Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Российский химико-технологический университет
имени Д.И.Менделеева

Лекция 4

«Непрерывная случайная величина. Равномерное, показательное и нормальное распределение»

2020 г.

Непрерывная случайная величина (НСВ) может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка

Функция распределения случайной величины в каждой точке x равна вероятности того, что случайная величина в результате испытания примет значение меньшее x, то есть:

$$F(x) = P(X < x)$$

Точное определение непрерывной случайной величины можно дать с помощью функции распределения.

Случайная величина называется непрерывной, если её функция распределения непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция.

Свойства функции распределения

1. $0 \leq F(x) \leq 1$

2. $F(x)$ – неубывающая функция.

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.

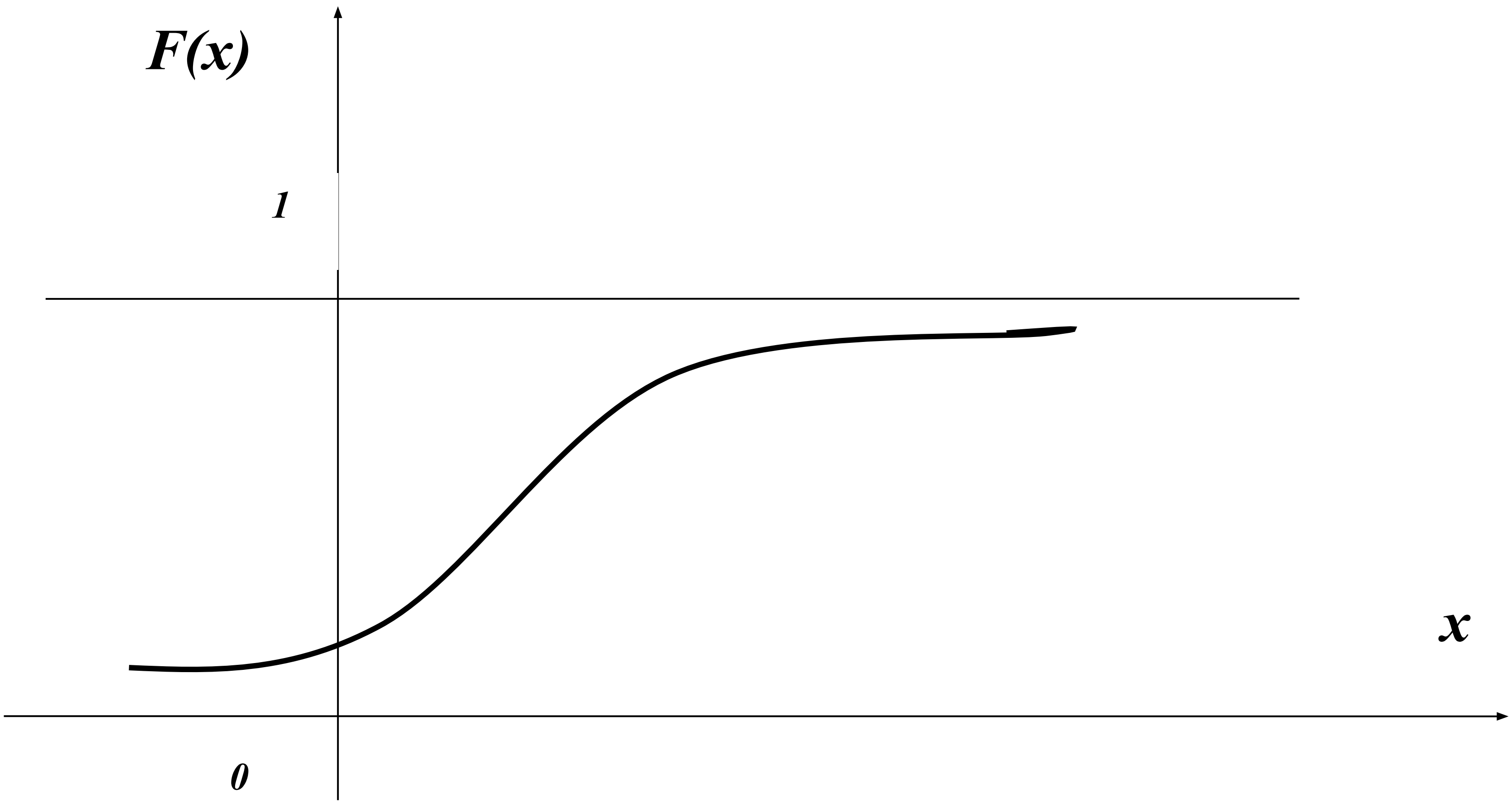
4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.

5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$

6. F(–∞)=0, F(+∞)=1.

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

Вид функции распределения



Функция плотности распределения вероятностей

- 1. $0 \leq F(x) \leq 1$

2. $F(x)$ – неубывающая функция.

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.

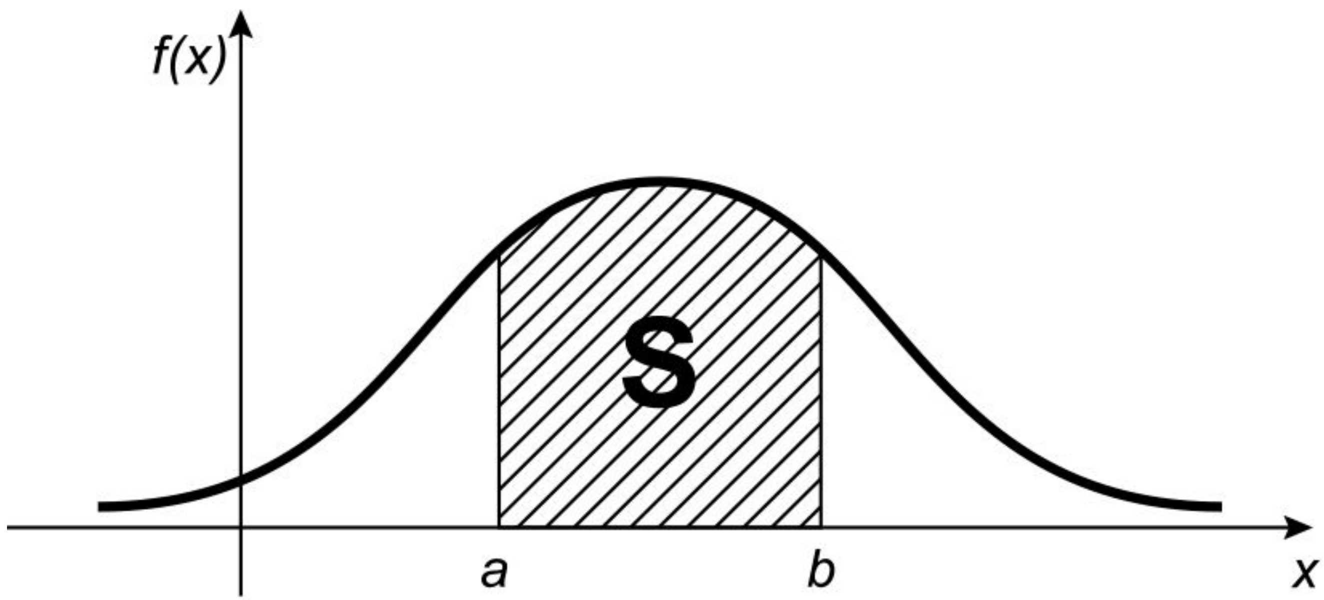
5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$

6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.

5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$.



Свойства функции плотности

1. $0 \leq F(x) \leq 1$

2. $F(x)$ – неубывающая функция.

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.

5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$

6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

Математическое ожидание

1. $0 \leq F(x) \leq 1$

2. $F(x)$ – неубывающая функция.

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.

5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$

6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

Дисперсия

1. $0 \leq F(x) \leq 1$

2. $F(x)$ – неубывающая функция.

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.

5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$

6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

Равномерное распределение

НСВ задается ***равномерным законом распределения,*** если на интервале, которому принадлежат все ее возможные значения, плотность распределения вероятностей постоянна.

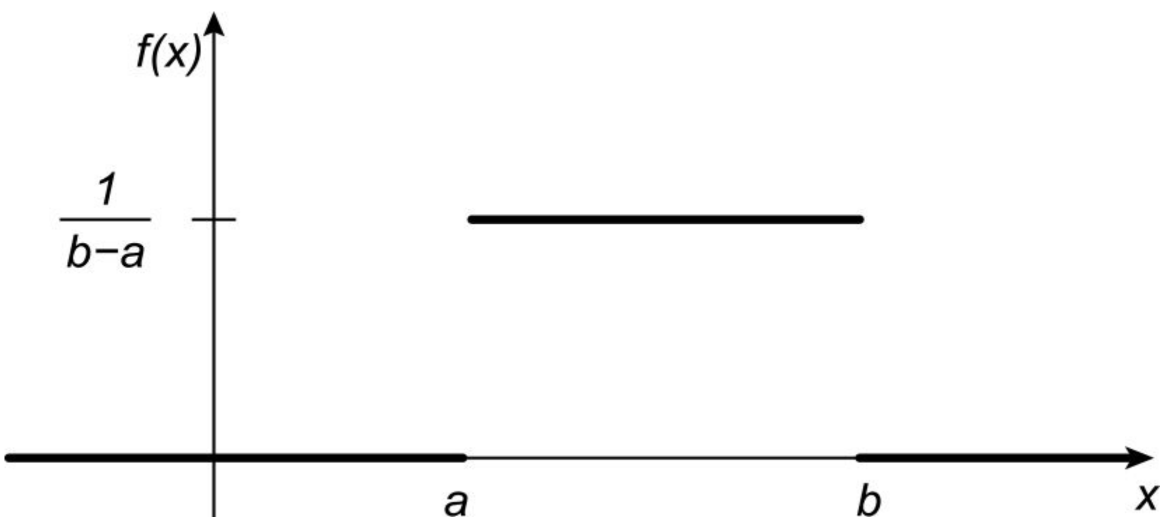
Пример 1. Шкала измерительного прибора проградуирована в некоторых единицах. При считывании показания прибора округляются до целого деления.

НСВ X - ошибка, связанная с округлением равномерно распределена на интервале от 0 до цены деления прибора.

Пример 2. Транспорт ходит строго по графику с интервалом 2 минуты. Время *Т*, в течение которого пассажир, пришедший на остановку будет ждать транспортное средство – равномерно распределённая случайная величина, значения которой принадлежат интервалу от 0 до 2

Плотность равномерного распределения

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $F(x)$ — неубывающая функция.
3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.
4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.
5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(x)=0$, при $x \le a$ и $F(x)=1$, при $x \ge b$
6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.



Функция распределения равномерного распределения

1. $0 \leq F(x) \leq 1$

2. $F(x)$ – неубывающая функция.

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.

5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$

6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

Числовые характеристики равномерного распределения

1. $0 \leq F(x) \leq 1$

2. $F(x)$ – неубывающая функция.

3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.

5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$

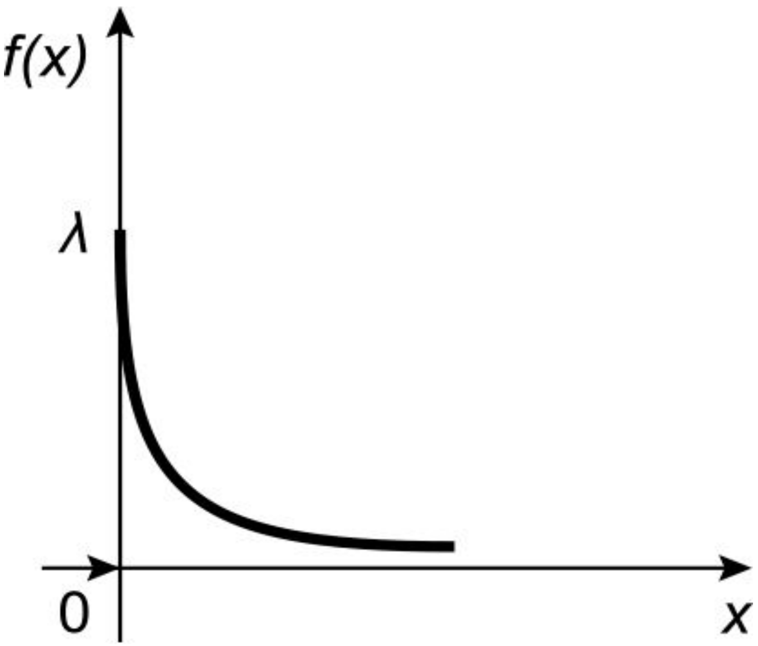
6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

12

Показательное (экспоненциальное) распределение
Плотность распределения вероятностей

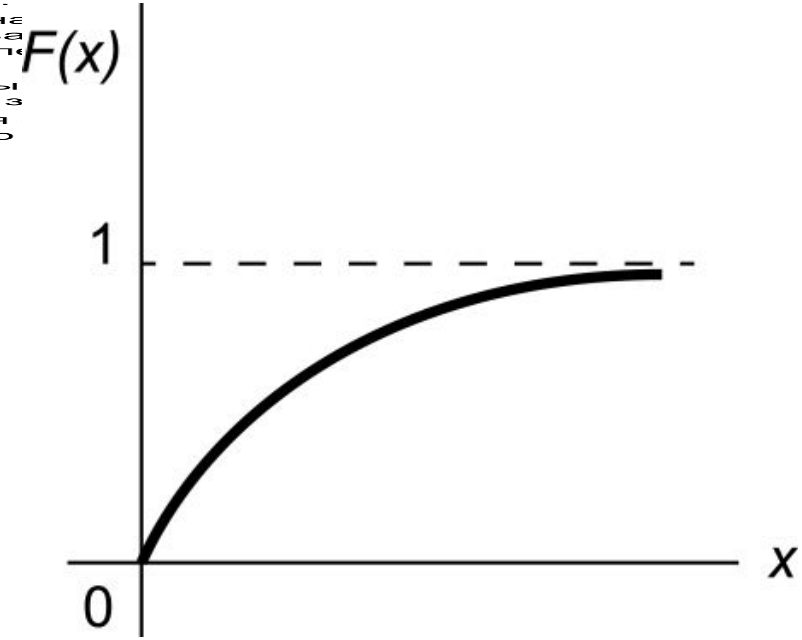
1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x)$ – неубывающая функция.
3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.
4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.
5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$
6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

$$\lambda > 0$$



Функция распределения

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x)$ – неубывающая функция.
3. Вероятность того, что случайна
значение, заключенное в интерва
приращению функции распределе
интервале.
4. Вероятность того, что непреры
величина примет определённое з
5. Если все возможные значения
принадлежат интервалу $(a; b)$, то
$F(x) = 1$, при $x \geq b$
6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.



Числовые характеристики

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x)$ – неубывающая функция.
3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.
4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.
5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$
6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

λ - параметр распределения

14

Применение показательного распределения. Функция надежности

Время T между появлениями двух последовательных событий простейшего потока случайных событий – случайная величина, распределённая по показательному закону.

Время T безотказной работы некоторого устройства имеет показательное распределение, в котором функция распределения определяет вероятность отказа элемента за время t:

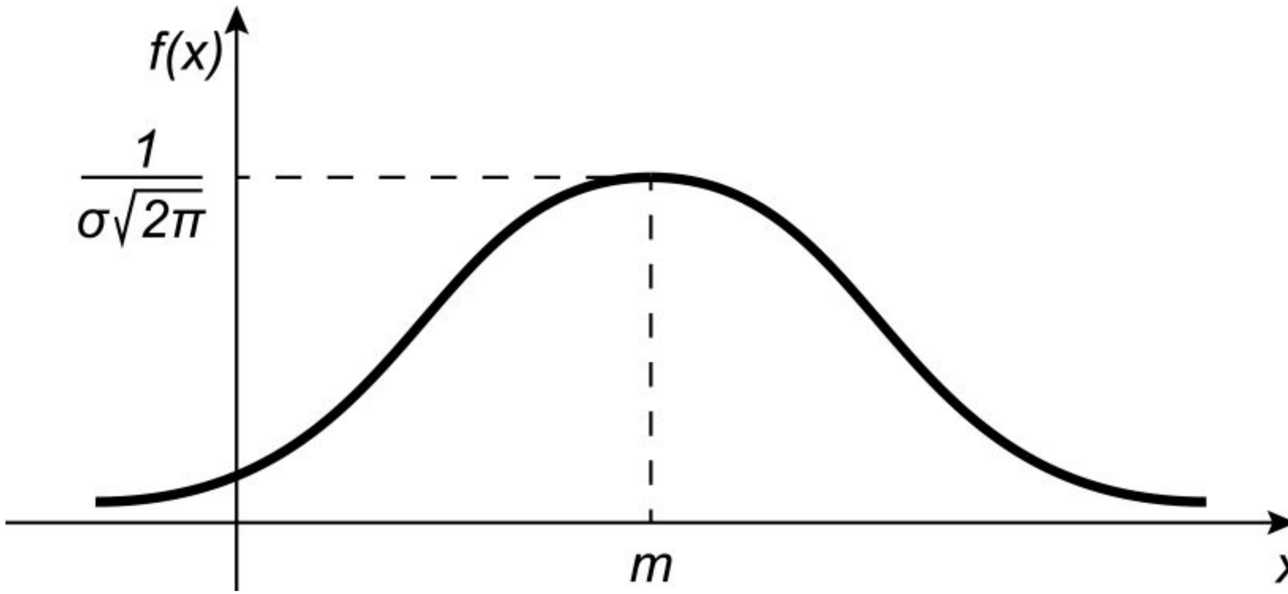
$$F(t) = P\left(T < t\right) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Вероятность безотказной работы за время t

$$R(t) = P\left(T > t\right) = e^{-\lambda t}$$

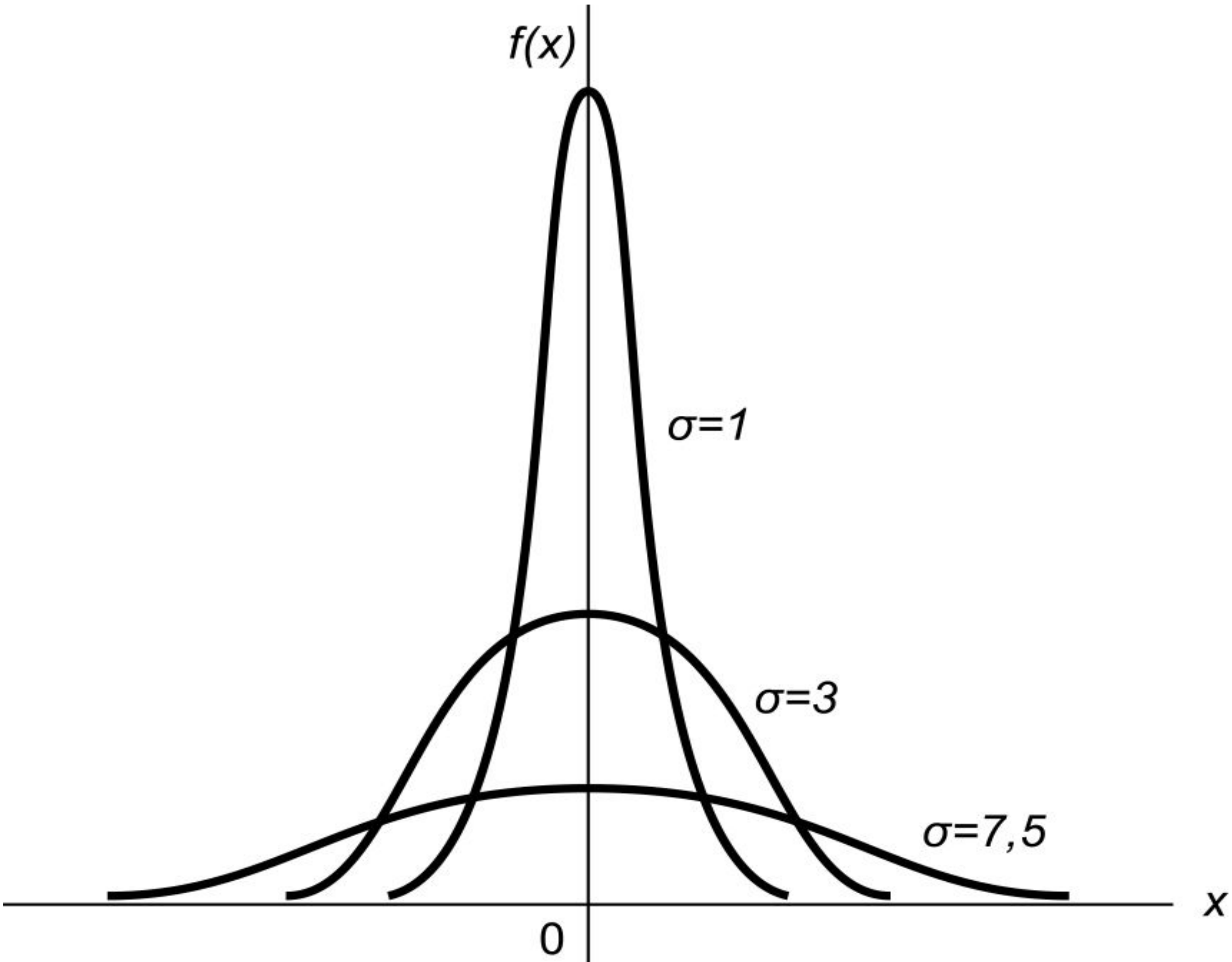
называется ***функцией надежности***

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x)$ — неубывающая функция.
3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.
4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.
5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$
6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.



Параметры распределения $m = M(X)$, $\sigma^2 = D(X)$

Влияние параметров распределения на вид нормальной кривой



Функция распределения

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x)$ – неубывающая функция.
3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.
4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.
5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$
6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x)$ – неубывающая функция.
3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.
4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.
5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$
6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

Вероятность попадания в интервал

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x)$ – неубывающая функция.
3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.
4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.
5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$
6. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

Вероятность отклонения по абсолютной величине от среднего

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x)$ – неубывающая функция.
3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.
4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.
5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$
6. *F*$(-\infty)$=*0*, *F*$(+\infty)$=1.

Правило трёх сигм

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x)$ – неубывающая функция.
3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.
4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.
5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$
6. *F*$(-\infty)$=*0*, *F*$(+\infty)$=1.

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $F(x)$ – неубывающая функция.
3. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$ равна приращению функции распределения на этом интервале.
4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет определённое значение равна нулю.
5. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$, при $x \leq a$ и $F(x) = 1$, при $x \geq b$
6. *F*$(-\infty)$=*0*, *F*$(+\infty)$=1.

Центральная предельная теорема Ляпунова (ЦПТ)

Теорема утверждает, что ***если случайная величина образуется в результате сложения большого числа независимых случайных величин, дисперсии которых малы по сравнению с дисперсией суммы, закон распределения этой случайной величины оказывается практически нормальным законом.***

Одна из формулировок ЦПТ

Пусть СВ *X* имеет конечное *M(X)* и *D(X),* тогда распределение среднего арифметического наблюдаемых значений *X*

$$\overline{X} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

в серии из *n* одинаковых независимых испытаний при $n \to \infty$ приближаться к нормальному закону распределения, то есть

$$P(X < x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{D(X)}{n}}} \int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t - M(X))^2}{2\frac{D(X)}{n}} \right) dt$$

Распределения, связанные с нормальным

Распределение «хи-квадрат»

Пусть X_i (i=1,2,…,n) нормированные, $M(X_i)=0$ $D(X_i)=1$, нормально распределенные СВ, тогда СВ равная сумме их квадратов

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

распределена по закону «хи-квадрат» с $k=n$ степенями свободы. Если эти СВ связаны одним линейным соотношением $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X}$,

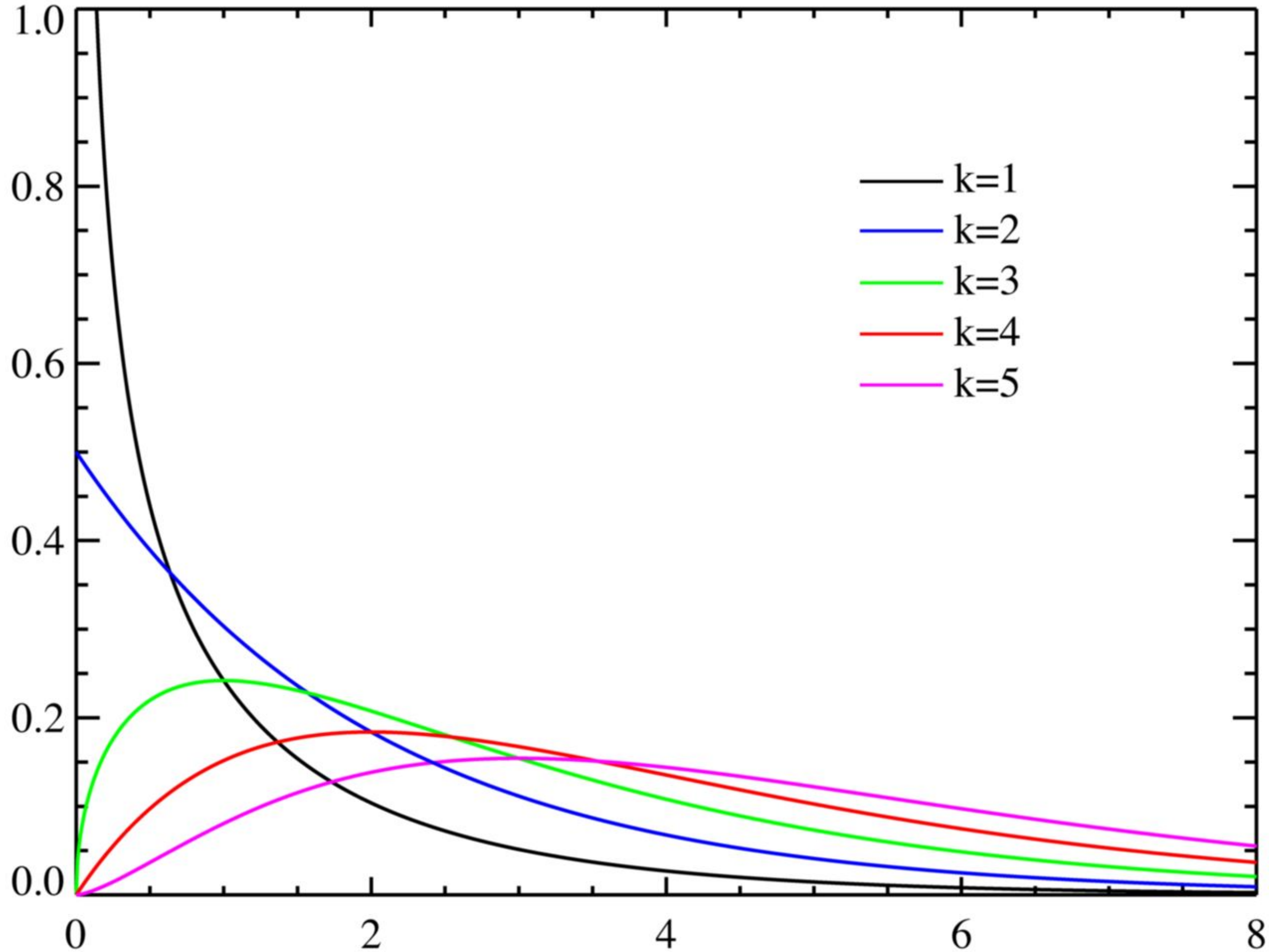
то число степеней свободы $k=n-1$

Плотность распределения *«хи-квадрат»*

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{2^{0,5k}\cdot \Gamma(0,5k)}e^{-0,5x}\cdot x^{0,5k-1}, & x>0\end{cases}$$

Где $\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t}dt$ - гамма- функция

С увеличением числа степеней свободы распределение медленно приближается к нормальному



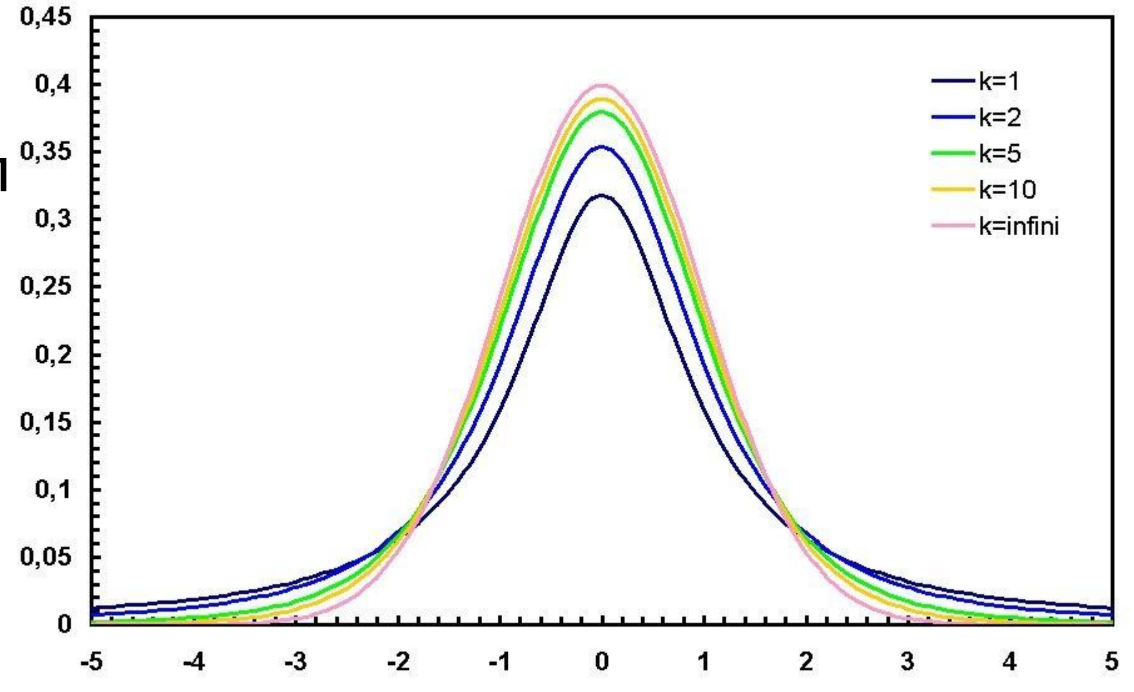
Распределение Стьюдента

Пусть *Z* нормированная нормальная СВ, а *V* независимая от неё СВ, распределенная по закону «хи-квадрат» с *k* степенями свободы. Тогда величина

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V / k}}$$

имеет распределение Стьюдента (*t*- распределение) с *k* степенями свободы.

С возрастанием числ степеней свободы оно быстро стремится к нормальному



Контрольные вопросы по теме лекции

1. Непрерывная случайная величина. Функция распределения и ее свойства.
2. Плотность распределения непрерывной случайной величины, ее свойства.
3. Формулы для вычисления числовых характеристик НСВ.
4. Равномерное распределение, его числовые характеристики.
5. Показательное распределение, его числовые характеристики.
6. Нормальное распределение, его числовые характеристики. Выражение функции распределения через интеграл Лапласа. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный промежуток. «Правило трех сигм».
7. Содержание центральной предельной теоремы.
8. Распределения, связанные с нормальным. Распределение «хи-квадрат», распределение Стьюдента.

Список литературы по теме лекции

1. Письменный Д.В. «Сборник задач по высшей математике», 2 курс Москва, изд. «Айрис», 2010 г. – 592 с. Глава I §§ 9, 10, 11.
3. В. Е. Гмурман «Теория вероятностей и математическая статистика». Москва: «Высшая школа» Глава VI §2, Глава X, XI, XII (§§ 1-8), XIII.
4. В. Е. Гмурман «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике». Москва: «Высшая школа».1999г. Глава VI.
5. Рудаковская Е.Г., Рушайло М.Ф. «Теория вероятностей и математическая статистика», изд. РХТУ, 2012 г. Глава I §§ 5, 6.