§ 3. Обратная матрица

- Опр. 1. Квадратная матрица *A* называется невырожденной, если $|A| \neq 0$, и невырожденной, если $|A| = 0$
- Опр. 2. Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы *A*, если справедливо равенство:

  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где *E* – единичная матрица.

Вычисление обратной матрицы

- Обратная матрица определена только для квадратных невырожденных матриц и вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}^{T}$$

где $\tilde{A}^{T}$ - транспонированная матрица алгебраических дополнений.

§ 4. Ранг матрицы

- ***Опр.*** **1.** *Рангом матрицы A* называется порядок наибольшего отличного от нуля минора этой матрицы. Обозначается ранг матрицы

  r(A) или *rang A*.

  Опр. **2.** Матрицы *A* и *B* называются *эквивалентными*, если r (A)=r(B) (обозначается $A \sim B$).

Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований

Элементарные преобразования матрицы:

- 1. транспонирование;
- 2. перестановка строк (столбцов);
- 3. умножение строки (столбца) на число не равное нулю;
- 4. прибавление к элементам строки (столбца) матрицы элементов другой строки (столбца), умноженных на некоторое число;
- 5. отбрасывание одной из двух пропорциональных (в частности, равных) строк;
- 6. отбрасывание нулевой строки (столбца) матрицы.

- **Теорема 1.** *Элементарные преобразования матрицы не меняют её ранга.*
- ***Теорема 2.*** *Ранг ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк.*

Понятие линейной комбинации и линейной зависимости

- **Опр 3**. Линейной комбинацией системы

$x_1,\ldots x_n$ наз. сумма $a_1x_1+a_2x_2+\ldots a_nx_n$, где $a_1,\ldots a_n$- произвольные коэффициенты.

Опр 4. Система $x_1,\ldots x_n$ наз. линейно независимой, если её линейная комбинация равна нулю только в том случае, если $a_1=a_2=\ldots a_n=0$.

Если существует a_i, отличные от нуля, при которых линейная комбинация равна нулю, то система наз. линейно зависимой.

Теорема о ранге матрицы

- Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк(столбцов) матрицы.

§ 5. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

- **Опр.** 1. *Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными* называется система уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные, a_{ij} - коэффициенты при неизвестных, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ - столбец свободных коэфф.

Матричная форма записи СЛАУ

$$AX = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - матрица системы,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ - столбец своб. коэфф. $$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - столбец неизв.

Расширенная матрица системы

- ***Опр. 2.*** Матрица, полученная из м. *A* добавлением справа столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы:
- $$\overline{A} = \left(A\middle|B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

***Опр.* 3.** *Решением системы* $AX=B$ называется упорядоченное множество чисел $(c_1, c_2, ..., c_n)$, удовлетворяющих всем его уравнениям

СЛАУ по виду решений делятся на два вида:

- **совместные** (имеющие решения)
- **несовместные** (не имеющие решений).

Совместные СЛАУ в свою очередь делятся на два вида:

- **определенные** (имеющие единственное решение)
- **неопределенные** (имеющие бесконечно много решений).

***Опр.* 4.** Две СЛАУ называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

- **Теорема 1.** *Элементарные преобразования переводят данную СЛАУ в равносильную ей СЛАУ.*
- **Теорема 2** *(Кронекера - Капелли). Для того чтобы СЛАУ была совместной, н. и д., чтобы ранг основной матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы системы* $r(A)=r(\overline{A})$.
- *Если* $r(A)=r(\overline{A})=n$
- *(n – число неизвестных), то система имеет единственное решение. Если* $r(A)=r(\overline{A})<n$
- *то система имеет бесконечно много решений.*

Неоднородные и однородные СЛАУ

- СЛАУ делятся на два типа по виду правой части:
- 1. $AX=0$ – однородные СЛАУ
- 2. $AX=B$ – неоднородные, если $B \neq 0$

Миноры: произвольные, дополнительные, базисные

- **Опр 5**. Минором порядка n произвольной матрицы A называется определитель M*, расположенный на пересечении каких-либо *n* строк и *n* столбцов.

  Если матрица A квадратная, то минору M* соответствует дополнительный минор M.

- **Опр. 6**. Дополнительным минором к минору M* называется минор M, полученный вычеркиванием строк и столбцов, составляющих минор M* .

Базисный минор

- **Опр 7**. В матрице А минор М* порядка r называется базисным, если он отличен от нуля, а все остальные миноры большего порядка равны нулю или таких миноров нет.
- В матрице может быть несколько разных базисных миноров, но все они имеют один и тот же порядок.

Теорема о базисном миноре

- В произвольной матрицу А каждый столбец(строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.
- **Следствие 1**. Если матрица А – квадратная, то один из столбцов является линейной комбинацией других столбцов, одна из строк – линейной комбинацией других строк.

- **Следствие 2.** Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов этой матрицы.

Однородные СЛАУ

- Если свободные члены всех уравнений равны нулю, то система наз. однородной.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{12} + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Совместность однородных СЛАУ

Однородные СЛАУ всегда совместны: $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ – нулевое (тривиальное) решение.

- Если у однородной системы $r(A) = r(\overline{A}) = n$, то она имеет только нулевое решение.
- Если у однородной системы $r(A) = r(\overline{A}) < n$, то она имеет бесконечно много решений.
- Если м. А однородной системы – квадратная, то однородная система имеет ненулевые решения т. и т.т., когда $|A| = 0$

Фундаментальная система решений однородной СЛАУ (ФСР)

- Теорема 1. Если однородная СЛАУ имеет два решения, то любая их линейная комбинация также является решением.
- Пусть однородная СЛАУ имеет k ненулевых линейно независимых решений $X_1, X_2, \ldots, X_k$ (ни одно из них нельзя выразить линейно через остальные) . Эти решения образуют *фундаментальную систему решений*, если любое решение системы можно представить в виде:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_k X_k$$

- или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix} + \dots + c_k \cdot \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}$$

Теорема 2. Если ранг однородной СЛАУ равен *r*, то СЛАУ имеет *n-r* линейно независимых решений.

- **Теорема 3**. Любая система из n – r линейно независимых решений однородной СЛАУ является ФСР. Пусть $X_1,\ldots X_{n-r}$ – произвольная ФСР однородной СЛАУ. Тогда любое решение X этой системы представляет собой линейную комбинацию решений $X_1,\ldots X_{n-r}$.

Теорема об общем решении СЛАУ

- Если $X_1,\dots X_{n-r}$ – ФСР однородной СЛАУ, z – некоторое решение соответствующей ей неоднородной СЛАУ, то столбец

$y=z+C_1x_1+\dots.C_{n-r}x_{n-r}$ при любых числах $C_1..C_{n-r}$, является решением соответствующей неоднородной СЛАУ. И, наоборот, для каждого решения этой системы найдутся такие числа $C_1..C_{n-r}$, при которых решение имеет вид $y=z+C_1x_1+\dots.C_{n-r}x_{n-r}$. Теорема верна как для неоднородных, так и для однородных СЛАУ.