Предел функции

$$y = f(n), n \in N$$

Равенство $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = b$ означает, что прямая $y = b$ — горизонтальная асимптота графика функции $y = f(n), n \in N$.

$$y_n = \frac{1}{n}$$

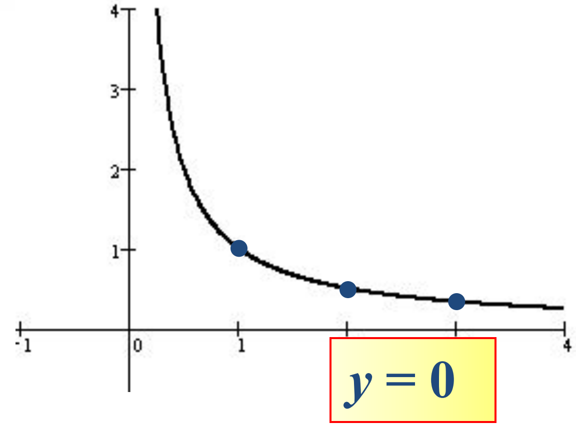


Рис. 1

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

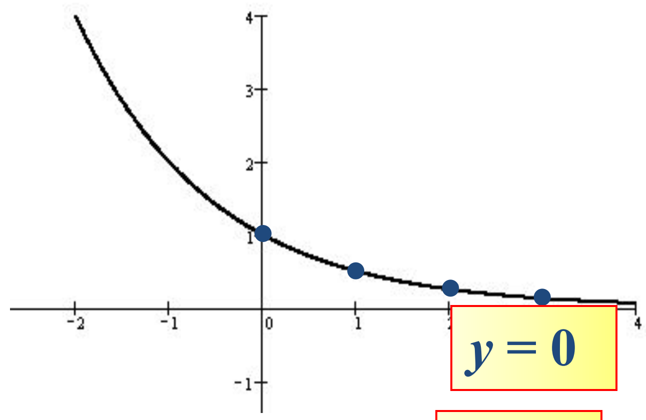


Рис. 2

$$y_n = \frac{2n}{n+1}$$

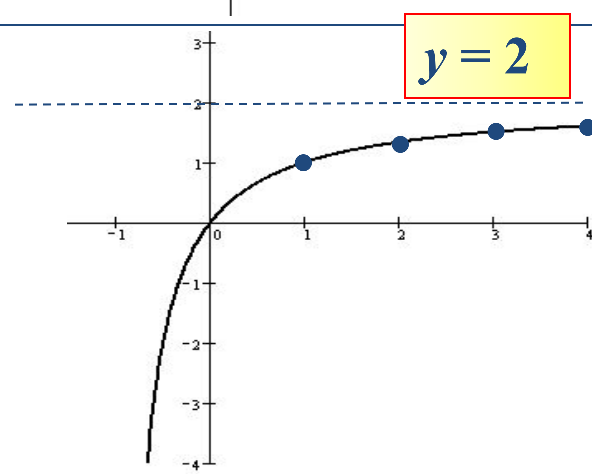


Рис. 3

Свойства вычисления пределов

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то

1)Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = b + c$$

2)Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = b \cdot c$$

3)Предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n : y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n : \lim_{n\to\infty} y_n = b : c$$

4)Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} (k \cdot x_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = k \cdot b$$

Примеры вычисления пределов

***Пример 1*. Вычислить** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^3+1}{x^5+4x^2+2x}$

***Решение.* Делим числитель и знаменатель дроби почленно на наивысшую из имеющихся степень переменной *x*, т.е. на x^3.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^3+1}{x^5+4x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^5}{x^5}-\dfrac{3x^3}{x^5}+\dfrac{1}{x^5}}{\dfrac{x^5}{x^5}+\dfrac{4x^2}{x^5}+\dfrac{2x}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^5}}{1+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^5}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^4}}=\frac{2-0+0}{1+0+0}=\frac{2}{1}=2$$

Примеры вычисления пределов

Пример 2. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+x^2+1}{2x^4-3x^2+5x+2}$

Решение. **Делим числитель и знаменатель дроби почленно на наивысшую из имеющихся степень переменной *x* т.е. на x^4.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2+1}{2x^4-3x^2+5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x^3}{x^4}+\dfrac{x^2}{x^4}+\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{2}{x^4}-\dfrac{3x^2}{x^4}+\dfrac{5x}{x^4}+\dfrac{2}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{0+0+0}{2-0+0+0}=\frac{0}{2}=0$$

Примеры вычисления пределов

<u>*Пример 3*</u>. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^6-x^2+i}{x^4+2x^3+x}$

Решение. **Делим числитель и знаменатель дроби <u>почленно</u> на наивысшую из имеющихся степень переменной *x*, т.е. на *x***^{6}**.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^6-x^2+i}{x^4+2x^3+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^6}{x^6}-\dfrac{x^2}{x^6}+\dfrac{i}{x^6}}{\dfrac{x^4}{x^6}+\dfrac{2x^3}{x^6}+\dfrac{x}{x^6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{i}{x^6}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{i}{x^6}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{i}{x^6}}{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^5}}=$$

$$=\frac{2-0+0}{0+0+0}=\frac{2}{0}=\text{(не существует)}=\infty$$

Правила вычисления пределов

1. Если старшая степень числителя и знаменателя совпадают, то предел такого вида всегда будет равен отношению коэффициентов при старших степенях переменной.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^3+1}{x^5+4x^2+2x}=2$$

Правила вычисления пределов

2. Если степень знаменателя выше степени числителя, то предел такого вида равен нулю.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 5x + 2} = 0$$

Правила вычисления пределов

3. Если же старшая степень числителя выше степени знаменателя, то, очевидно, все слагаемые знаменателя в пределе будут равны нулю, это означает, что предел не существует.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^6-x^2+i}{x^4+2x^3+x}=\infty$$

Вычислите самостоятельно пределы функций на бесконечности:

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4x+2}{5x^2+3x+1}=\infty$$

$$2.\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+3x+7}=0$$

$$3.\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^2+7}{x^2+4x+3}=\infty$$

$$4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+3x^2+x+1}{2x^3+x+13}=\frac{6}{2}=3$$

Методика вычисления пределов в точке

Если функция существует в точке x = a, то ее предел равен f(a).

Примеры вычисления пределов

Пример 1. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to 3}(2x+5)$

Решение. **Подставим вместо** ***x*** **число** ***3*** **(т.к.** ***x*□3**) и применим правила вычисления пределов.**

$$\lim_{x\to 3}(2x+5)=\lim_{x\to 3}2x+\lim_{x\to 3}5=2\bullet\lim_{x\to 3}x+\lim_{x\to 3}5=$$

$$=6+5=2\bullet 3+5=11$$

Примеры вычисления пределов

***Пример 2.* Вычислить** $\lim\limits_{x\to(-2)}(x^2+2x-3)$

Решение.

$$\lim_{x\to(-2)}(x^2+2x-3)=\lim_{x\to(-2)}x^2+\lim_{x\to(-2)}2x-\lim_{x\to(-2)}3=$$

$$=\lim_{x\to(-2)}x^2+2\bullet\lim_{x\to(-2)}x-\lim_{x\to(-2)}3=$$

$$=(-2)^2+2\bullet(-2)-3=4-4-3=-3$$

***Пример 3.* Вычислить** $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x}{2x-1}$

Решение.

$$\lim_{x\to3}\frac{3x}{2x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to3}3x}{\lim\limits_{x\to3}(2x-1)}=\frac{3\bullet\lim\limits_{x\to3}x}{2\bullet\lim\limits_{x\to3}x-\lim\limits_{x\to3}1}=$$

$$=\frac{3\bullet3}{2\bullet3-1}=1{,}8$$

Методика вычисления пределов в точке

Если же функция в точке х = а не существует, *в знаменателе дроби ноль,* то вычисляем значение числителя в этой точке.

1. $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3}{x^3 - x^2 - 4} = \infty$$

2. $$\lim_{x \to 1} \frac{5x + 1}{x^2 - 1} = \infty$$

3. $$\lim_{x \to 3} \frac{2x}{x - 3} = \infty$$

Примеры вычисления пределов

***Пример 1*. Вычислить** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3}{x^3-x^2-4}$

***Решение*. Подставим вместо *x* число 2 (т.к. *x*□*2*) и применим правила вычисления пределов.**

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3}{x^3-x^2-4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3}{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-x^2-4)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3}{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}4}=\frac{2^3}{2^3-2^2-4}=$$

$$=\frac{8}{8-4-4}=\frac{8}{0}=\infty$$

Примеры вычисления пределов

Пример 2. **Вычислить** $$\lim_{x\to 1}\frac{5x-1}{x^2-1}$$

Решение. **Подставим вместо *x* число 2 (т.к. *x*□*2*) и применим правила вычисления пределов.**

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x}{x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}5x}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)}=$$

$$=\frac{5\bullet\lim\limits_{x\to 1}x}{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}1}=\frac{5\bullet 1}{1^2-1}=$$

$$=\frac{5}{1-1}=\frac{5}{0}=\infty$$

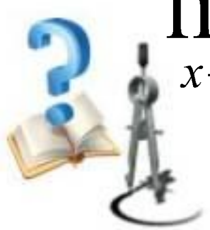
Примеры вычисления пределов

***Пример 3*. Вычислить** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x-3}$

***Решение*. Подставим вместо *x* число 3 (т.к. *x*□*з*) и применим правила вычисления пределов.**

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}x^{3}}{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}2x}{\lim\limits_{x\to 3}x-\lim\limits_{x\to 3}3}=$$

$$=\frac{2\bullet\lim\limits_{x\to 3}x}{\lim\limits_{x\to 3}x-\lim\limits_{x\to 3}3}=\frac{2\bullet 3}{3-3}=\frac{6}{0}=\infty$$



Методика вычисления пределов в точке

- **Если и в знаменателе и в числителе нули, то, говорят, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.**

Методика раскрытия таких неопределенностей проста. Если числитель и знаменатель дробно-рациональной функции при x = a, то разложение на множители и числителя и знаменателя обязательно содержат сомножитель (x – a), на который дробь будет сокращена. Покажем на примере.

$\frac{0}{0}$

Примеры вычисления пределов

Пример 1. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3}$

Решение. Выяснили, что при x = 1 и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскладываем числитель и знаменатель на множители, используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители $\boldsymbol{ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+5)}{(x-3)}=\frac{6}{-4}$$

$\frac{0}{0}$

Примеры вычисления пределов

Пример 2. **Вычислить** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10}$

Решение. Выяснили, что при x = 2 и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскладываем числитель и знаменатель на множители, используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-7)}{(x-2)(x+5)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-7)}{(x+5)} = -\frac{5}{7}$$

Примеры вычисления пределов

Активно используйте формулы сокращенного умножения

Пример 3. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-8}$

Решение. **Выяснили, что при x = 2 и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, воспользуемся формулами сокращенного умножения**

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\ a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x^2+2x+4)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Следующие пределы вычислите самостоятельно

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{2x^2+3x-5}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-11x-3}{x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{6x^3-4x^2}$

4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{t^2+6t+9}{t^2+t-6}$

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}$

6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5a^2+9a-2}{3a^2+5a-2}$

7. $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2-7x-4}{6x^2+7x+2}$

8. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$