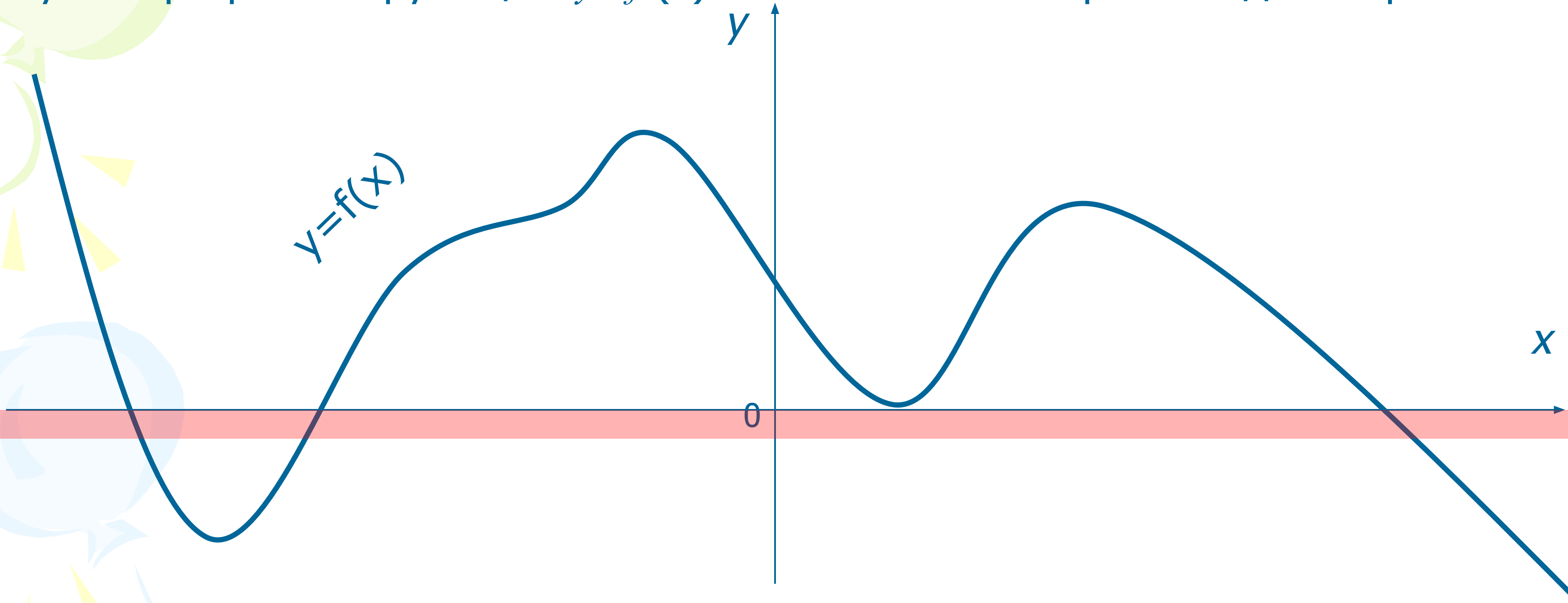
Свойства функции. Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума. Графическая интерпретация

1. Область определения функции

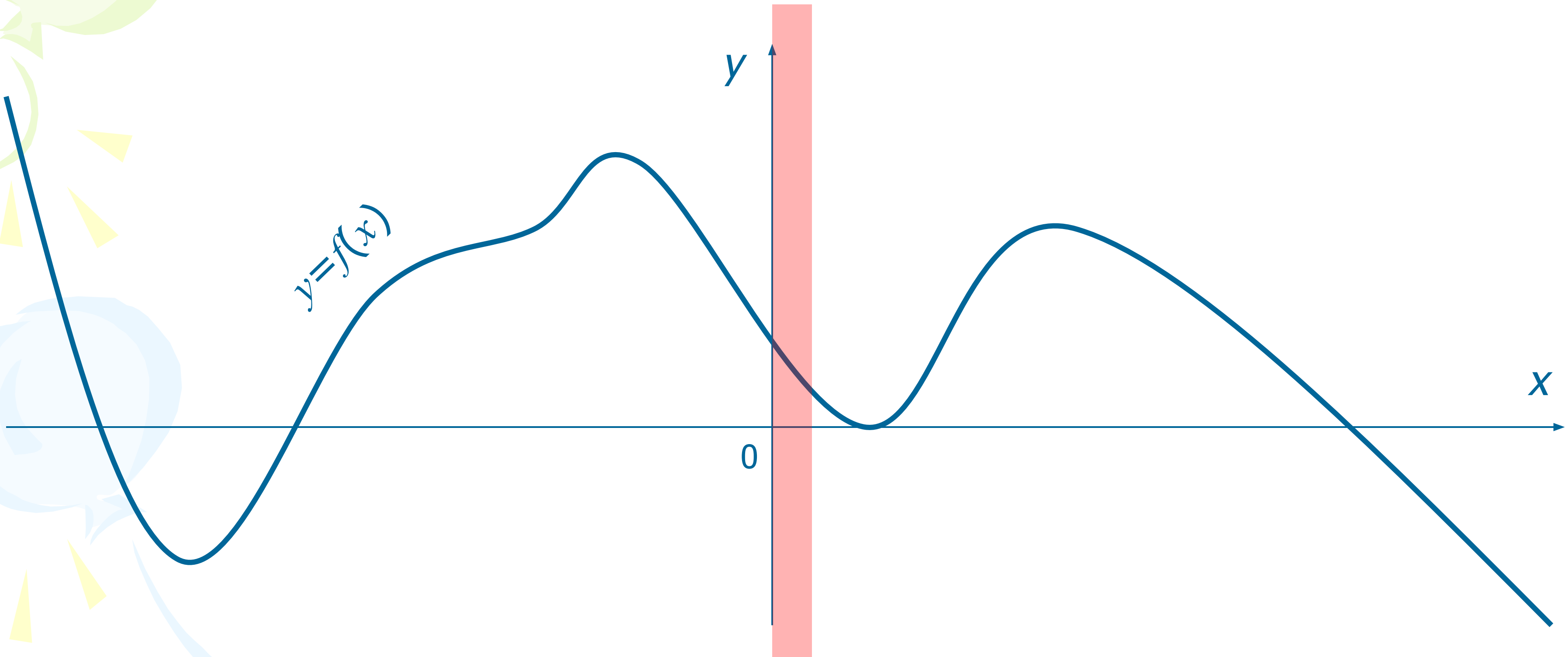
Пусть графиком функции $y=f(x)$ является некоторая гладкая кривая:



Область определения функции (обозначается $D(f)$ или $D(y)$), заданной данным графиком – все возможные абсциссы точек кривой. В нашем случае: $D(f)$ =R или $x \in(-\infty;\ +\infty)$.

Если функция задана в явном виде (формулой), то область определения функции – область допустимых (естественных) значений (ОДЗ) выражения с независимой переменной, которым задается функция.

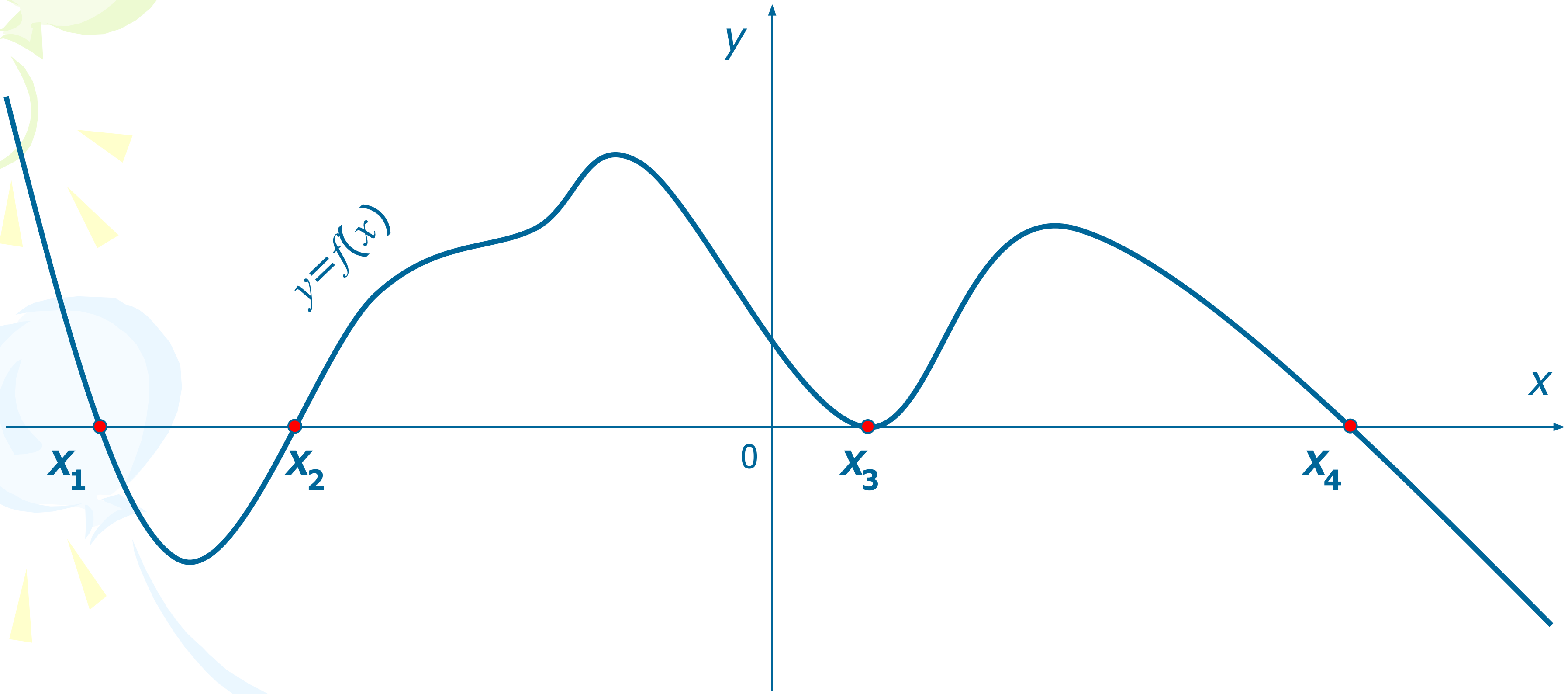
2. Область значений функции



Область(множество) значений функции (обозначается $E(f)$ или $E(y)$), заданной данным графиком – все возможные ординаты точек кривой.

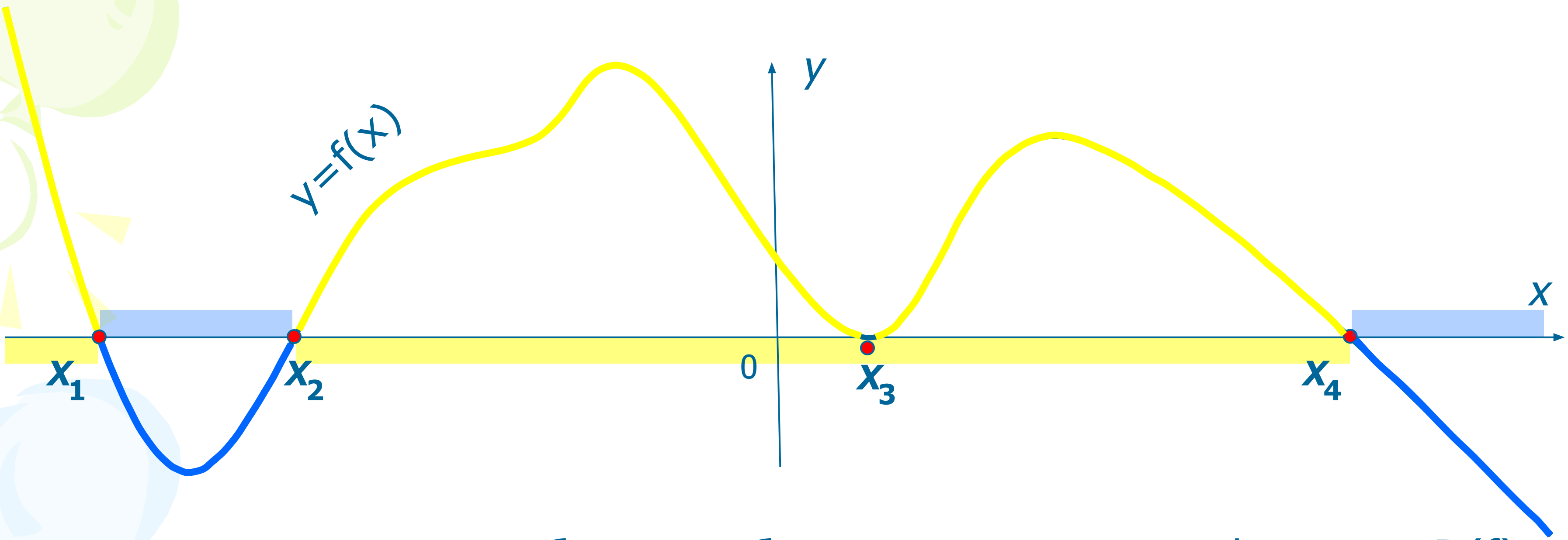
В нашем случае: $E(f)=$□ (или $y\in(-\infty;\ +\infty)$).

3. Нули функции



Очевидно, что D(f)=E(f)=R. Обратим свое внимание на значения аргумента x_1 , x_2 , x_3 , x_4 – в этих точках график функции пересекает ось О*x* или касается её. Это – так называемые *нули функции* (ординаты этих точек равны 0, т.е. $f(x_1)= f(x_2)= f(x_3)= =f(x_4) =0$). Аналитически их можно найти, решая уравнение $f(x)=0$.

4. Промежутки знакопостоянства функции



Точки x_1, x_2, x_3, x_4 разбивают область определения функции D(f) на промежутки знакопостоянства, т.е. промежутки, на которых функция имеет либо положительные значения (f(x)>0), либо отрицательные (f(x)<0). В нашем случае:

$f(x)>0$, при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; x_3) \cup (x_3; x_4)$ и

$f(x)<0$, при $x \in (x_1; x_2) \cup (x_4; +\infty)$.

Для нахождения промежутков знакопостоянства функции y=f(x), заданной в явном виде необходимо решить неравенства f(x)>0 (для нахождения промежутков положительности функции) или f(x)<0 (для нахождения промежутков отрицательности). Рационально это делать методом интервалов.

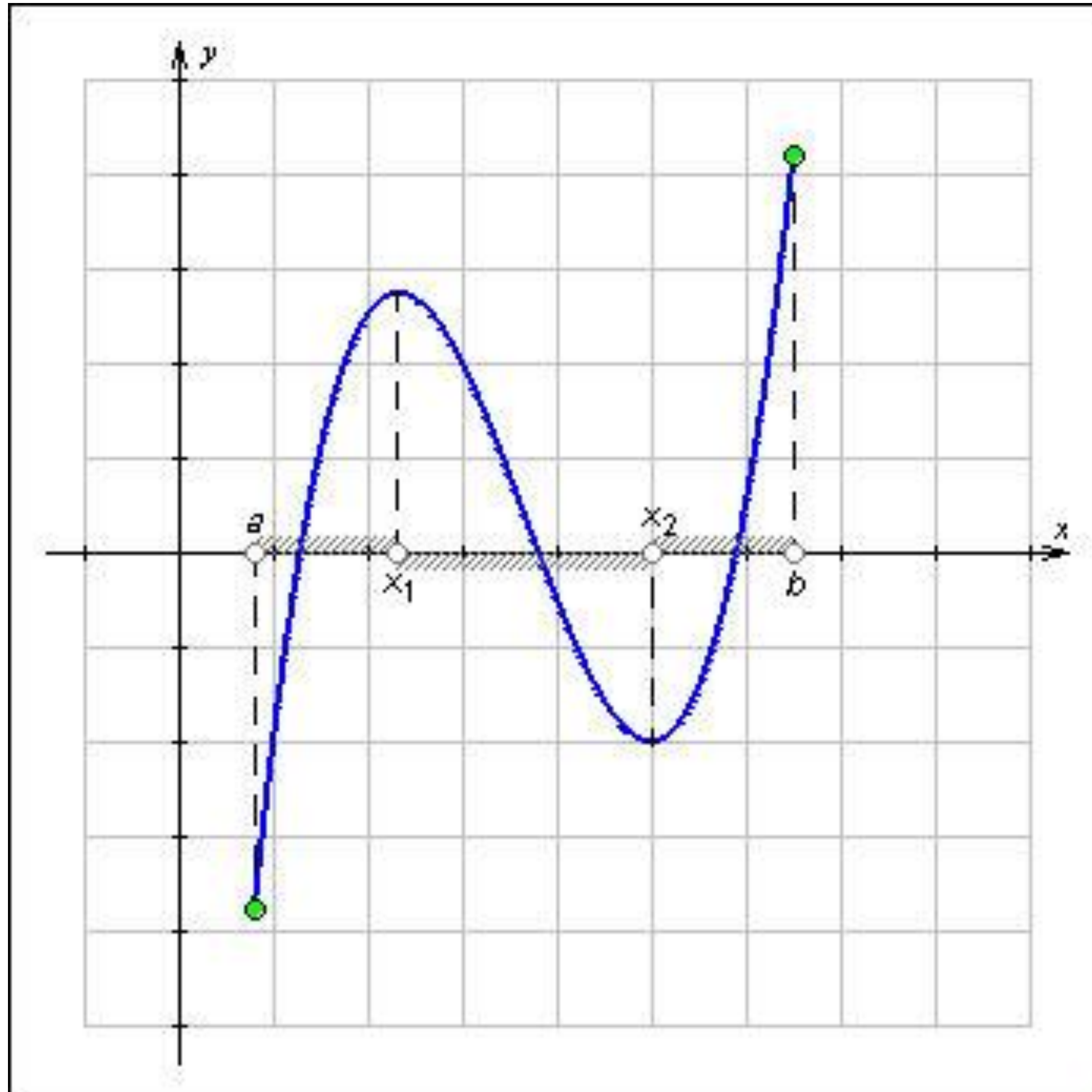
5. Монотонность фунции

- ***Определение***. Функция $y = f(x)$ является *возрастающей* на промежутке *I*, если □для любых $x_1, x_2 \in I$ и $x_1 > x_2$ верно $f(x_1) > f(x_2)$.
- ***Определение***. Функция $y = f(x)$ является *убывающей* на промежутке *I*, если □для любых $x_1, x_2 \in I$ и $x_1 > x_2$ верно $f(x_1) < f(x_2)$.

Пример:

На показанном графике функция $y = f(x)$, возрастает на каждом из промежутков $[a; x_1)$ и $(x_2; b]$ и убывает на промежутке $(x_1; x_2)$.

Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, то она называется ***монотонной*** на этом промежутке.



6. Точки экстремума –
точки минимума и максимума

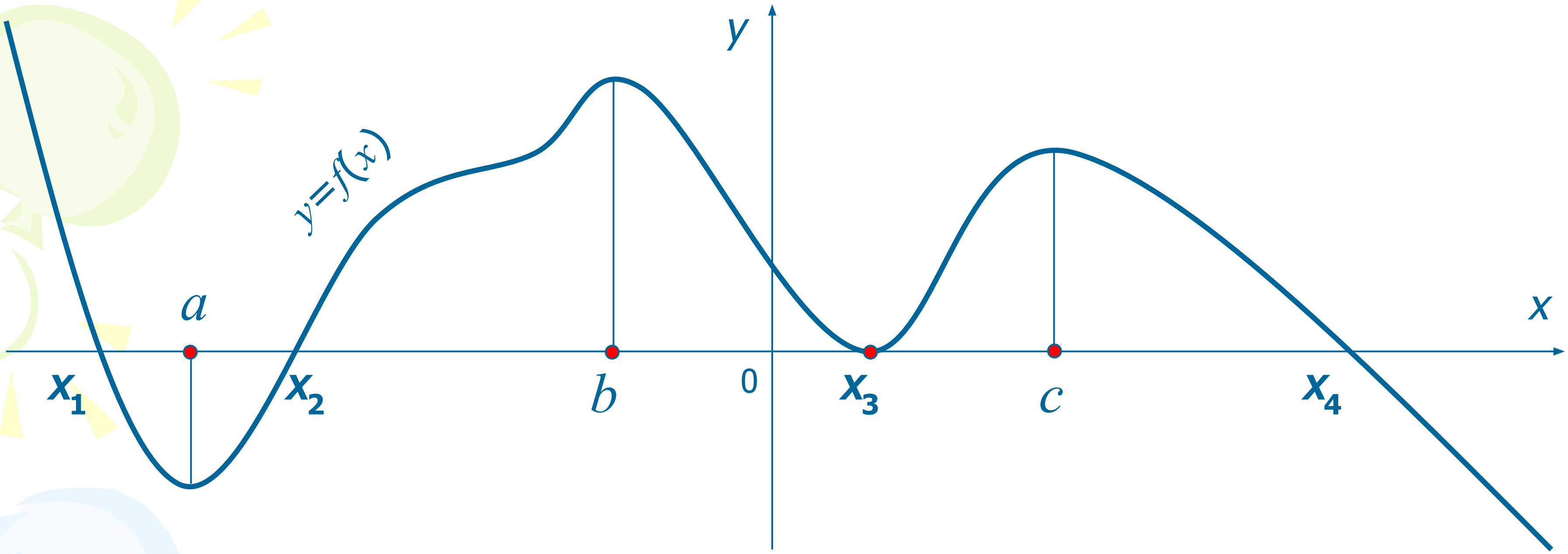
- Точка x_0 называется ***точкой минимума*** функции f, если $\forall x$ из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство

$$f(x) \geq f(x_0).$$

- Точка x_0 называется ***точкой максимума*** функции f, если $\forall x$ из некоторой окрестности x_0 выполнено неравенство

$$f(x) \leq f(x_0).$$

- *Примечание*. Под окрестностью точки x_0 понимается любой интервал $(x_0-\varepsilon;\ x_0+\varepsilon)$, где $\varepsilon \to 0$.



Рассмотрим точки графика с абсциссами a, b, x_3 и c.

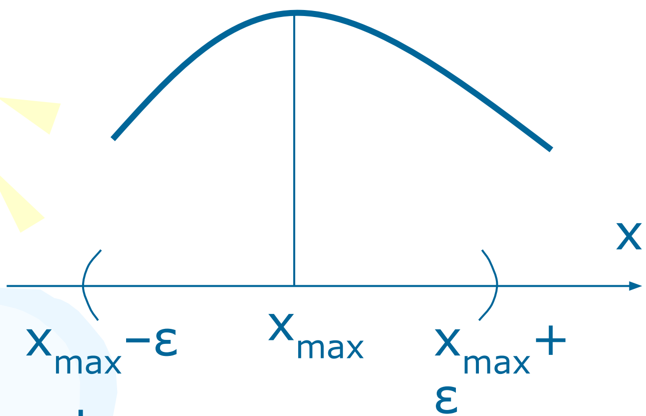
Это так называемые **точки экстремума**, которые бывают двух видов: точки максимума ($x_{max}=b; c$) и точки минимума ($x_{min}=a; x_3$).

Эти точки разбивают *D(f)* на *промежутки возрастания и убывания*.

В нашем случае: функция f(x) возрастает, при $x\in[a;\ b]$, $[x_3;\ c]$ и убывает, при $x\in(-\infty;\ a]$, $[b;\ x_3]$, $[c;\ +\infty)$.

Обратите внимание, что точки экстремума ***включаются*** как в промежутки возрастания, так и убывания.

Распознать точки максимума и минимума по графику функции очень просто. График функции в окрестности точки максимума выглядят как гладкий "холм" или заостренная "пика":



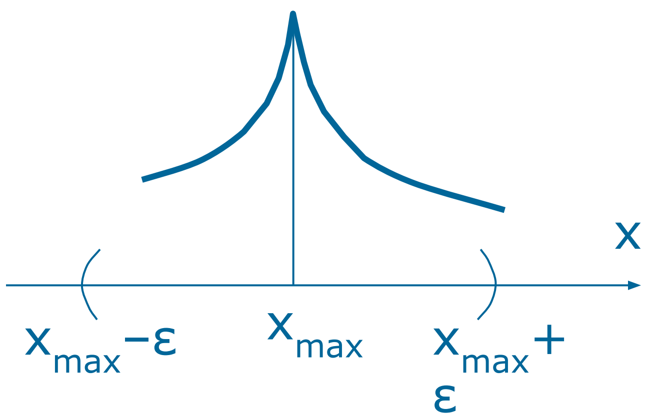
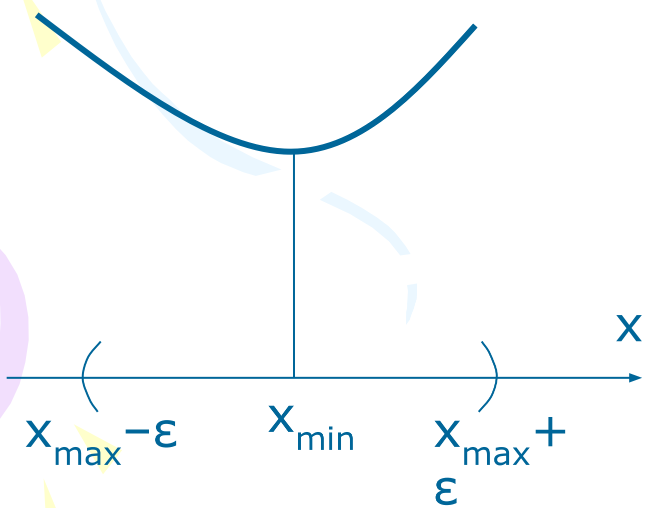
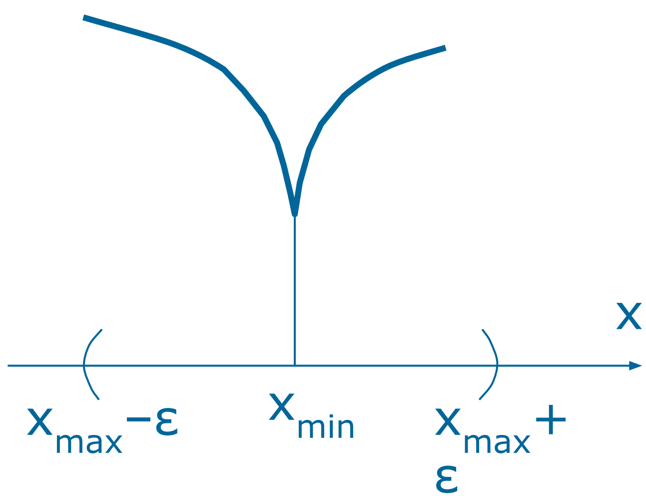
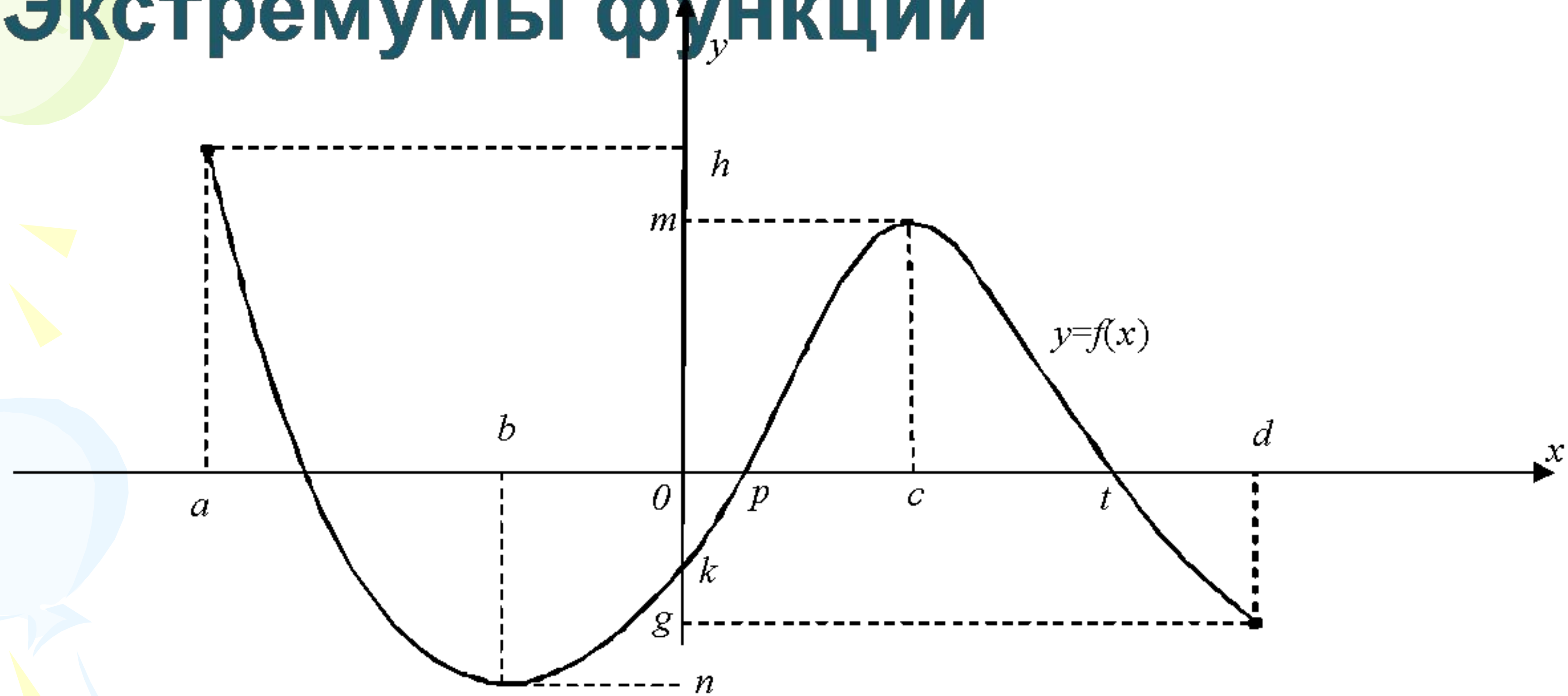


График функции в окрестности точки минимума выглядят как гладкая или заостренная "впадина":





7. Экстремумы функции

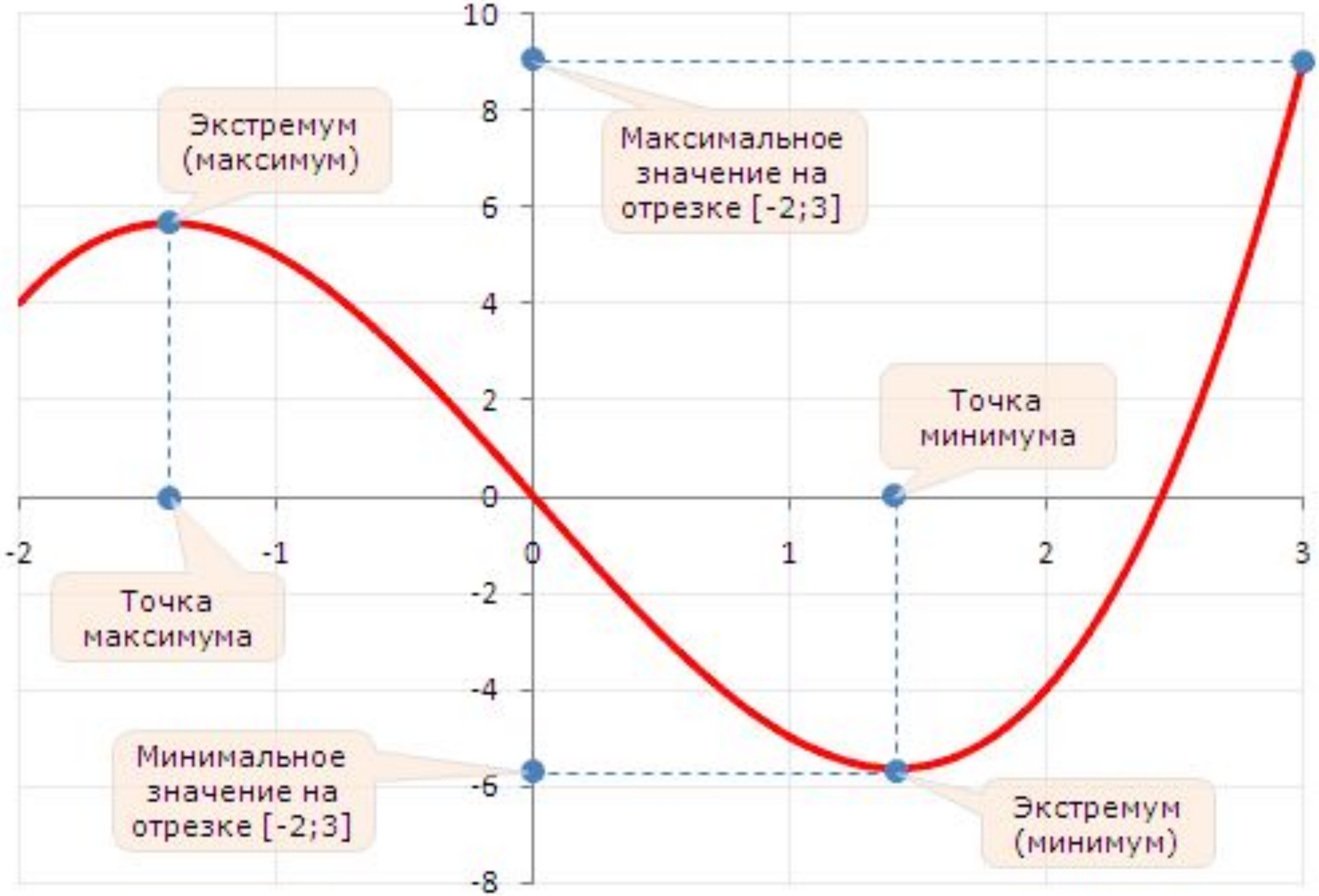


Следует различать такие понятия, как: ***максимум функции*** и ***наибольшее значение функции***, ***минимум функции*** и ***наименьшее значение функции***. Максимум (минимум) функции – это значение функции в точке максимума (минимума). Эти значения могут как отличаться от наибольшего (наименьшего) значений функции, так и совпадать с ними. Например, на рисунке:

$y_{max}=m$, а наибольшее значение функции (специального обозначения нет) равно h.

$y_{min}=n$ и наименьшее значение функции (специального обозначения нет) равно n.

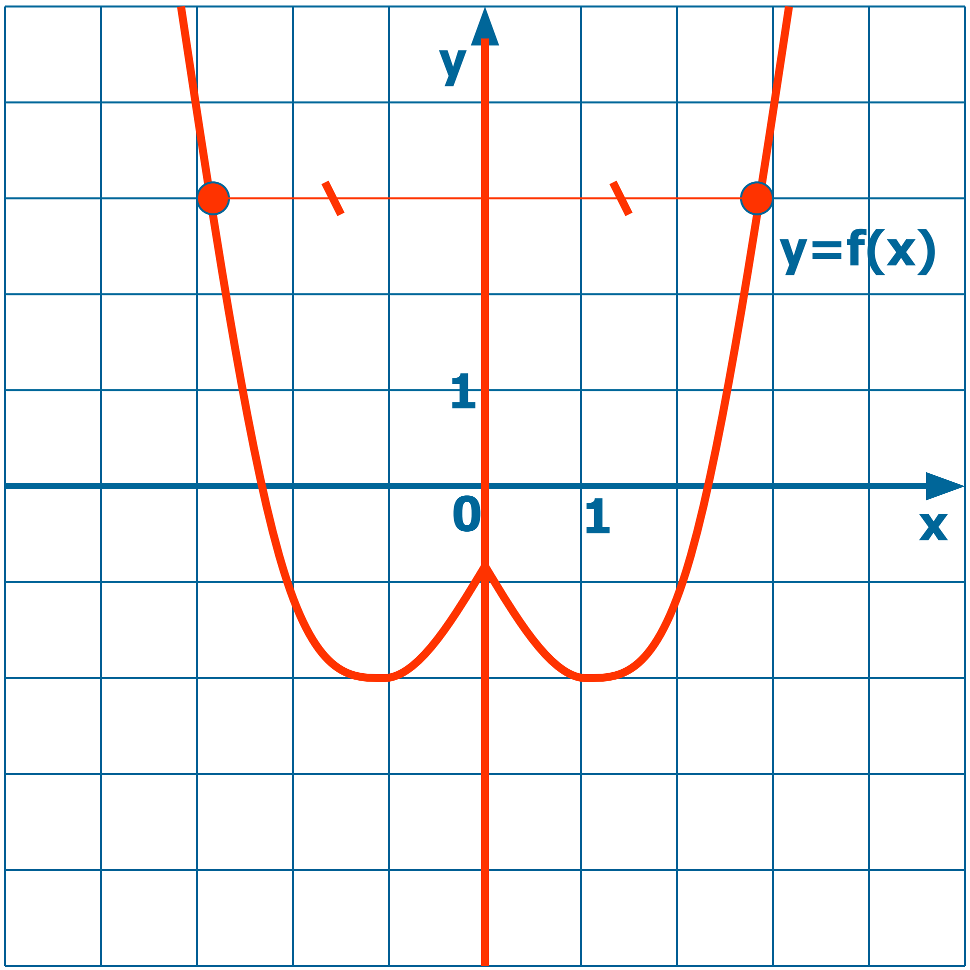
7. Экстремумы функции



8. Четность функции

Функция $y = f(x)$ называется четной, если $\underline{f(-x) = f(x)}$ для любого x из области определения функции

График четной функции симметричен относительно оси ОУ



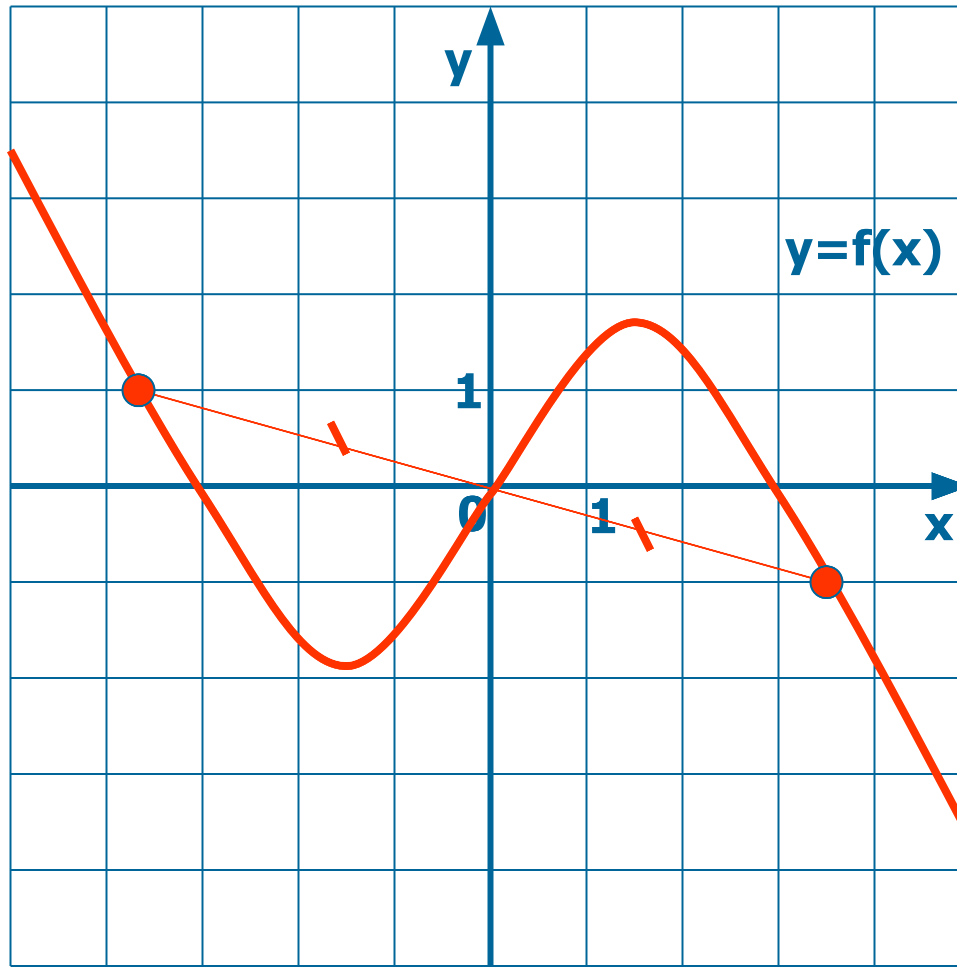
Нечетная функция

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если

<u>$f(-x) = -f(x)$</u>

для любого x из области определения функции

График нечетной функции симметричен относительно начала координат О(0;0)

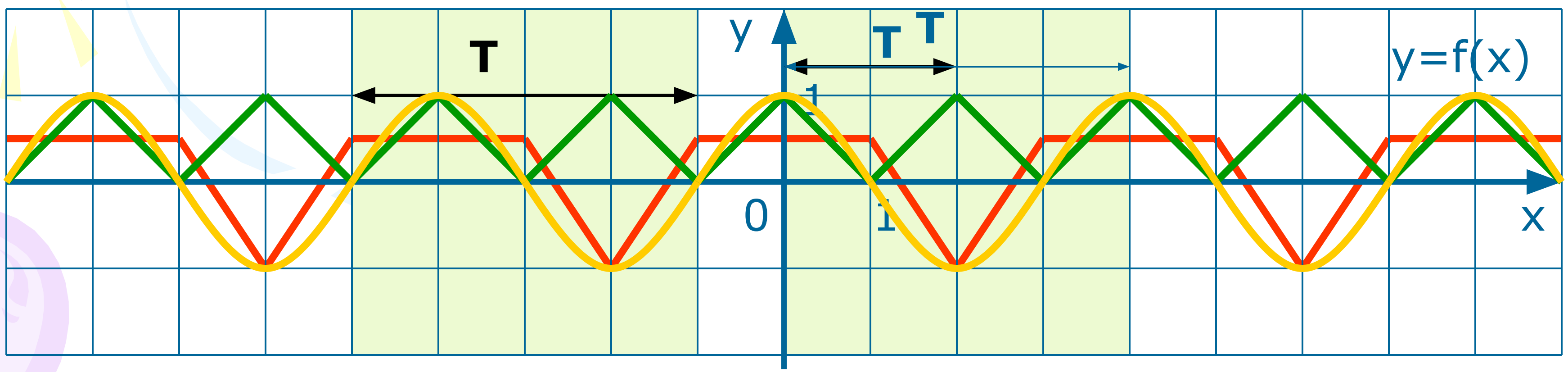


9.Периодичность функции

- Функция называется периодической, если существует такое число Т не равное 0, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T)$$

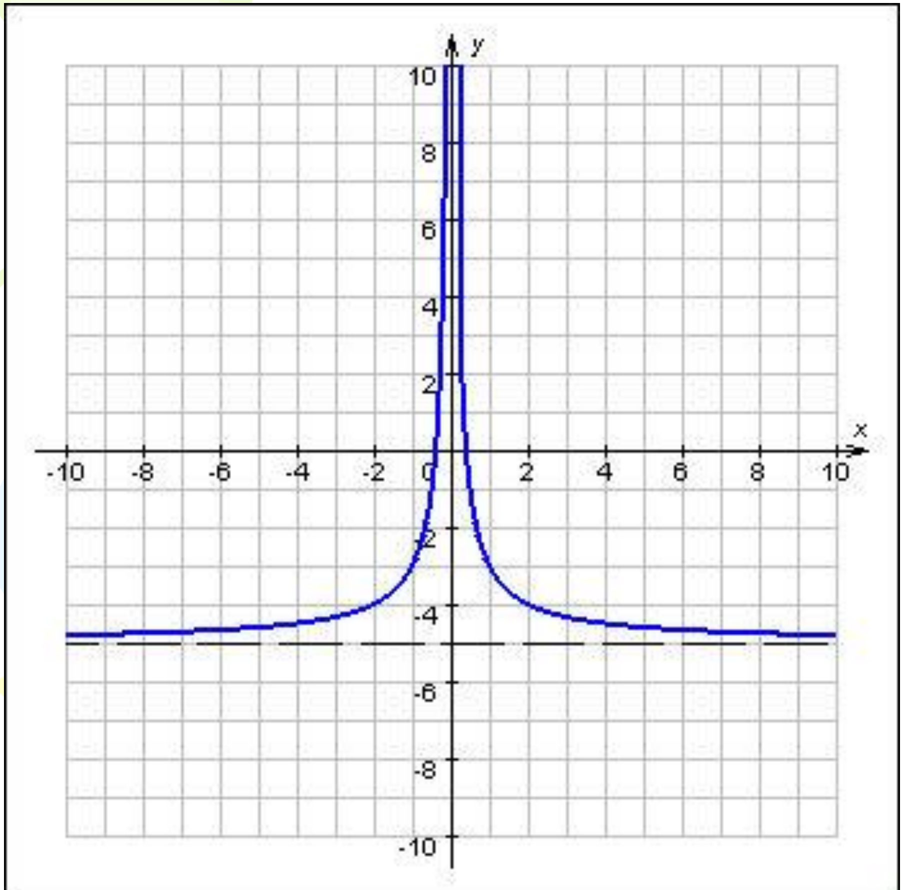
Графики периодических функций:



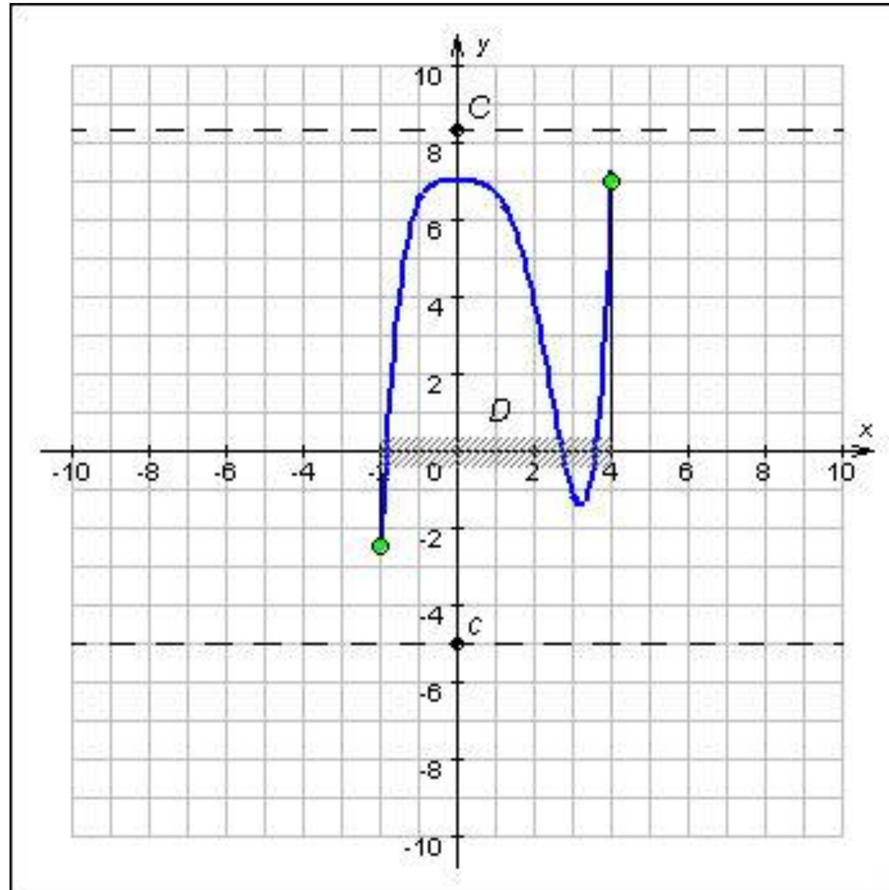
10.Ограниченные функции

- Если существует число C такое, что для любого x выполняется неравенство $f(x) \leq C$, то функция f называется ограниченной сверху на множестве D.
- Если существует число c такое, что для любого x выполняется неравенство $f(x) \geq c$, то функция f называется ограниченной снизу на множестве D.
- Функция, ограниченная и сверху, и снизу, называется ограниченной на множестве D.
- Геометрически ограниченность функции f на множестве D означает, что график функции $y = f(x)$, лежит в полосе $c \leq y \leq C$.

Функция, ограниченная снизу



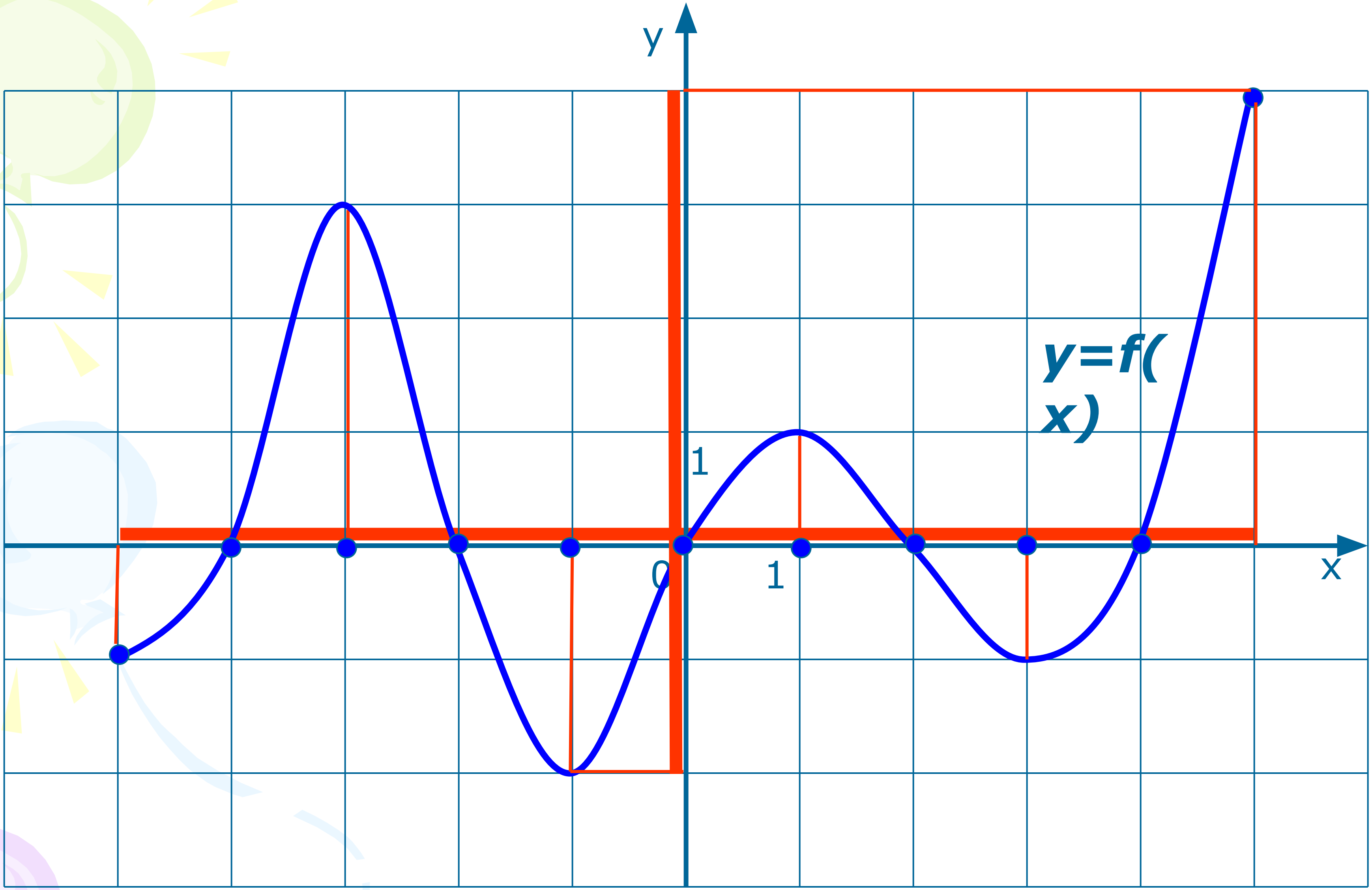
Функция, ограниченная на множестве D



Если функция не является ограниченной на множестве, то говорят, что она не ограничена. Примером функции, ограниченной снизу на всей числовой оси, является функция $y = x^2$. Примером функции, ограниченной сверху на множестве (–∞; 0) является функция $y = 1/x$. Примером функции, ограниченной на всей числовой оси, является функция $y = \sin x$.

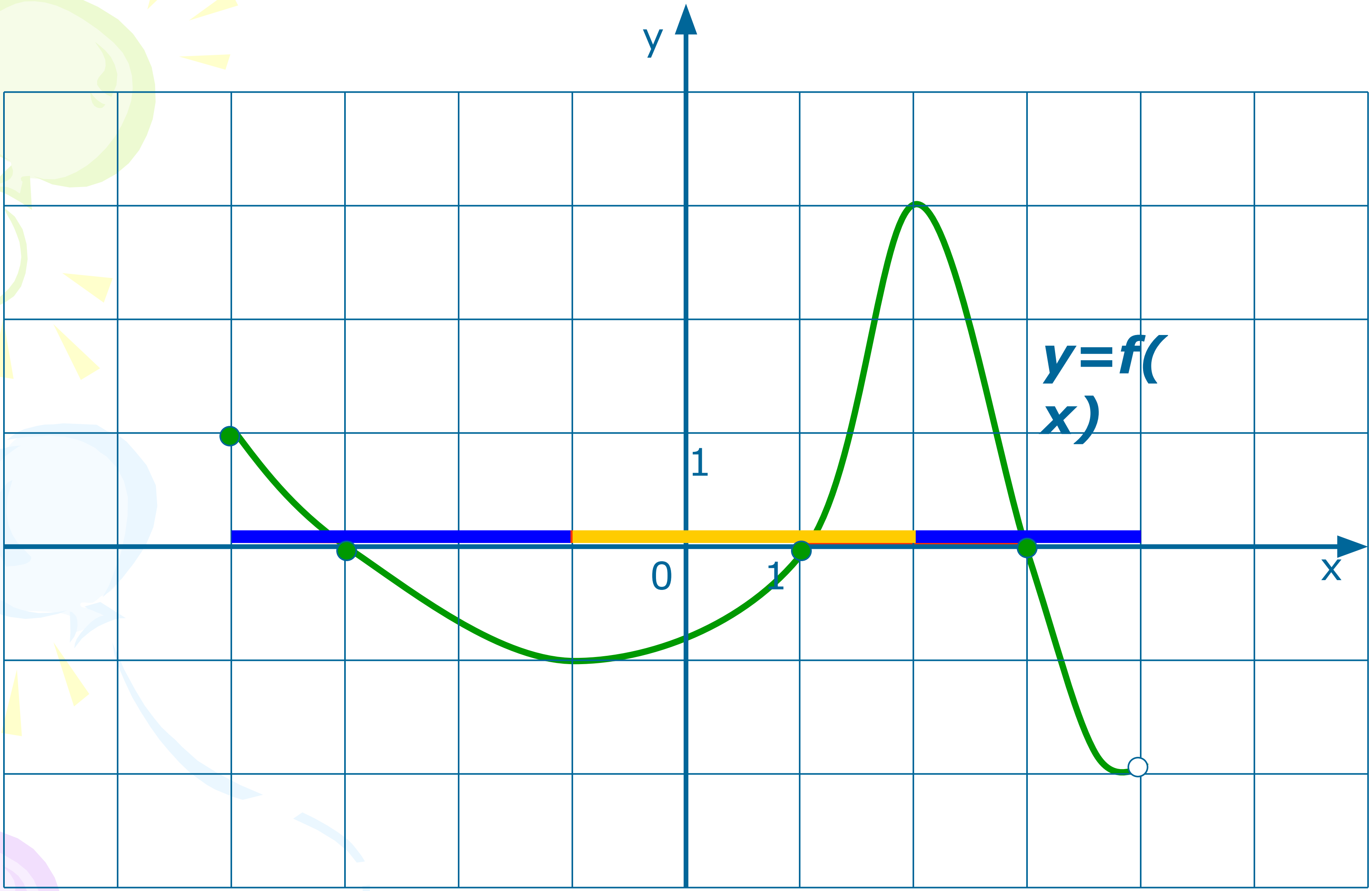
Упражнения:

Чтение свойств функции по графику



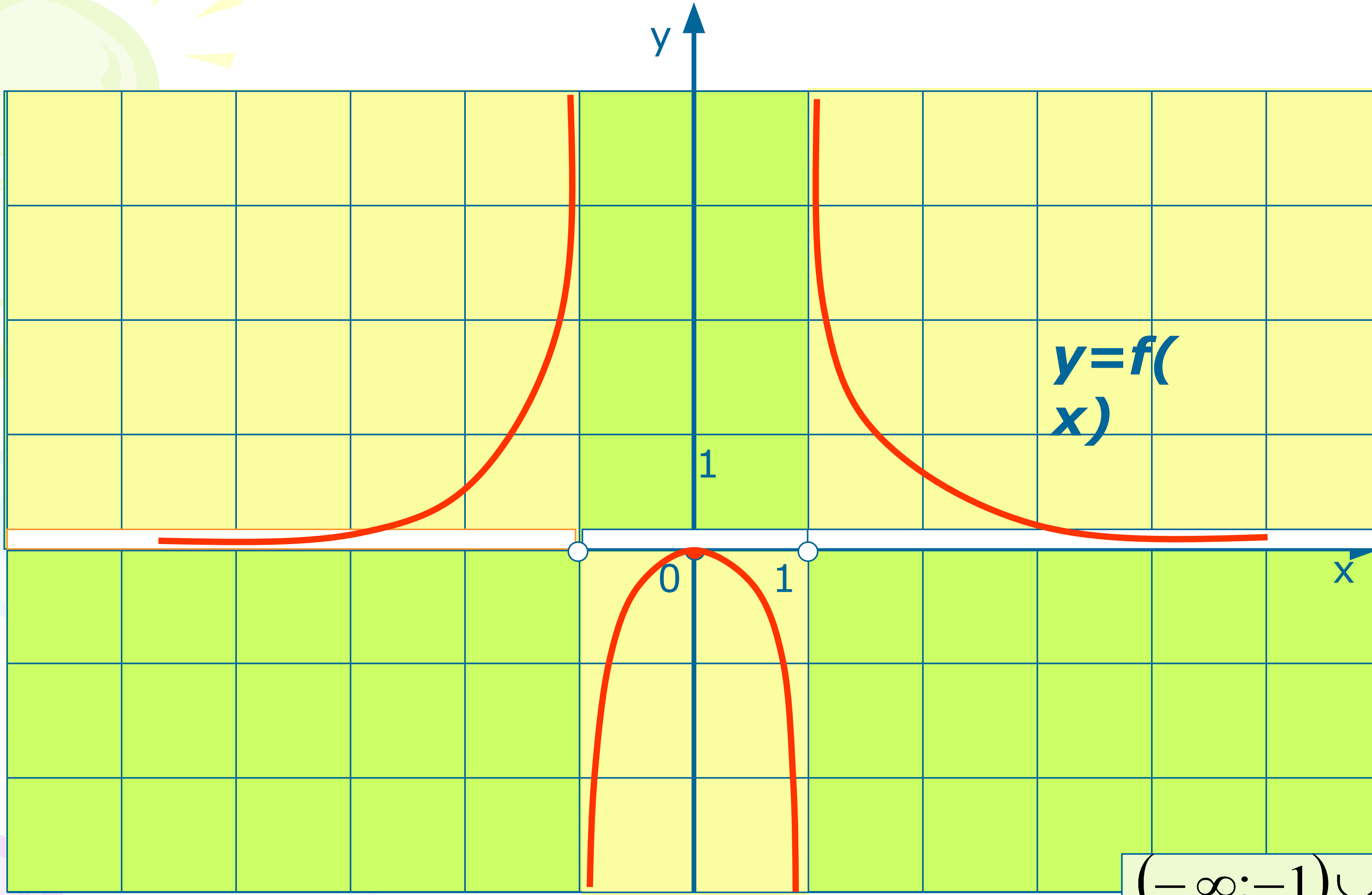
Вопрос: [illegible]ество [illegible] функции?

Ответ: -4;[illegible]2;4



Вопрос:

Ответ:



Вопрос: [illegible] значения x [illegible] функции?

Ответ: $\left(-\infty;-1\right)\cup\left(-1;1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$

Молодцы!
Не забудьте выполнить домашнее задание!