутку) є більшою, ніж сподівана величина, і це для менеджера (інвестора) є, очевидно, кращою, тобто *сприятливою ситуацією*.

У неокласичній теорії економічного ризику виходять з того, що *ризик пов'язаний лише з несприятливими для менеджера (інвестора) ефектами* і для його оцінювання достатньо брати до уваги лише несприятливі відхилення від сподіваної величини. При цьому *в якості міри ризику використовується семіваріація,* яка обчислюється за формулою:

$$SV(X) = \frac{1}{P^{-}} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j \left(x_j - M(X)\right)^2,$$

де $P^{-} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p_j$, α_j— індикатор несприятливих відхилень, який визначають за формулою:

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & \text{у випадку сприятливого відхилення,} \\ 1, & \text{у випадку несприятливого відхилення.} \end{cases}$$

Якщо ж, наприклад, $X = \{x_1; ...; x_n\}$ відображає можливі варіанти збитків ($X = X^-$, тобто має негативний інгредієнт), то

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & x_j \le M(X^-) \\ 1, & x_j > M(X^-) \end{cases}; \qquad j = \overline{1, n}.$$

З практичної точки зору зручніше (беручи до уваги вимірність величин) застосовувати *семіквадратичне відхилення.*

$$SSV(X) = \sqrt{SV(X)}.$$

Згідно із сказаним вище *чим більшою буде величина* $SV(X)$ *(чи* $SSV(X)$*), тим більшим буде ступінь ризику,*

Приклад 3.9. Результати спостережень за нормами прибутку портфелів цінних паперів А і В протягом минулих п'яти періодів наведено в табл.3.3.

Таблиця 3.3

Період	Норма прибутку (%)	
	R_A	R_B
1	5	3
2	3	5
3	2	6
4	3	5
5	7	1

Інвестор має можливість придбати лише один з цих портфелів. Потрібно оцінити міру ризику кожного з портфелів і придбати той, що забезпечує меншу величину ризику (для інвестування).

Розв'язання. У випадку, коли наявні статистичні дані щодо минулого, сподівану норму прибутку, її варіацію та семіваріацію можна обчислити, відповідно, за формулами:

$$M(R) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t; \qquad V(R) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(R_t - M(R)\right)^2;$$

$$SV(R) = \frac{1}{T^-}\sum_{t=1}^{T}\alpha_t (R_t - M(R))^2; \qquad T^- = \sum_{t=1}^{T}\alpha_t,$$

де $R = \{R_1; R_2; \ldots; R_T\}$ — випадкова величина, що відображає значення норми прибутку в попередні T періодів, R_t — норма прибутку портфеля цінних паперів в t-му періоді ($t = 1,\ldots, T$), T — кількість періодів, які минули і в які здійснювались спостереження за випадковою величиною R

Нехай R_A — випадкова величина, що відображає можливі значення норми прибутку портфеля A, R_B — портфеля B. Тоді:

$$M(R_A) = 1/5 \cdot (5 + 3 + 2 + 3 + 7) = 4;$$
$$M(R_B) = 1/5 \cdot (3 + 5 + 6 + 5 + 1) = 4;$$
$$V(R_A) = 1/4 \cdot ((5 - 4)^2 + (3 - 4)^2 + (2 - 4)^2 + (3 - 4)^2 + (7 - 4)^2) = 4;$$
$$V(R_B) = 1/4 \cdot ((3 - 4)^2 + (5 - 4)^2 + (6 - 4)^2 + (5 - 4)^2 + (1 - 4)^2) = 4,$$

тобто на основі величин $M(R_A)$, $M(R_B)$, $V(R_A)$ та $V(R_B)$ ми не можемо надати перевагу ні портфелю A, ні портфелю B.

Обчислимо величини семіваріацій для цих портфелів. Оскільки для портфеля A величина $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = 1$; $\alpha_4 = 1$; $\alpha_5 = 0$, то отримуємо:

$$W_A = SV(R_A) = 1/3 \cdot (0^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2) = 2.$$

Для портфеля B: $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 0$; $\alpha_3 = 0$; $\alpha_4 = 0$; $\alpha_5 = 1$. Тоді

$$W_B = SV\,(R_B) = 1/2 \cdot ((-1)^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-3)^2) = 5.$$

Оскільки $W_A < W_B$, то, виходячи з позицій мінімального ризику, для інвестора більш привабливим є портфель A. ▬