Основы математической обработки информации

Семестр: 1
Лекции: 6
Практические занятия: 10
Контрольная работа: 1
Зачёт

Лекция 5. Стохастические модели

§1. Неопределённость в математических моделях

§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом исходов

§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов

§4. Моделирование дискретных случайных величин

§1. Неопределённость в математических моделях

События, явления, процессы окружающего мира не являются жёстко предопределёнными. В реальной жизни всегда есть место случаю.

Случайным называется **явление**, которое при неоднократном воспроизведении опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Число очков, выпавших на верхней грани кубика.

§1. Неопределённость в математических моделях

События, явления, процессы окружающего мира не являются жёстко предопределёнными. В реальной жизни всегда есть место случаю.

Случайным называется **явление**, которое при неоднократном воспроизведении опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Дальность прыжка на уроке физкультуры.

§1. Неопределённость в математических моделях

События, явления, процессы окружающего мира не являются жёстко предопределёнными. В реальной жизни всегда есть место случаю.

Случайным называется **явление**, которое при неоднократном воспроизведении опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Число взошедших семян при высадке в грунт одного пакета с семенами.

§1. Неопределённость в математических моделях

События, явления, процессы окружающего мира не являются жёстко предопределёнными. В реальной жизни всегда есть место случаю.

Случайным называется **явление**, которое при неоднократном воспроизведении опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Время ожидания автобуса на остановке.

§1. Неопределённость в математических моделях

События, явления, процессы окружающего мира не являются жёстко предопределёнными. В реальной жизни всегда есть место случаю.

Случайным называется **явление**, которое при неоднократном воспроизведении опыта протекает каждый раз несколько по-иному.

Площадь сектора, в который попал дротик при игре в дартс.

§1. Неопределённость в математических моделях

Пусть основные условия опыта, определяющие его протекание в общих, грубых чертах сохраняются неизменными; второстепенные – меняются из опыта в опыт и вносят случайные различия в результаты опытов.

В ряде практических задач этими случайными элементами пренебрегают, полагая, что явление протекает вполне определённым образом. Такова классическая схема построения математической модели в «точных науках»: из бесчисленного множества факторов, влияющих на явление, выделяют основные, решающие, а влиянием второстепенных пренебрегают.

Но существуют и другие задачи. В них многочисленные второстепенные факторы играют заметную роль и пренебречь ими уже нельзя.

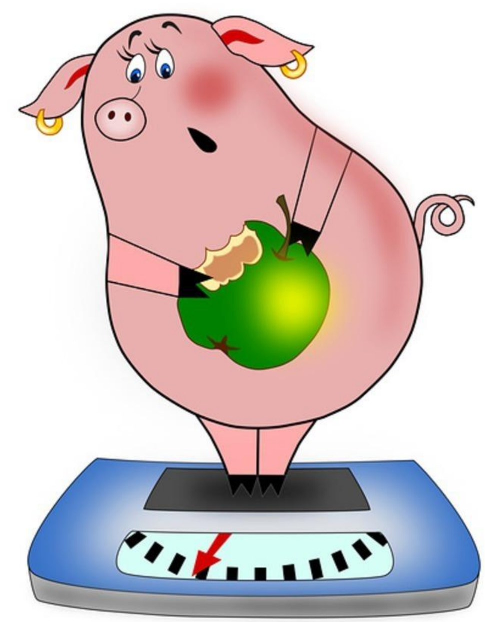
§1. Неопределённость в математических моделях

Испытание: взвешивание тела на аналитических весах.

Событие: весы показывают конкретное значение массы.

Факторы, влияние которых, вносит случайность в результат испытания:

- положение тела на чаше весов;
- случайные вибрации аппаратуры;
- ошибки отсчёта показаний прибора;
- …



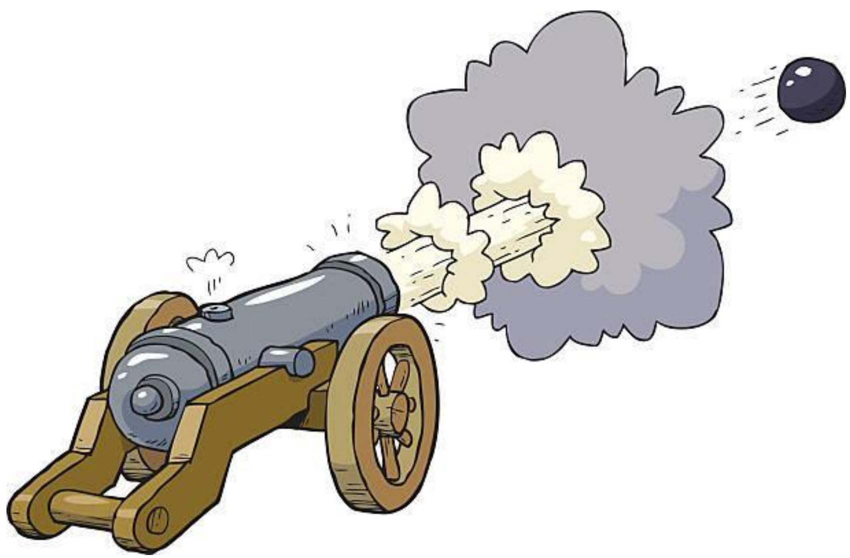
§1. Неопределённость в математических моделях

Испытание: выстрел из орудия, установленного под заданным углом к горизонту.

Событие: снаряд упал в конкретное место.

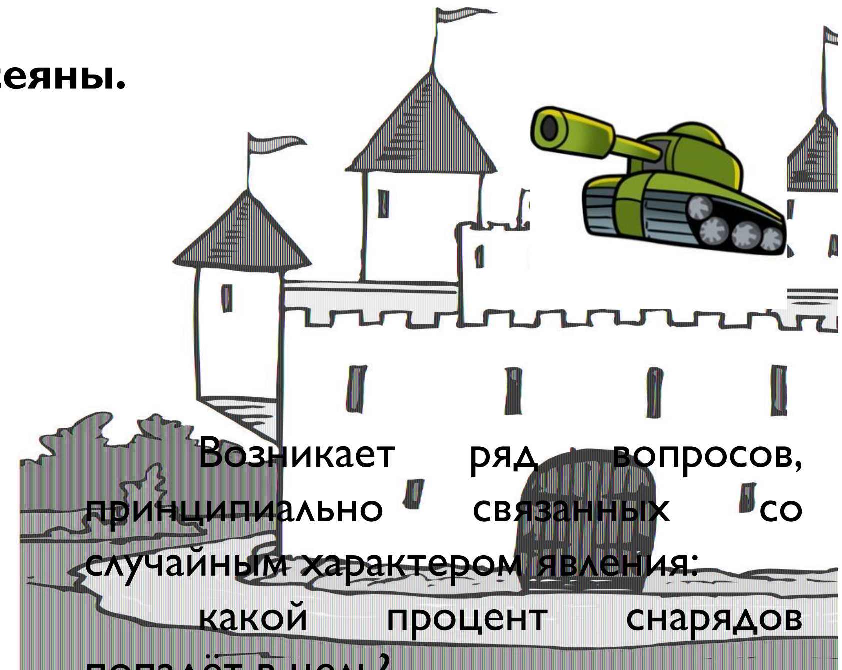
Факторы, влияние которых, вносит случайность в результат испытания:

- ошибки при изготовлении снаряда;
- погрешности при установки орудия;
- метеорологические условия;
- …



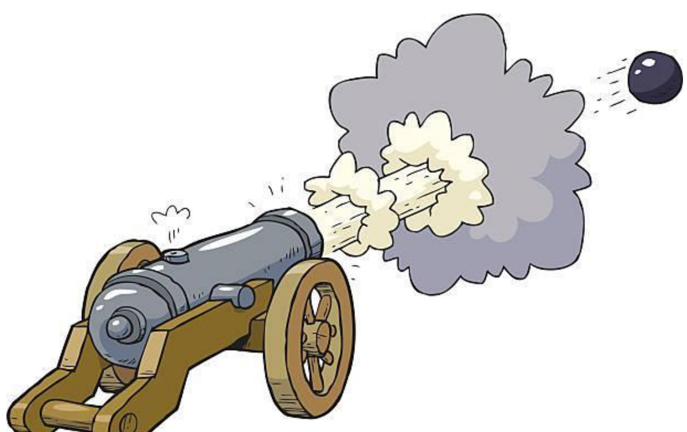
§1. Неопределённость в математических моделях

Точки падения снарядов рассеяны.



Если размеры цели велики, то рассеиванием можно пренебречь.

Если область рассеивания снарядов превышает размеры цели, то некоторые из них не попадут в цель.



Возникает ряд вопросов, принципиально связанных со случайным характером явления:

какой процент снарядов попадёт в цель?

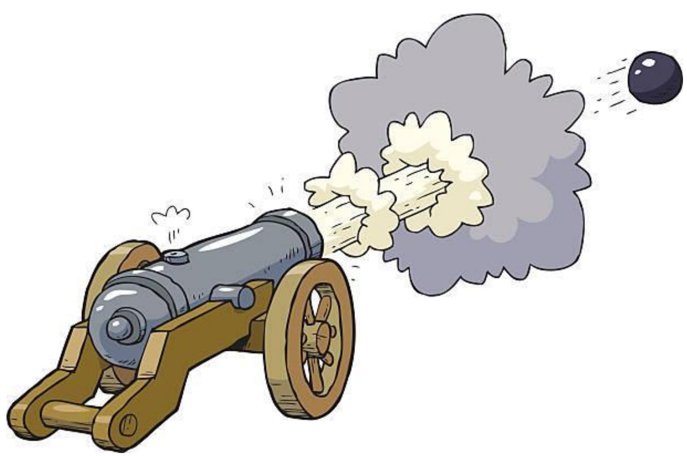
сколько нужно снарядов, чтобы достаточно надёжно поразить цель?

какие принять меры для уменьшения расхода снарядов?

§1. Неопределённость в математических моделях

Возникшие вопросы органически связаны со случайным характером явления. Пренебречь случайностью нельзя. Поэтому необходимо изучить случайное явление рассеивания снарядов с точки зрения закономерностей, присущих этому явлению:

- исследовать закон по которому распределяются точки падения снарядов;
- выяснить случайные причины, вызывающие рассеивание;
- сравнить причины рассеивания по степени значимости;
- …



Какой процент снарядов попадёт в цель?

Сколько нужно снарядов, чтобы достаточно надёжно поразить цель?

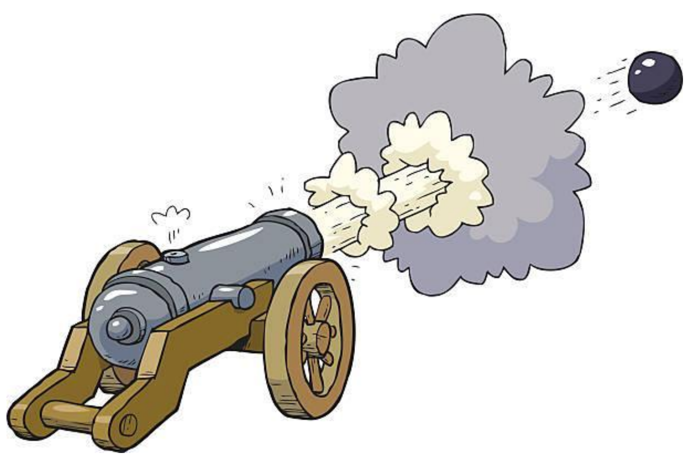
Какие принять меры для уменьшения расхода снарядов?

§1. Неопределённость в математических моделях

Выделение «основных» факторов протекания явления и второстепенных, называемых «случайными», достаточно условно.

Возникает иллюзия, что точность решения каждой задачи с помощью математической модели можно неограниченно повышать, включая в условие всё новые и новые группы факторов.

На практике попытка проанализировать влияние всех факторов, от которых зависит явление, приведёт к непомерной громоздкости и сложности решения, которое к тому же становится практически неосуществимым.

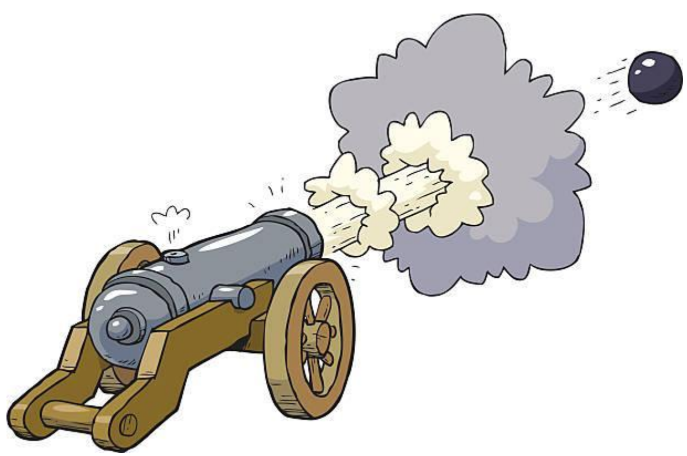


Например, можно поставить и решить задачу об определении траектории конкретного снаряда. Но это решение не только очень сложное, но и не имеет практической ценности, т.к. относится к конкретному снаряду, в конкретных условиях, которые больше никогда не повторятся.

§1. Неопределённость в математических моделях

Неопределённость, сложность, многопричинность случайных явлений требует специальных методов их изучения. Такие методы разрабатываются в **теории вероятностей**.

Наблюдая в совокупности массы однородных случайных явлений, можно обнаружить своего рода **устойчивости**, определённые закономерности, свойственные именно массовым случайным явлениям.

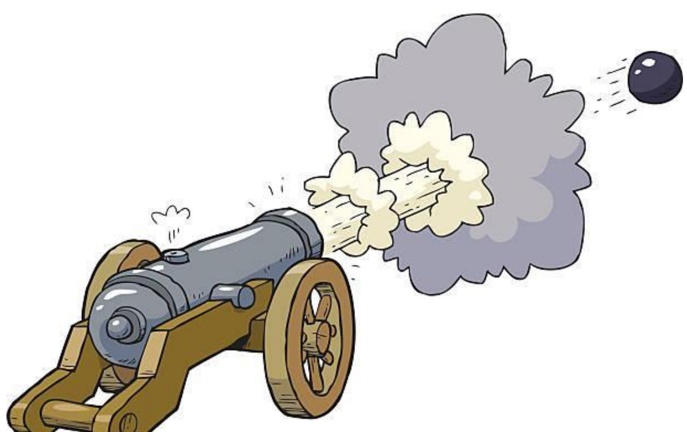


Например, точки падения снарядов распределяются в полном беспорядке. Но по мере увеличения количества выстрелов, в распределении точек начинает наблюдаться некая закономерность. Расположение точек оказывается приблизительно симметричным относительно некой центральной точки.

§1. Неопределённость в математических моделях

Такие «статистические» закономерности имеют место всегда, когда рассматриваются массовые однородные случайные явления. Индивидуальные особенности отдельных случаев как бы взаимно погашаются, нивелируются, и средний результат всей массы случайных явлений оказывается практически **неслучайным**.

Методы теории вероятностей приспособлены для исследования именно массовых случайных явлений, но они не дают возможности предсказать исход отдельного случайного явления.



Вероятностный (статистический) метод в науке не противопоставляется классическому методу «точных наук», а является его дополнением, позволяющим глубже анализировать явление с учётом присущих ему элементов случайности.

§1. Неопределённость в математических моделях

ГЛОССАРИЙ ТЕРМИНОВ

Событие – всякий факт, который в результате опыта (испытания) может произойти или не произойти.

Вероятность события – количественная характеристика степени возможности события.

Достоверное событие – событие, которое непременно произойдёт в результате опыта.

Невозможное событие – событие, которое в данном опыте никогда не произойдёт.

Случайное событие – событие, которое в результате опыта может произойти или не произойти.

§1. Неопределённость в математических моделях

Испытание: ?
Случайное событие: ?

§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом исходов

В основе **классического определения вероятности события** лежит непосредственный подсчёт вероятностей.

Если исходы (события)в опыте:

- образуют **полную группу** (т.е. в результате испытания обязательно должно появиться хотя бы одно из них);
- являются **несовместными** (т.е. никакие два из них не могут появиться вместе);
- являются **равновозможными** (т.е. по условиям симметрии можно считать, что ни одно из них не является объективно более возможным, чем другое),

то вероятность события А вычисляется как отношение числа исходов опыта, благоприятных наступлению события А к общему числу всех возможных исходов.

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом исходов

Какова вероятность того, что ваш будущий ребёнок родится в апреле?

Математическая постановка задачи

1. Обоснование выбора стохастической модели .

Случайным характером явления пренебречь нельзя.

2. Описание опыта.

Испытание: рождение ребёнка.
Событие: ребёнок родился в апреле.
Равновероятные исходы испытания: ребёнок родился в *наугад выбранный день года.*
Число всех исходов: конечно; n.

Задача может быть решена с помощью математической модели равновероятных случайных событий с конечным числом исходов.

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом исходов

Какова вероятность того, что ваш будущий ребёнок родится в апреле?

Аналитическое решение задачи

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{30}{365}$$

Ответ:

$$\frac{30}{365}$$

§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом исходов

Из 15 изготовленных велосипедов 3 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что два выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

Математическая постановка задачи

1. Обоснование выбора стохастической модели .

Случайным характером явления пренебречь нельзя.

2. Описание опыта.

Испытание: выбор двух велосипедов.
Событие: выбраны велосипеды без дефекта.
Равновероятные исходы испытания: *выбраны наугад два велосипеда.*
Число всех исходов: конечно; n.

Задача может быть решена с помощью математической модели равновероятных случайных событий с конечным числом исходов.

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом исходов

Из 15 изготовленных велосипедов 3 оказались с дефектами. Какова вероятность того, что два выбранных наугад велосипеда будут без дефектов?

Аналитическое решение задачи

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{12}^2}{C_{15}^2}$$

$$P(A)=\frac{\dfrac{12!}{2!\cdot 10!}}{\dfrac{15!}{2!\cdot 13!}}=\frac{\dfrac{11\cdot 12}{2}}{\dfrac{14\cdot 15}{2}}=\frac{11\cdot 12}{14\cdot 15}=\frac{22}{35}$$

Ответ:

$$\frac{22}{35}$$

§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом исходов

В группе из 6 юношей и 4 девушек выбирают по жребию четырёх дежурных. Какова вероятность того, что будут выбраны 2 юноши и 2 девушки?

Математическая постановка задачи

1. Обоснование выбора стохастической модели .

Случайным характером явления пренебречь нельзя.

2. Описание опыта.

Испытание: выбор четверых дежурных.
Событие: выбраны 2 юноши и 2 девушки.
Равновероятные исходы испытания: *выбраны наугад четверо дежурных.*
Число всех исходов: конечно; n.

Задача может быть решена с помощью математической модели равновероятных случайных событий с конечным числом исходов.

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

§2. Математическая модель равновероятных случайных событий с конечным числом исходов

В группе из 6 юношей и 4 девушек выбирают по жребию четырё дежурных. Какова вероятность того, что будут выбраны 2 юноши и 2 девушки?

Аналитическое решение задачи

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^2\cdot C_4^2}{C_{10}^4}=\dots$$

Ответ:

$$\frac{3}{7}$$

§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов

Классическое определение вероятности не применимо к опытам с бесконечным числом исходов. В таких случаях используют понятие **геометрической вероятности.**

Если исходы (события)в опыте:

- образуют **полную группу** (т.е. в результате испытания обязательно должно появиться хотя бы одно из них);
- являются **несовместными** (т.е. никакие два из них не могут появиться вместе);
- являются **равновозможными** (т.е. по условиям симметрии можно считать, что ни одно из них не является объективно более возможным, чем другое)

и *число их бесконечно*, то вероятность события А вычисляется как отношение **меры множества** исходов опыта, благоприятных наступлению события А к мере множества всех возможных исходов.

$$P(A)=\frac{mes\ M}{mes\ N}$$

§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов

Замечание.

Согласно введённому определению **вероятность того, что случайная точка попадёт в конкретную точку области равна нулю**. (Мера множества, состоящего из одной точки равна нулю).

Однако это событие может произойти и, следовательно, не является невозможным. В отличие от классического определения, когда равенство вероятности нулю равносильно тому, что событие невозможно.

Моделирование случайных явлений с применением определения геометрической вероятности состоит в описании множества всех возможных исходов опыта и множества исходов, благоприятных наступлению события.

В простейших случаях эти описания очевидно вытекают из условия. Иногда возникает необходимость ввести прямоугольную систему координат и описать соответствующие множества методом координат.

$$P(A)=\frac{mes\ M}{mes\ N}$$

§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов

Найдите вероятность того, что точка, брошенная наугад в квадрат, попадёт внутрь вписанного круга.

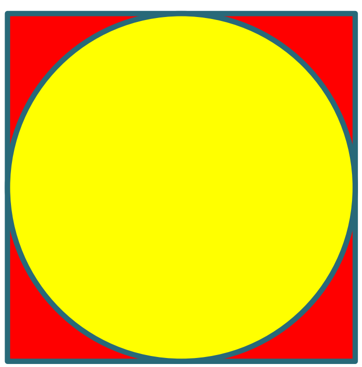
Математическая постановка задачи

1. Обоснование выбора стохастической модели .

Случайным характером явления пренебречь нельзя.

2. Описание опыта.

Испытание: выбор точки внутри квадрата.
Событие: выбранная точка находится внутри круга.
Равновероятные исходы испытания: *выбрана наугад точка в квадрате.*
Число всех исходов: бесконечно.



Задача может быть решена с помощью математической модели равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов.

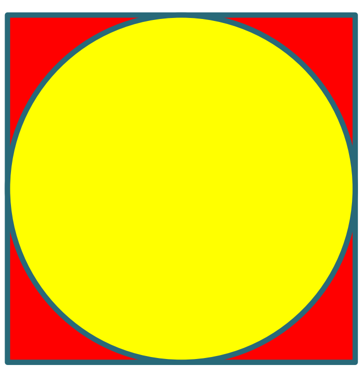
$$P(A)=\frac{mes\ M}{mes\ N}$$

§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов

Найдите вероятность того, что точка, брошенная наугад в квадрат, попадёт внутрь вписанного круга.

Аналитическое решение задачи

$$P(A) = \frac{mes\ M}{mes\ N} = \frac{S_{круга}}{S_{квадрата}}$$



$$P(A) = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}$$

Ответ:

$$\frac{\pi}{4}$$

§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов

Оля пообещала подруге Кате позвонить с 9 до 10 часов. Найдите вероятность того, что их разговор начнётся в интервале с 9.20 до 9.25.

Математическая постановка задачи

1. Обоснование выбора стохастической модели .

Случайным характером явления пренебречь нельзя.

2. Описание опыта.

Испытание: выбор момента времени с 9 до 10 часов.

Событие: выбранный момент времени попадает в интервал с 9.20 до 9.25.

Равновероятные исходы испытания: *выбрана наугад точка в течение часа.*

Число всех исходов: бесконечно.

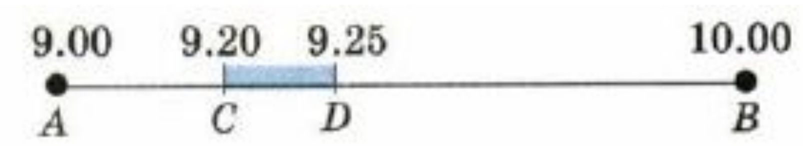
Задача может быть решена с помощью математической модели равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов.

$$P(A)=\frac{mes\ M}{mes\ N}$$

§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов

Оля пообещала подруге Кате позвонить с 9 до 10 часов. Найдите вероятность того, что их разговор начнётся в интервале с 9.20 до 9.25.

Аналитическое решение задачи



$$P(A)=\frac{mes\ M}{mes\ N}=\frac{L_{CD}}{L_{AB}}$$

$$P(A)=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$$

Ответ:

$$\frac{1}{12}$$

§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов

К сигнализатору поступают сигналы от двух устройств, причём поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью Т минут. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 1 минуты. Найдите вероятность того, что сигнализатор сработает за время Т, если каждое из устройств пошлёт по одному сигналу.

§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов

Математическая постановка задачи

1. Обоснование выбора стохастической модели .

Случайным характером явления пренебречь нельзя.

2. Описание опыта.

Испытание: выбор момента подачи сигнала каждым из двух устройств на промежутке времени длиной Т.

Событие: моменты подачи сигнала устройствами отличаются меньше чем на 1 минуту.

Равновероятные исходы испытания: *выбраны наугад 2 момента времени* в диапазоне длины Т.

Число всех исходов: бесконечно.

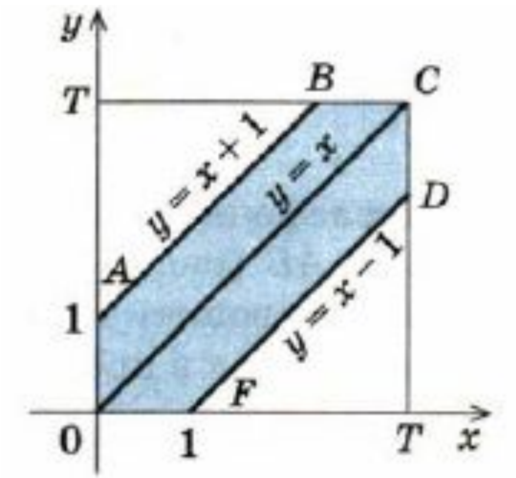
Задача может быть решена с помощью математической модели равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов.

$$P(A) = \frac{mes\ M}{mes\ N}$$

§3. Математическая модель равновероятных случайных событий с бесконечным числом исходов

Аналитическое решение задачи

$$\begin{cases} 0 \le x \le T, \\ 0 \le y \le T. \end{cases}$$



$$|y - x| < 1$$

$$-1 < y - x < 1$$

$$x - 1 < y < x + 1$$

$$P(A) = \frac{mes\ M}{mes\ N} = \frac{S_{шестиугольника}}{S_{квадрата}}$$

$$P(A) = \frac{T^2 - (T-1)^2}{T^2}$$

Ответ: $\dfrac{2T-1}{T^2}$

§4. Моделирование дискретных случайных величин

ГЛОССАРИЙ ТЕРМИНОВ

Случайная величина – всякая переменная величина, которая в результате опыта (испытания) в зависимости от случая принимает одно из своих возможных значений (какое именно – заранее неизвестно).

Дискретная случайная величина – случайная величина множество значений которой дискретно.

Закон распределения случайной величины – соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Математическое ожидание случайной величины – среднее значение случайной величины.

Дисперсия случайной величины – рассеяние случайной величины около среднего значения (математическое ожидание квадрата отклонения величины от её математического ожидания).

Среднее квадратичное отклонение случайной величины – квадратный корень из дисперсии.

§4. Моделирование дискретных случайных величин

Площадь сектора, в который попал дротик при игре в дартс.

Число очков, выпавших на верхней грани кубика.

Время ожидания автобуса на остановке.

Дальность прыжка на уроке физкультуры.

Число взошедших семян при высадке в грунт одного пакета с семенами.

§4. Моделирование дискретных случайных величин

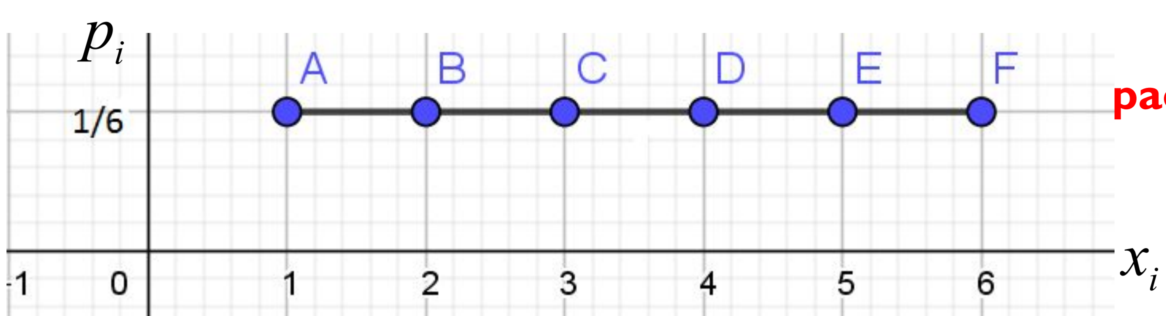
Дискретная случайная величина (ДСВ)

X - число очков, выпавших на верхней грани кубика

Закон распределения ДСВ

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$



Многоугольник распределения ДСВ

§4. Моделирование дискретных случайных величин

Дискретная случайная величина

X - число очков, выпавших на верхней грани кубика

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Числовые характеристики ДСВ

Математическое ожидание ДСВ

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

§4. Моделирование дискретных случайных величин

Дискретная случайная величина

X - число очков, выпавших на верхней грани кубика

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Числовые характеристики ДСВ

Дисперсия ДСВ

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-M(X)\right)^2\cdot p_i$$

$$D(X)=\left(1-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(2-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(3-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+$$

$$\left(4-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(5-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(6-\frac{7}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{35}{12}$$

§4. Моделирование дискретных случайных величин

Дискретная случайная величина

X - число очков, выпавших на верхней грани кубика

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Числовые характеристики ДСВ

Среднее квадратичное отклонение ДСВ

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1,71$$

§4. Моделирование дискретных случайных величин

В группе из 6 юношей и 4 девушек выбирают по жребию четырё дежурных. Составьте закон распределения числа девушек среди дежурных.

X - число девушек среди дежурных

Дискретная случайная величина

x_i	0	1	2	3	4
p_i					

Закон распределения ДСВ

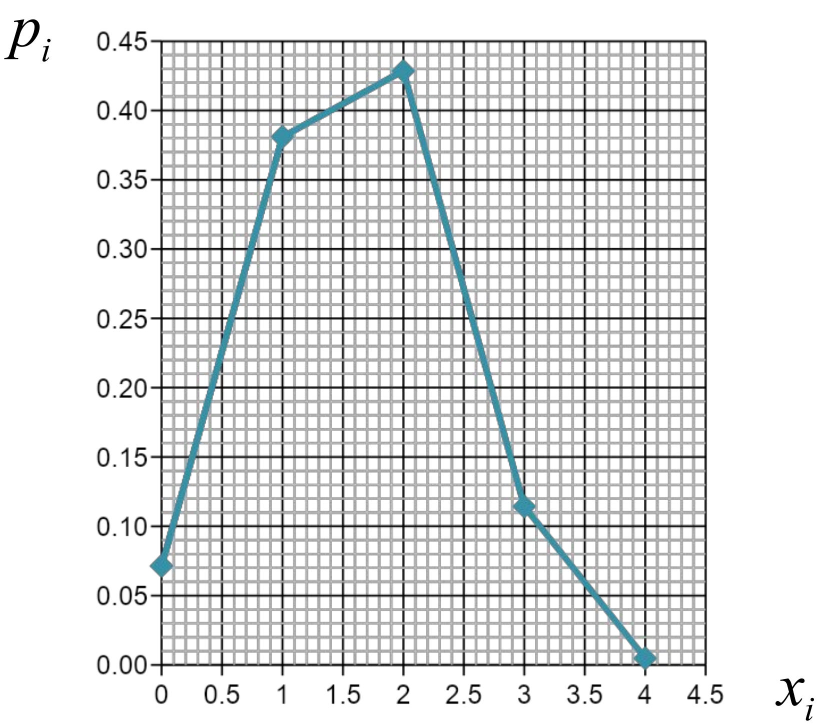
$$P(X=m)=\frac{C_4^m\cdot C_6^{4-m}}{C_{10}^4}$$

§4. Моделирование дискретных случайных величин

X - число девушек среди дежурных

x_i	0	1	2	3	4
p_i	15/210	80/210	90/210	24/210	1/210

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$



$$P(X = m) = \frac{C_4^m \cdot C_6^{4-m}}{C_{10}^4}$$

§4. Моделирование дискретных случайных величин

X - число девушек среди дежурных

x_i	0	1	2	3	4
p_i	15/210	80/210	90/210	24/210	1/210

Математическое ожидание ДСВ

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 1{,}6$$

Дисперсия ДСВ

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i = 0{,}64$$

Среднее квадратичное отклонение ДСВ

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=0{,}8$$

§5. Моделирование непрерывных случайных величин

Площадь сектора, в который попал дротик при игре в дартс.

Число очков, выпавших на верхней грани кубика.

Время ожидания автобуса на остановке.

Дальность прыжка на уроке физкультуры.

Число взошедших семян при высадке в грунт одного пакета с семенами.

§5. Моделирование непрерывных случайных величин

Непрерывная случайная величина (НСВ)

X - дальность прыжка на уроке физкультуры

$$P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Закон распределения НСВ

x_i						
p_i						

$$\sum p_i = 1$$

$$F(x) = P(X < x)$$ **Функция распределения НСВ**

$$f(x) = F'(x)$$ **Плотность вероятности НСВ**

§5. Моделирование непрерывных случайных величин

Непрерывная случайная величина (НСВ)

X - дальность прыжка на уроке физкультуры

$$F(x) = P(X < x)$$

$$f(x) = F'(x)$$

Числовые характеристики НСВ

Математическое ожидание НСВ

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Дисперсия НСВ

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx$$

Среднее квадратичное отклонение НСВ

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

§5. Моделирование непрерывных случайных величин

Нормальное распределение НСВ (закон Гаусса)

X - дальность прыжка на уроке физкультуры

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Математическое ожидание

$$M(X)=a$$

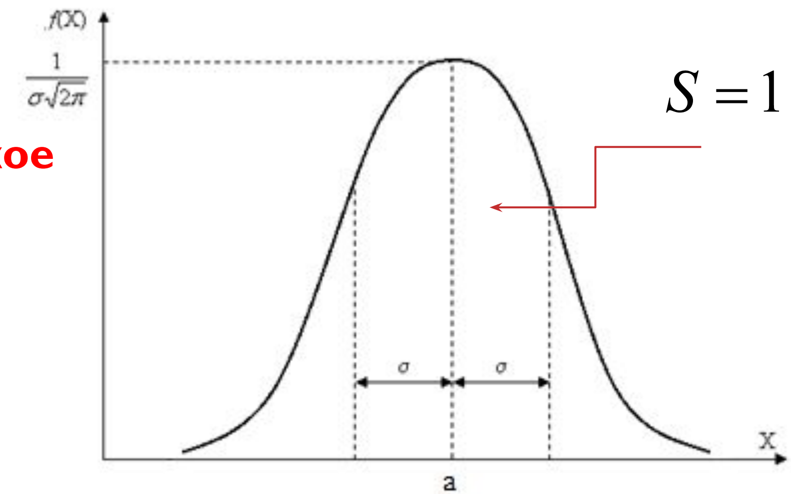
Дисперсия

$$D(X)=\sigma^2$$

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(X)=\sigma$$

$S=1$



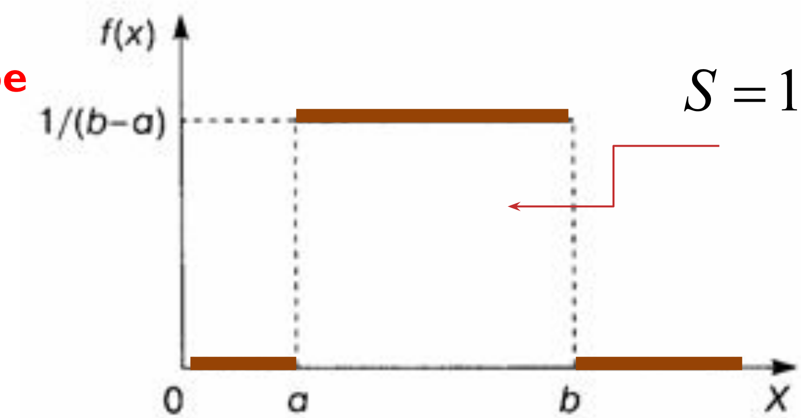
Кривая Гаусса

§5. Моделирование непрерывных случайных величин

Равномерное распределение НСВ

X - время ожидания автобуса на остановке

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}\ \text{при}\ a\le x\le b,\\ 0\ \text{при}\ x<a,\ x>b\end{cases}$$



Математическое ожидание

$$M(X)=\frac{a+b}{2}$$

Дисперсия

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Основы математической обработки информации

Продолжение следует…

ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И.Н. Ульянова»
Основы математической обработки информации
лектор Макеева О.В.