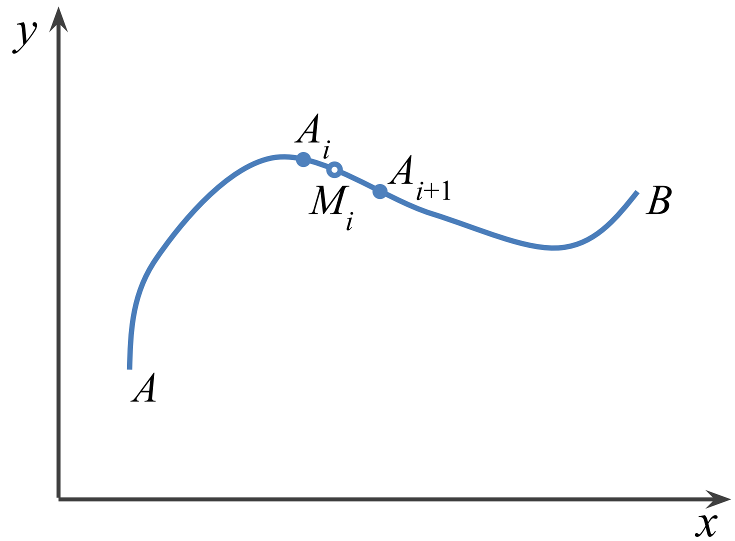
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Волгодонский инженерно-технический институт – филиал НИЯУ МИФИ
2020

Криволинейный интеграл 1-го рода



$z = f(x, y)$

T - разбиение кривой AB:

$A_0 = A,\ A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n = B$

$$d(T) = \max_{0 \le i \le n-1} \Delta l_i$$

$$\sigma_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \cdot \Delta l_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i) \cdot \Delta l_i$$

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \lim_{d(T) \to 0} f(x_i, y_i) \cdot \Delta l_i$$

Аналогичным образом определяется интеграл по пространственной кривой:

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, dl = \lim_{d(T) \to 0} f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta l_i$$

Свойства криволинейного интеграла 1-го рода

1. $\int\limits_{AB} f(M)\,dl = \int\limits_{BA} f(M)\,dl$
2. $L = L_1 \cup L_2 \Rightarrow \int\limits_{L} f(M)\,dl = \int\limits_{L_1} f(M)\,dl + \int\limits_{L_2} f(M)\,dl$
3. $\int\limits_{L} \left(c \cdot f(M)\right) dl = c \cdot \int\limits_{L} f(M)\,dl$
4. $\int\limits_{L} \left(f(M) + g(M)\right) dl = \int\limits_{L} f(M)\,dl + \int\limits_{L} g(M)\,dl$
5. $\int\limits_{L} dl = |L|$
6. $\forall M \in L : f(M) \le g(M) \Rightarrow \int\limits_{L} f(M)\,dl \le \int\limits_{L} g(M)\,dl$
7. $\left|\int\limits_{L} f(M)\,dl\right| \le \int\limits_{L} |f(M)|\,dl$

Вычисление криволинейного интеграла 1-го рода

Если кривая AB задана параметрическим уравнением $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ при $\alpha \le t \le \beta$, где функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны, а $x'(t)$, $y'(y)$, $z'(t)$ непрерывны или кусочно-непрерывны, то справедливо равенство

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt$$

Для плоской кривой:

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

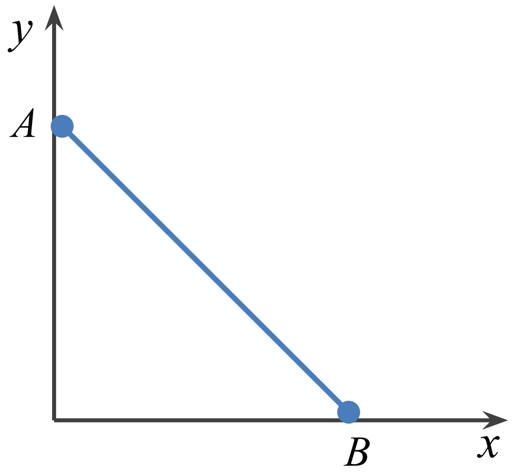
Если плоская кривая задана уравнением $y = p(x)$, $a \le x \le b$:

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \int_{a}^{b} f(x, p(x))\sqrt{1 + (p'(x))^2}\, dx$$

Для кривой L при полярной замене $x = \rho(\varphi)\cdot\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi$, $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$:

$$\int_{AB} f(x, y)\, dl = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\rho(\varphi)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi, \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

Пример. Вычислить $J = \int\limits_{AB} (x^2 + y)\,dl$, где AB - отрезок, $A\ (0,\ 1)$, $B\ (1{,}0)$.



$$y = 1 - x,\ \ 0 \le x \le 1; \quad y' = -1$$

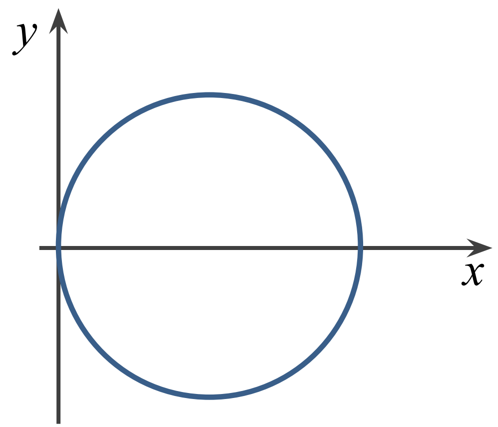
$$J = \int\limits_{AB} (x^2 + y)\,dl = \int\limits_0^1 (x^2 + 1 - x)\sqrt{1 + (-1)^2}\,dx =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \int\limits_0^1 (x^2 - x + 1)\,dx = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

Пример. Вычислить $J = \int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 2x$

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$



$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$$

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = 2\rho\cos\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 = 2\rho\cos\varphi \Leftrightarrow \rho = 2\cos\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$J = \int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\, dl = \int\limits_L \sqrt{(\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2}\, dl =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(\varphi)\cdot\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos\varphi\cdot\sqrt{(2\cos\varphi)^2 + (-2\sin\varphi)^2}\, d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos\varphi\, d\varphi = 4\sin\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8$$

Пример. Вычислить $J=\int\limits_L (x+y)\,dl$, где L - дуга циклоиды $x=t-\sin t,\ \ y=1-\cos t$ от точки $A\ (0,\ 0)$ до $B\ (2\pi\ ,0)$.

$$J=\int\limits_L (x+y)\,dl=\int\limits_0^{2\pi} (t-\sin t+1-\cos t)\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} (t-\sin t+1-\cos t)\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=\int\limits_0^{2\pi} (t-\sin t+1-\cos t)\sqrt{2\,(1-\cos t)}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} (t-2\sin(t/2)\cos(t/2)+2\sin^2(t/2))\sqrt{4\sin^2(t/2)}\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} (t-2\sin(t/2)\cos(t/2)+2\sin^2(t/2))\cdot 2\sin(t/2)\,dt=$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi} t\cdot\sin(t/2)\,dt-4\int\limits_0^{2\pi}\sin^2(t/2)\cos(t/2)\,dt+4\int\limits_0^{2\pi}\sin^3(t/2)\,dt=\left|\begin{array}{c} t=2z \\ dt=2dz \end{array}\right|$$

$$=8\int\limits_0^{\pi} z\cdot\sin z\,dz-8\int\limits_0^{\pi}\sin^2 z\cos z\,dz+8\int\limits_0^{\pi}\sin^3 z\,dz=8\pi+\frac{32}{3}$$

Пример. Вычислить $J=\int\limits_L \sqrt{z}\,dl$, где L – линия пересечения поверхностей $x+y=1,\ z=x^2$ от точки $A\ (0,\ 1,\ 0)$ до $B\ (1,\ 0,\ 1)$

1) Пусть $x=t \Rightarrow y=1-t, z=t^2,\ 0\le t\le 1$

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt=\sqrt{1^2+(-1)^2+(2t)^2}\,dt=\sqrt{2+4t^2}\,dt$$

$$J=\int\limits_L \sqrt{z}\,dl=\int\limits_0^1 t\sqrt{2+4t^2}\,dt=\left|\begin{array}{l} u=2+4t^2 \\ du=8t\,dt\end{array}\right|=\frac{1}{8}\int\limits_2^6\sqrt{u}\,du=\frac{1}{8}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2}\Bigg|_2^6=\frac{6^{3/2}-2^{3/2}}{12}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

2) Пусть $z=t \Rightarrow x=\sqrt{t},\ y=1-\sqrt{t},\ 0\le t\le 1$

$$dl=\sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2+\left(-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)^2+1^2}\,dt=\sqrt{\frac{1}{4t}+\frac{1}{4t}+1}\,dt=\sqrt{\frac{1+2t}{2t}}\,dt$$

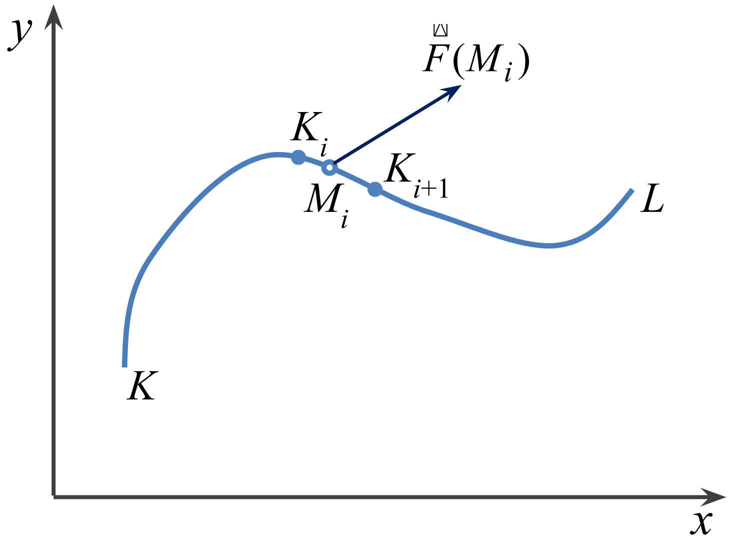
$$J=\int\limits_L \sqrt{z}\,dl=\int\limits_0^1\sqrt{t}\cdot\sqrt{\frac{1+2t}{2t}}\,dt=\int\limits_0^1\sqrt{t\cdot\frac{1+2t}{2t}}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^1\sqrt{1+2t}\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+2t)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\left(3^{3/2}-1\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Криволинейный интеграл 2-го рода

Задача о нахождении работы плоского силового поля:

Пусть в каждой точке кривой KL определена некоторая переменная сила $\vec{F}(x, y)$, и под действием этой силы происходит перемещение точки по кривой KL от точки K до точки L. Необходимо определить работу, которую при этом выполняет сила.



T - разбиение кривой KL:

$$K_0 = K,\ K_1,\ K_2, \ldots,\ K_n = L$$

$$A_i \approx (\vec{F}(M_i), \overrightarrow{\Delta l_i})$$

$$\vec{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\} \qquad \overrightarrow{\Delta l_i} = \{\Delta x_i, \Delta y_i\}$$

$$(\vec{F}(M_i), \overrightarrow{\Delta l_i}) = P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i$$

$$A = \sum A_i \approx \sum (\vec{F}(M_i), \overrightarrow{\Delta l_i}) = \sum \left(P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i \right)$$

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum \left(P(x_i, y_i) \cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \cdot \Delta y_i \right)$$

Пусть Ω – плоская область, в каждой точке которой задан вектор. Тогда говорят, что в области Ω задано *векторное поле*.
Если выбрана декартова прямоугольная система координат, то векторное поле можно задать при помощи двух скалярных функций:

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \{P(x,y),\, Q(x,y)\}.$$

Пусть кривая Γ задана параметрическим уравнением $x = x(t),\ y = y(t)$ при $\alpha \le t \le \beta$. Если движение по кривой осуществляется в направлении возрастания параметра t, то кривая называется *положительно ориентированной*, в противном случае – *отрицательно ориентированной.*

Криволинейный интеграл 2-го рода:

$$\int_\Gamma (\vec{F}(x,y), \vec{dl}) = \int_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum \left(P(x_i, y_i)\cdot \Delta x_i + Q(x_i, y_i)\cdot \Delta y_i \right)$$

Аналогичным образом определяется криволинейный интеграл 2-го рода для трехмерного случая:

$$\int_\Gamma (\vec{F}(x,y,z), \vec{dl}) = \int_\Gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода

1. Криволинейный интеграл 2-го рода не зависит от способа параметризации кривой.

2. Криволинейный интеграл 2-го рода при изменении ориентации кривой на противоположную меняет знак:

$$\int_{\Gamma}(\vec{F}(M),d\vec{l}\,)=-\int_{\Gamma^{-}}(\vec{F}(M),d\vec{l}\,)$$

3. Аддитивность криволинейного интеграла 2-го рода относительно пути интегрирования:

$$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\Rightarrow\int_{\Gamma}(\vec{F}(M),d\vec{l}\,)=\int_{\Gamma_1}(\vec{F}(M),d\vec{l}\,)+\int_{\Gamma_2}(\vec{F}(M),d\vec{l}\,)$$

4. Связь криволинейных интегралов 1-го и 2-го рода:

$$\int_{\Gamma}(\vec{F}(x,y),d\vec{l}\,)=\int_{\Gamma}\big(P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta\big)dl$$

Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода

Если кривая Γ задана параметрическим уравнением $x = x(t),\ y = y(t)$ при $\alpha \le t \le \beta$, то $dx = x'(t)\,dt,\ \ dy = y'(t)\,dt$

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t),y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\big)dt$$

Если плоская кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $t = x$ и

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(P(x,f(x)) + Q(x,f(x))\cdot f'(x)\big)dx$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} y\,dx - x\,dy$, где кривая Г задана параметрически в виде $x(t) = \cos t,\ \ y(t) = \sin t,\ 0 \le t \le \pi/2.$

$$\int\limits_{\Gamma} y\,dx - x\,dy = \int\limits_{0}^{\pi/2} \left(\sin t \cdot (\cos t)' - \cos t \cdot (\sin t)'\right) dt = -\int\limits_{0}^{\pi/2} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = -\int\limits_{0}^{\pi/2} dt = -\pi/2$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_{\Gamma} xy\,dx + \frac{y}{x^2}\,dy$, где Г – участок параболы $y = x^2$ при $0 \le x \le 2.$

$$\int\limits_{\Gamma} xy\,dx + \frac{y}{x^2}\,dy = \int\limits_{0}^{2} \left(x \cdot x^2 + \frac{x^2}{x^2} \cdot (x^2)' \right) dx = \int\limits_{0}^{2} \left(x^3 + 2x\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} + x^2 \right)\Bigg|_{0}^{2} = \frac{16}{4} + 4 = 8$$