ТВЕРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

# ТЕМА 6. ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ.

# Множества. Основные определения.

Под ***множеством*** понимают совокупность некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку.

Объекты, из которых состоит множество, называют его ***элементами***.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют ***пустым*** и обозначают $\varnothing$.

Множества, элементами которых являются числа, называют **числовыми**. Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N} = \{1;2;3;...;n;...\}$ – **множество натуральных чисел;**

$\mathbb{Z} = \{0;\pm1;\pm2;...;\pm n;...\}$ – **множество целых чисел;**

$\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{m}{n} : m \in Z, n \in N\right\}$ – **множество рациональных чисел;**

$\mathbb{R}$ – **множество действительных чисел.**

**В дальнейшем для сокращения записей будем использовать некоторые логические символы:**

$\forall$ *– означает «для любого», «для всякого», «каждый»;*

$\exists$ *– означает «существует», «найдется»;*

**:** *– «имеет место», «такое, что»;*

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ *– «предложения* $\alpha$ *и* $\beta$ *равносильны»;*

$\alpha \Rightarrow \beta$ *– «из предложения* $\alpha$ *следует предложение* $\beta$ *».*

## Числовые промежутки. Окрестность точки.

Пусть $a$ и $b$ – действительные числа, причем $a < b$.

**Числовыми промежутками** (интервалами) называются подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид

$[a;b] = \{x : a \le x \le b\}$ **– отрезок;**

$(a;b) = \{x : a < x < b\}$ **– интервал;**

$[a;b) = \{x : a \le x < b\}$ **– полуинтервал;**

$(a;b] = \{x : a < x \le b\}$ **– полуинтервал.**

**Числа** $a$ и $b$ называются соответственно ***левым*** и ***правым концами промежутков***.

**Пусть** $x_0$ – *любое действительное число (точка на числовой оси).*

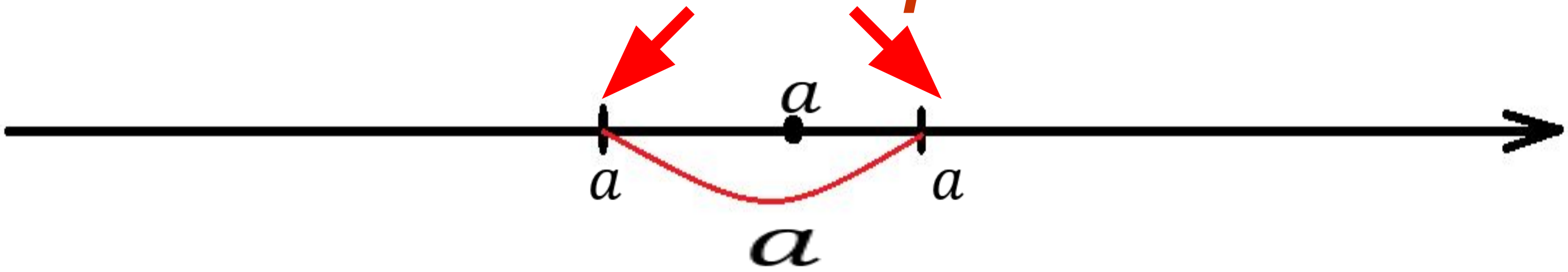
***Окрестностью точки*** $x_0$ называется любой интервал $(a;b)$, содержащий точку $x_0$.

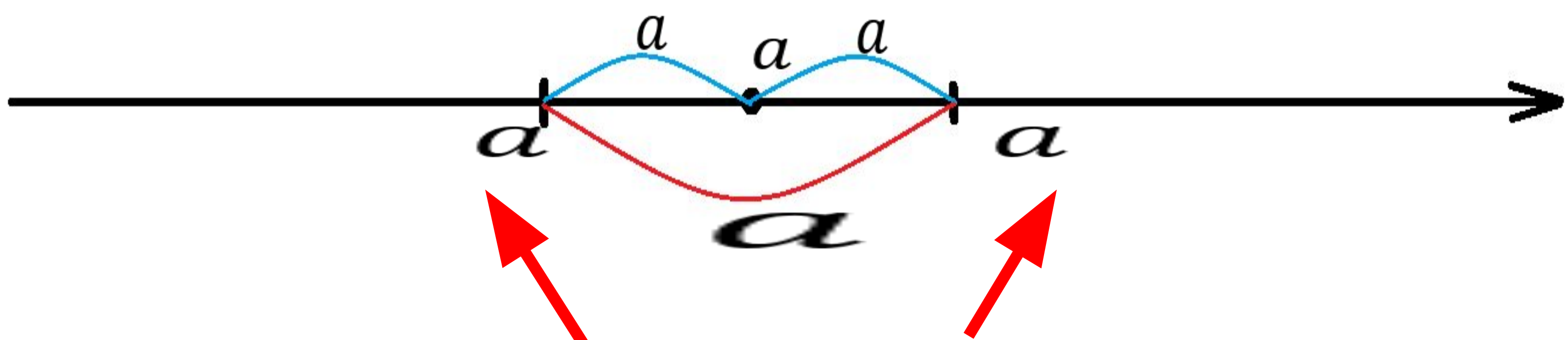
В частности, интервал

$$(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)=V(x_0,\varepsilon),$$ где $\varepsilon>0$

называется $\varepsilon$ – ***окрестностью точки*** $x_0$.

**концы промежутков**
**левый** и **правый**




**окрестности точки**
**левая и правая**
**соответственно**

# Понятие функции. Способы задания функций.

Пусть даны два непустых множества $X$ и $Y$.

Правило $f$, по которому каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, называется **функцией** и записывается

$$y = f(x) \text{ или } f : X \to Y.$$

При этом множество $X$ называется **областью определения** функции $f$ и обозначается $D(f)$ или $D(y)$, а множество $Y$ – **множеством значений функции** $f$.

## *Существуют следующие способы задания функций:*

1) ***графический:*** **задается график функции;**

2) ***табличный:*** **функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции;**

3) ***аналитический:*** **функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений.**

Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию $y = f(x)$.

# Основные характеристики функции

**1)** Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $D$, называется ***четной***, если $\forall x \in D$ и выполняются условия: $-x \in D$ и $f(-x) = f(x)$;

**2)** ***нечетной***, если $\forall x \in D$ выполняются условия: $-x \in D$ и $f(-x) = -f(x)$.

График ***четной*** функции симметричен относительно оси $Oy$,
а ***нечетной*** – относительно точки С (0;0), т. е. начала координат.

**3)** Функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** на интервале $(a,b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 > x_2$, выполняется условие $f(x_1) > f(x_2)$.

**4)** Функция $y = f(x)$ называется ***убывающей*** на интервале $(a,b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a,b): x_1 > x_2$, выполняется условие $f(x_1) < f(x_2)$.

Возрастающие и убывающие функции называются ***строго монотонными.***

Интервалы, на которых функции монотонны, называются ***интервалами монотонности.***

# Числовая последовательность. Предел числовой последовательности.

Функция, областью определения которой является множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, называется ***числовой последовательностью*** и обозначается

$$x_n = f(n) \text{ или } \{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \text{ или } \{x_n\}.$$

При этом $x_n$ называется ***n-ым членом последовательности.***

**Пример**: Формула $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ задает последовательность:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Геометрически каждому члену последовательности соответствует точка на числовой оси $Ox$.

Пусть функция $x_n = f(n)$ **последовательно**

принимает значения: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$

т.е.пробегает последовательность $\{x_n\}$.

Важным случаем такого изменения функции является тот, при котором по мере возрастания номера $n$ соответствующие значения $x_n$ неограниченно ***приближаются (стремятся)*** к некоторому постоянному значению $a$;

***в этом случае говорят, что***

**последовательность** $\{x_n\}$ **стремится к *пределу*** $a$.

**Но выражения «неограниченно приближаются», «стремятся» − неопределенные и поэтому не годятся для точного математического понятия предела.**

Для ***точного определения*** понятия «***предел***» введем произвольное малое положительное число $\varepsilon$;

поскольку оно произвольно, его по желанию можно задавать равным 0,01, и 0,001, и вообще $10^{-k}, k \in N$.

Факт неограниченного сближения последовательности $\{x_n\}$ с постоянной $a$ можно охарактеризовать так:

каково бы ни было малое положительное число $\varepsilon$,

в процессе изменения последовательности рано или поздно должен наступить такой момент, начиная с которого все ее дальнейшие значения $x_n$ ***будут отличаться от*** $a$ по абсолютному значению ***меньше***, чем на это ***произвольное малое*** положительное ***число*** $\varepsilon$.

**Определение.** Число $a$ называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Кратко определение предела можно записать так:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon):$$

$$\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

***Геометрический смысл*** определения предела последовательности:

Неравенство $\left|x_n - a\right| < \varepsilon$

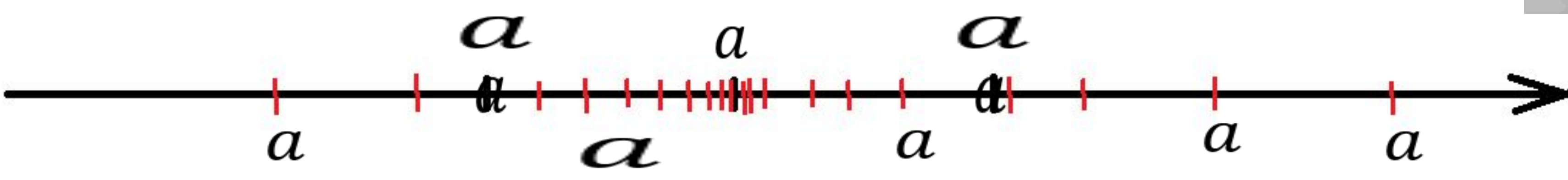
равносильно неравенствам

$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$

т.е. $x_n \in \underbrace{\left(a - \varepsilon, a + \varepsilon\right)}_{V(a,\varepsilon)}.$

Поэтому определение предела последовательности можно сформулировать так:

***Число*** $a$ **называется** ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, **если для любой** $\varepsilon$ **– окрестности точки** $a$ **найдется такой номер** $N(\varepsilon)$, **что все члены последователь-ности** $x_n$, **для которых** $n > N(\varepsilon)$, **попадут в** $\varepsilon$ **– окрестность точки** $a$.



# Предел функции в точке. Бесконечно большая и бесконечно малая функция.

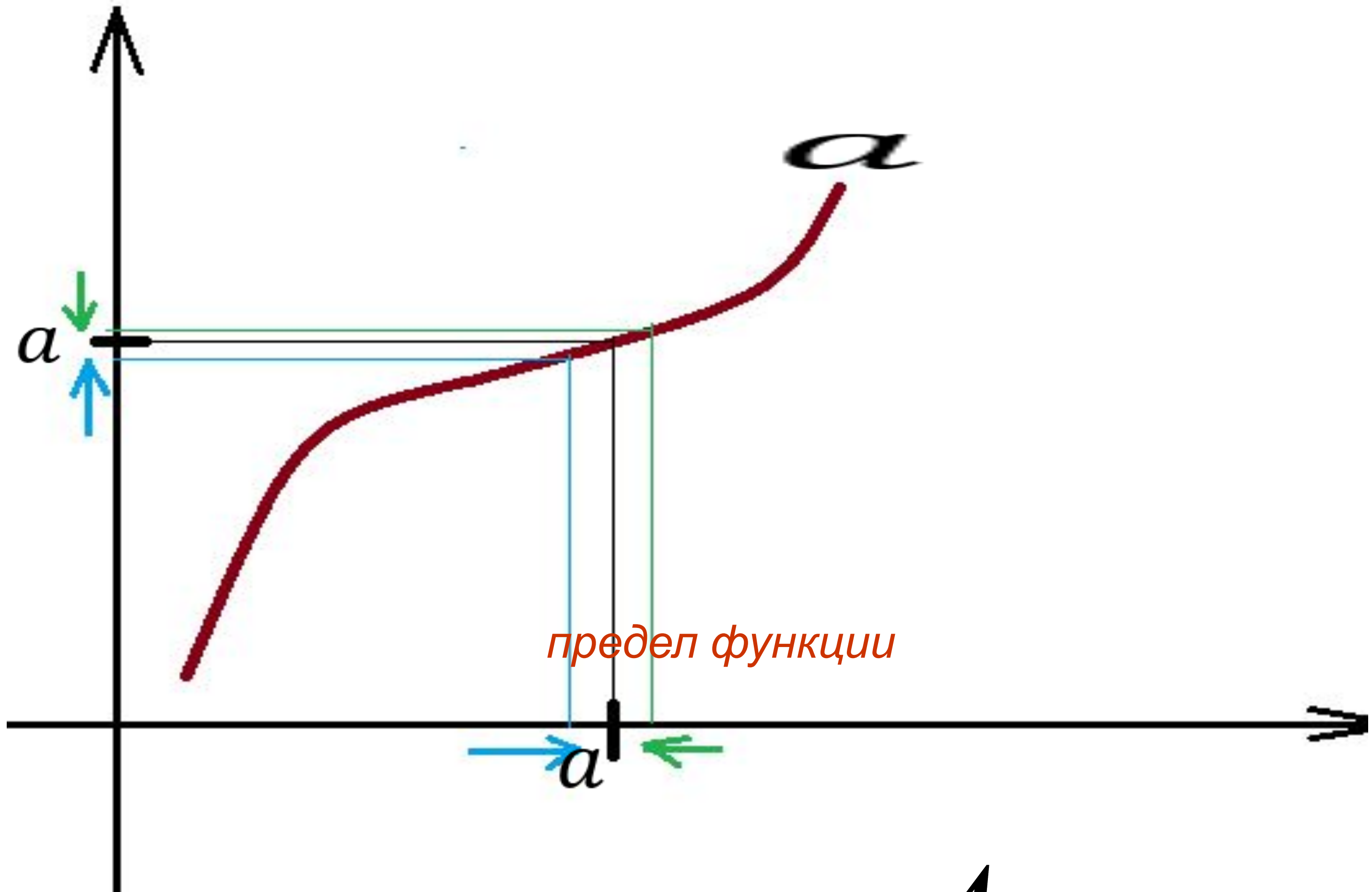
Рассмотрим функцию $y = f(x)$

непрерывно изменяющегося аргумента $x$

и предположим, что аргумент $x$ стремится к некоторому числу $a.$

Может случиться, что при неограниченном приближении аргумента $x$ к числу $a$ соответствующие значения функции $f(x)$ неограниченно приближаются к некоторому числу

$A$ на рисунке:




**<u>Определение.</u>** **Число** $A$ **называется** ***пределом функции*** $f(x)$ **в точке** $a$ **при** $x \to a$ ***и обозначается:*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

## *Бесконечно большая функция (б.б.ф)*

**Определение.** Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой функцией*** при $x \to a$, если для любого числа $M > 0$ найдется такое положительное число $\delta$, зависящее от выбора $M$, что для всех $x$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$ будет выполняться: $|f(x)| > M$.

***и обозначается:*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

# Бесконечно малая функция (б.м.ф.). Связь между б.м.ф. и б.б.ф.

**Определение.** Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой функцией** при $x \to a,$ если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое положительное число $\delta,$ зависящее от выбора $\varepsilon,$ что для всех $x,$ удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$ будет выполняться: $|f(x)| < \varepsilon.$

***и обозначается:*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

**Теорема:** 1) **Если** $y = f(x)$ **– б.м.ф. в** $V(a)$, **то**

$$y = \frac{1}{f(x)}$$ **– б.б.ф. в** $V(a)$, **т.е.**

**обозначается:** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \infty.$

2) **Если** $y = g(x)$ **– б.б.ф. в** $V(a)$, **то**

$$y = \frac{1}{g(x)}$$ **– б.м.ф. в** $V(a)$, **т.е.**

**обозначается:** $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{g(x)} = 0.$

***Символически это утверждение можно записать как:***

$$\frac{1}{0} = \infty \quad \text{и} \quad \frac{1}{\infty} = 0,$$

где символы $0$ и $\infty$ следует понимать как ***неограниченно близкое приближение к нулю и к бесконечности соответственно.***

# Вычисление пределов

Практическое вычисление пределов основывается на связи между **б.м.ф.** и **б.б.ф.** и на следующей теореме:

***Теорема:*** Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x)$ и $C - const$, то:

**1)** $\lim\limits_{x\to a} C = C;$

**2)** $\lim\limits_{x\to a}(C\cdot f(x)) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x);$

**3)** $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x);$

4) $$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x);$$

5) $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},(\lim_{x\to a}g(x)\neq 0);$$

6) $$\lim_{x\to a}(f(x))^n=(\lim_{x\to a}f(x))^n;$$

7) $$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}f(x)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

А если условия этой теоремы не выполнены, то могут возникнуть ***неопределенности вида :***

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,0^{0},\infty^{0},1^{\infty},\infty-\infty,$$

которые в простейших случаях раскрываются с помощью алгебраических преобразований данного выражения и отыскание предела в таких случаях называют ***раскрытием неопределенностей***.

Кроме того, будем пользоваться тем фактом, что для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x) = f(a).$$

Последнее *равенство* можно *понимать так:* вычисление любого предела нужно начинать с непосредственной подстановки предельного значения, и, если нет неопределенностей, то сразу записать ответ.

**Также при нахождении пределов полезно иметь в виду следующие свойства показательной функции:**

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0, 0 < a < 1 \\ +\infty, a > 1 \end{cases},$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, 0 < a < 1 \\ 0, a > 1 \end{cases}.$$

## Примеры:

1) $$\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{3x+5}=\frac{2\cdot 2-1}{3\cdot 2+5}=\frac{3}{11};$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{3x^2-x+7}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{:x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{1+\frac{2}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}+\frac{7}{\infty}}=\frac{1+0-0}{3-0+0}=\frac{1}{3};$$

**3)**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+x-10}{7x^3-x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{:x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}-\frac{10}{x^3}}{\frac{7x^3}{x^3}-\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{10}{x^3}}{7-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{\frac{5}{\infty}+\frac{1}{\infty}-\frac{10}{\infty}}{7-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{0+0-0}{7-0+0}=\frac{0}{7}=0;$$

**4)**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^2+1}{3x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]^{:x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^4}{x^4}+\frac{x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{3x}{x^4}-\frac{1}{x^4}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}}=\frac{2+\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{\frac{3}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{2+0+0}{0-0}=\frac{2}{0}=\infty;$$

**5)**

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(3x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2x+1}{3x+2}=\frac{2\cdot1+1}{3\cdot1+2}=\frac{3}{5};$$

**Примечание:** $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

где $x_1$ и $x_2$ –корни соответствующего квадратного уравнения.

# ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

1. **Определение производной**
2. **Геометрический смысл производной**
3. **Связь между непрерывностью и дифференцируемостью**
4. **Производные основных элементарных функций**
5. **Правила дифференцирования**
6. **Производная сложной функции**
7. **Применение производной**

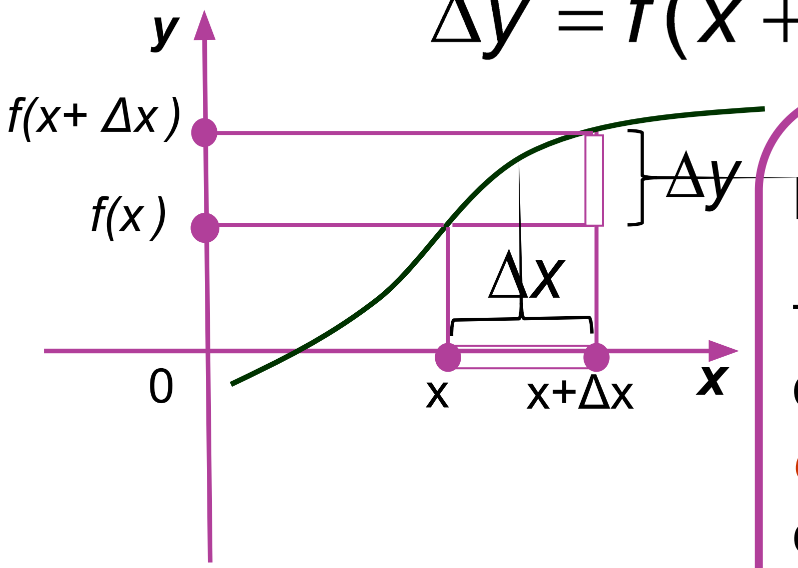
# Определение производной

**Пусть функция y = f(x) определена в некотором интервале (a; b). Аргументу x придадим некоторое приращение $\Delta x$:**

$$x + \Delta x \in (a; b)$$

**Найдем соответствующее приращение функции:**

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

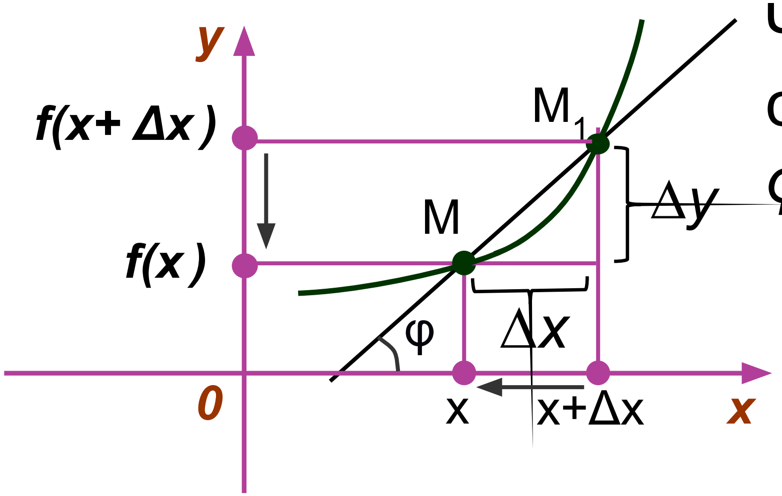



Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

то его называют ***производной*** функции ***y = f(x)*** и ***обозначают*** одним из символов: $y'$; $f'(x)$; $\dfrac{dy}{dx}$

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Возьмем на непрерывной кривой ***L*** две точки ***M*** и $\boldsymbol{M}_1$:




Через точки М и $М_1$ проведем секущую и обозначим через *φ* угол наклона секущей.

$$tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции $\Delta y$ также стремится к нулю, поэтому точка $М_1$ неограниченно приближается по кривой к точке М, а секущая $ММ_1$ переходит в касательную.

$$\boxed{\varphi \to \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha \quad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = tg\alpha}$$

# Геометрический смысл производной

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}_{y'} = tg\alpha = k \;= y'$$

***Производная*** ***f'(x)*** равна угловому коэффициенту касательной к графику функции ***y = f(x)*** в точке, абсцисса которой равна ***x***.

Если точка касания ***M*** имеет координаты $(x_0;\ y_0)$, угловой коэффициент касательной есть $k = f'(x_0)$.

***Уравнение прямой с угловым коэффициентом:***

**Уравнение касательной**

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

**Уравнение нормали**

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется нормалью к кривой.

$$f'(x_0)$$

$$k_{норм} = -\frac{1}{k_{кас}} = -\frac{1}{f'(x_0)} \Rightarrow y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

# СВЯЗЬ МЕЖДУ НЕПРЕРЫВНОСТЬЮ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬЮ ФУНКЦИИ

Теорема

**Если функция f(x) дифференцируема в некоторой точке , то она непрерывна в ней.**

**Доказательство:**

**Пусть функция y = f(x) дифференцируема в некоторой точке x, следовательно существует предел:**

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(x) \Rightarrow$$

$\left(\text{где } \alpha(x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0\right)$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \Rightarrow$$

> ***По теореме о связи функции, ее <u>предела и бесконечно малой</u> функции***

***Функция y = f(x) – непрерывна.***

**Обратное утверждение не верно: непрерывная функция может не иметь производной.**

## Нахождение производной называют **дифференцированием**

$$(kx+b)' = k$$

$$(C)' = 0$$

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

# ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $C$ | $0$ | $\sqrt{x}$ | $1/(2\sqrt{x})$ |
| $kx + b$ | $K$ | $e^x$ | $e^x$ |
| $x^2$ | $2x$ | $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\operatorname{tg} x$ | $1/\cos^2 x$ |
| $1/x$ | $-1/x^2$ | $\operatorname{ctg} x$ | $-1/\sin^2 x$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\ln x$ | $1/x$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\log_a x$ | $1/(x \ln a)$ |

# ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть u(x) , v(x) и w(x) – дифференцируемые в некотором интервале (a; b) функции, C – постоянная.

- $(C)' = 0$
- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad \Rightarrow \quad (C \cdot u)' = C \cdot u'$

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\dfrac{C}{v}\right)' = \dfrac{-C \cdot v'}{v^2}$

# ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

1. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке $x$ производные, то их сумма $u(x) + v(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(u + v)' = u' + v'$$

2. Если функция $u(x)$ имеет в точке $x$ производную и $C$ – данное число, то функция $C \cdot u(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(Cu)' = C \cdot u'$$

# ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке $x$ производные, то их произведение $u(x) \cdot v(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4. Если функция $v(x)$ имеет в точке $x$ производную и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

# ПРАВИЛА НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

*5. Если функции u(x) и v(x) имеют в точке x производные и v(x) ≠ 0, то функция* $\frac{u(x)}{v(x)}$ *также имеет в этой точке производную, причем*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

*6. Производная сложной функции*

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

# ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть y = f(u) и u = φ(x) , тогда y = f(φ(x)) – сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

**Теорема**

Если функция u = φ(x) имеет производную $u'_x$ в точке x а функция y = f(u) имеет производную $y'_u$ в соответствующей точке u , то сложная функция имеет производную $y'_x$ , которая находится по формуле:

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько:

$$y = f(u); \quad u = \varphi(v); \quad v = g(x) \quad \Rightarrow y = f(\varphi(g(x)))$$

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x}$$

# ПРИМЕР

**Вычислить производную функции** $y=\dfrac{1+\sin x}{x^3\cdot\ln x}$

$$y'=\left(\frac{1+\sin x}{x^3\cdot\ln x}\right)'$$

$$=\frac{(1+\sin x)'\cdot(x^3\cdot\ln x)-(1+\sin x)\cdot(x^3\cdot\ln x)'}{\left(x^3\cdot\ln x\right)^2}$$

$$=\frac{(1'+(\sin x)')\cdot(x^3\cdot\ln x)-(1+\sin x)\cdot((x^3)'\cdot\ln x+x^3(\ln x)')}{\left(x^3\cdot\ln x\right)^2}$$

$$=\boxed{\frac{\cos x\cdot x^3\cdot\ln x-(1+\sin x)\cdot(3x^2\cdot\ln x+x^2)}{\left(x^3\cdot\ln x\right)^2}}$$

# ПРИМЕР:

**Вычислить производную функции:** $y = \cos(\ln^{12} x)$

**Данную функцию можно представить следующим образом:**

$$y = \cos u; \quad u = v^{12}; \quad v = \ln x$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

$$y'_u = -\sin u = -\sin v^{12} = -\sin\left(\ln^{12} x\right)$$

$$u' = 12 v^{11} = 12 \ln^{11} x$$

$$v' = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{y' = -\sin\left(\ln^{12} x\right) \cdot 12 \ln^{11} x \cdot \frac{1}{x}}$$

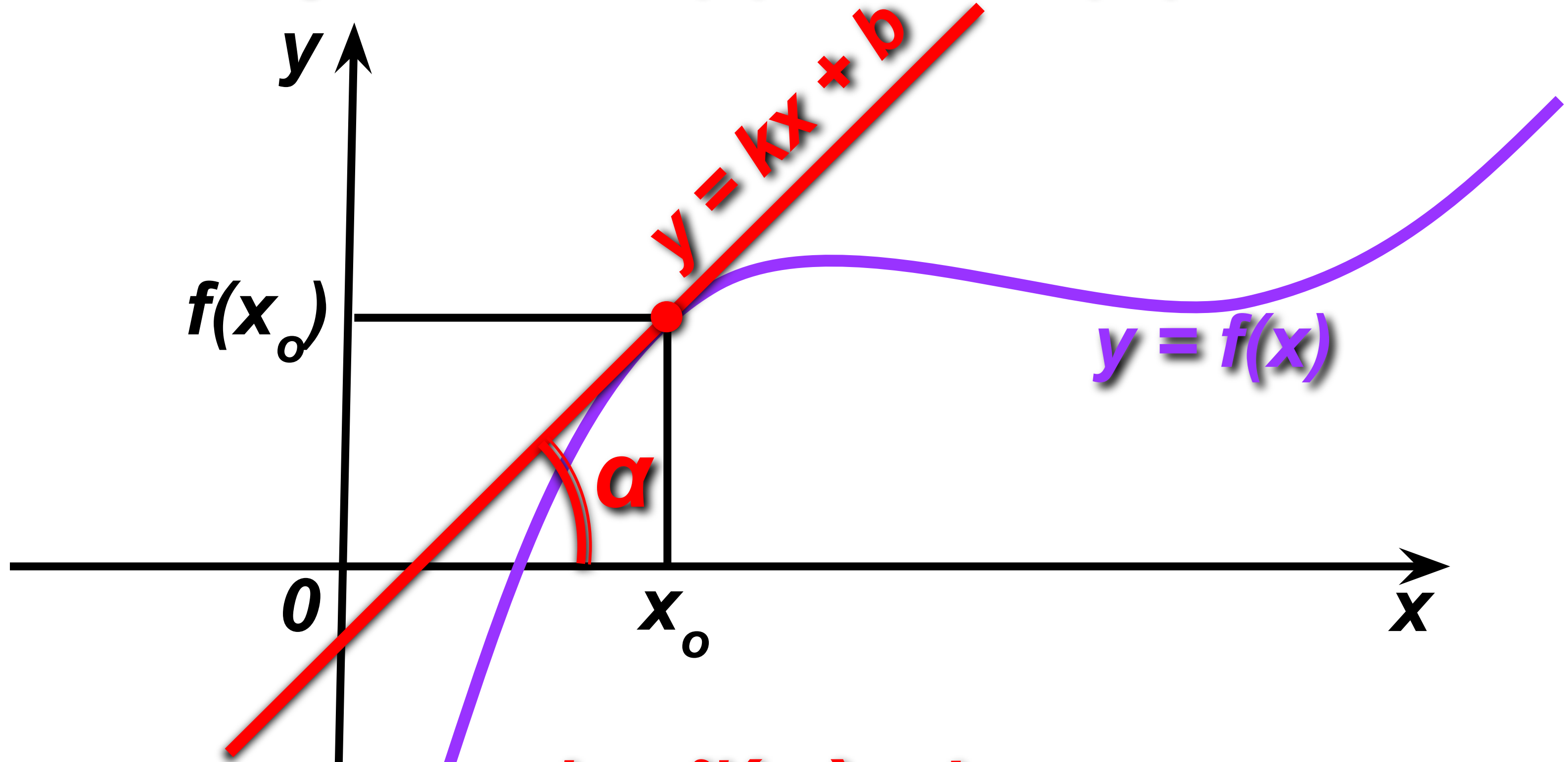
**Коротко:**

$$y' = (\cos(\ln^{12} x))' = -\sin(\ln^{12} x) \cdot (\ln^{12} x)'$$

$$= -\sin(\ln^{12} x) \cdot 12 \ln^{11} x \cdot (\ln x)' =$$

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

**к графику дифференцируемой в точке $x_0$ функции f – это прямая, проходящая через точку ($x_0$; $f(x_0)$) и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.**




**$k = f'(x_o) = tg\ \alpha$ –**

**это угловой коэффициент касательной.**

$$y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$$

1° Находим значение функции в точке $x_o$: $f(x_o)$.

2° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

3° Находим значение производной в точке $x_o$: $f'(x_o)$.

4° Подставляем эти данные в общее уравнения касательной: $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$.

***Одна из основных задач исследования функции – это нахождение промежутков её возрастания и убывания.***

***<u>Признак возрастания функции:</u>***

**Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала $I$, то функция $f$ возрастает на $I$.**

***<u>Признак убывания функции:</u>***

**Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала $I$, то функция $f$ убывает на $I$.**

# АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ:

Выделить функцию $y=f(x)$.

1. Найти **область определения функции** $D(f)$. Указать промежутки непрерывности.
2. Найти **нули функции**, решив уравнение $f(x)=0$.
3. Определить **знак функции** между её нулями в области определения.

**Решите неравенство:** $\dfrac{x^2-6x-16}{2x+5} \le 0$

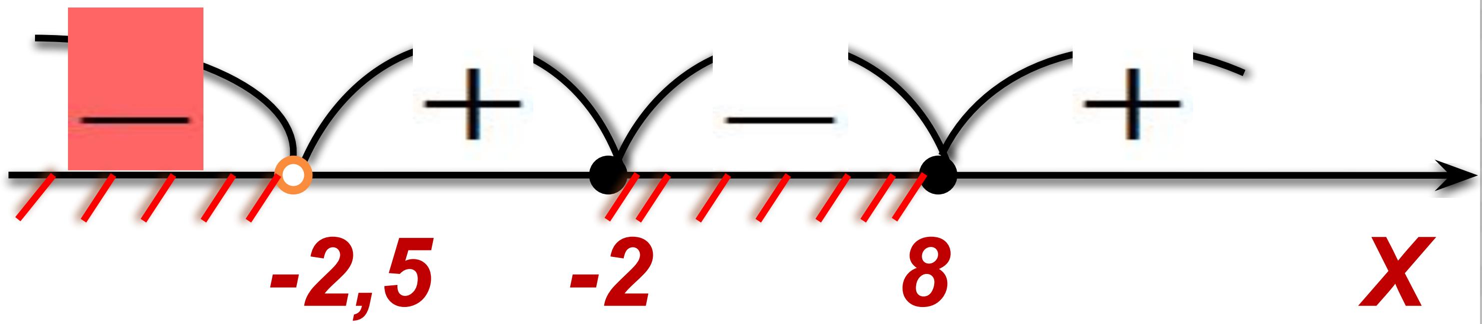
*1.* $f(x)=\dfrac{x^2-6x-16}{2x+5}=0$ *2x+5≠0, x ≠-2,5*

*2. f(x)=0, если*

$$x^2-6x-16=0$$

$x_1=8$; $x_2=-2$

*3.*




*От* $f(10)=\dfrac{(10)^2-6\cdot 10-16}{2\cdot 10+5}="+"$

$$x \in (-\infty; -2,5) \cup [-2; 8]$$

# АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПРОМЕЖУТКОВ ВОЗРАСТАНИЯ (УБЫВАНИЯ) ФУНКЦИИ

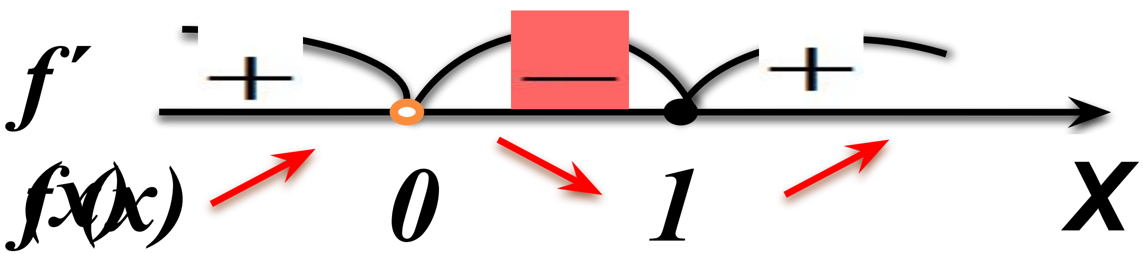
## $y=f(x)$:

1. Найти **производную функции** $f'(x)$.
2. Решить уравнение $f'(x)=0$.
3. Найти **знак производной** на каждом интервале.
4. Согласно признаку возрастания (убывания) функции, найти **промежутки возрастания и убывания.**

Найдите ... возрастания и убывания функции: $f(x) = 2x + \frac{1}{\;}$

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$ $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

2. *f′(x)=0, если* $2 - \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

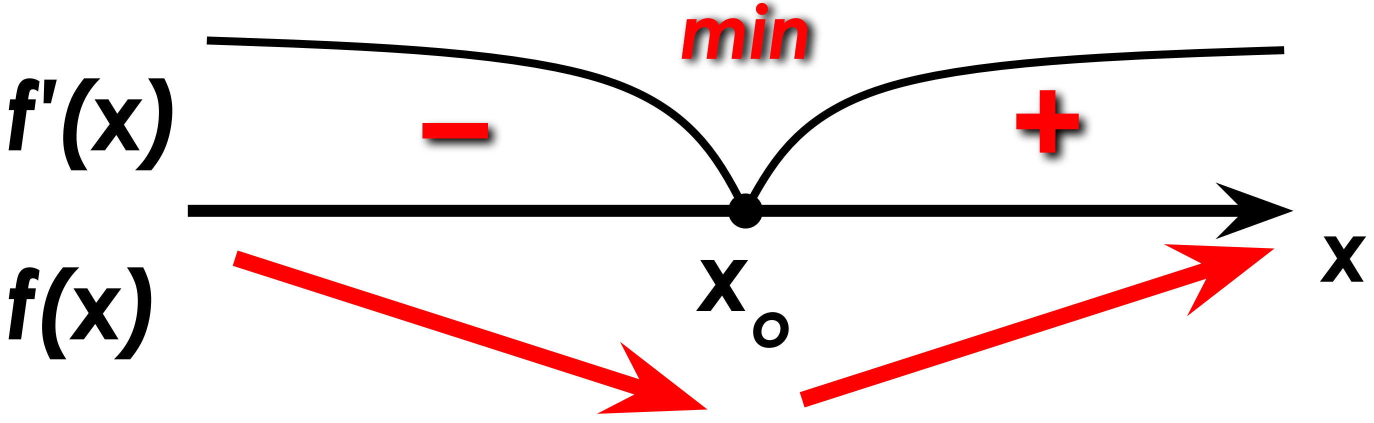
3. 


***Ответ:*** $f(x)$ возрастает на $(-\infty; 0)$ и $[1; +\infty)$

$f(x)$ убывает на $(0; 1]$

Точка $x_o$ называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки $x_o$, что для всех $x \neq x_o$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_o)$.

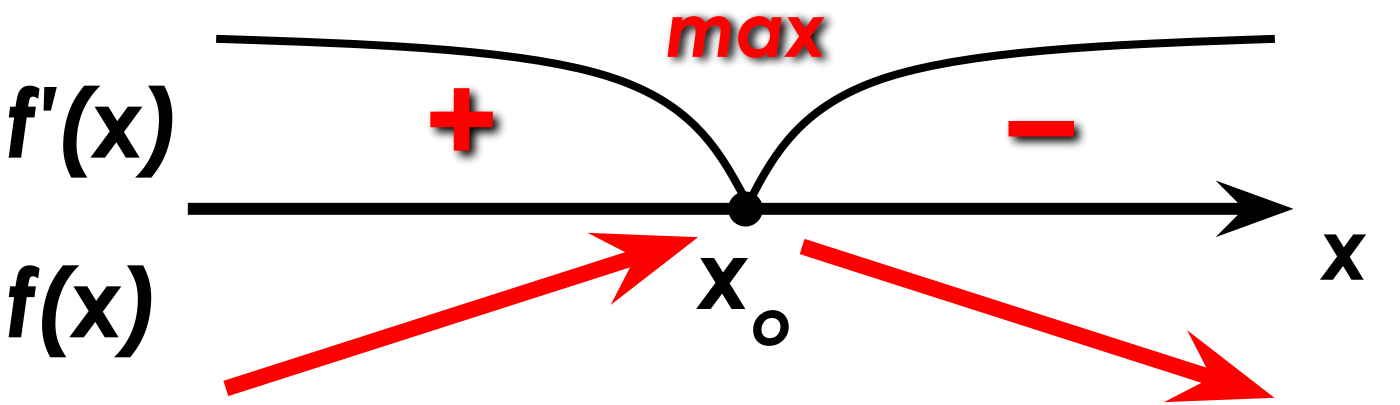
Если в точке $x_o$ производная функции $f(x)$ меняет знак с «–» на «+», то $x_o$ – **точка локального минимума** функции $f(x)$.




$f(x_o)$ – минимум функции

Точка $x_o$ называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки $x_o$, что для всех $x \neq x_o$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_o)$.

Если в точке $x_o$ производная функции $f(x)$ меняет знак с «+» на «–», то $x_o$ – **точка локального максимума** функции $f(x)$.



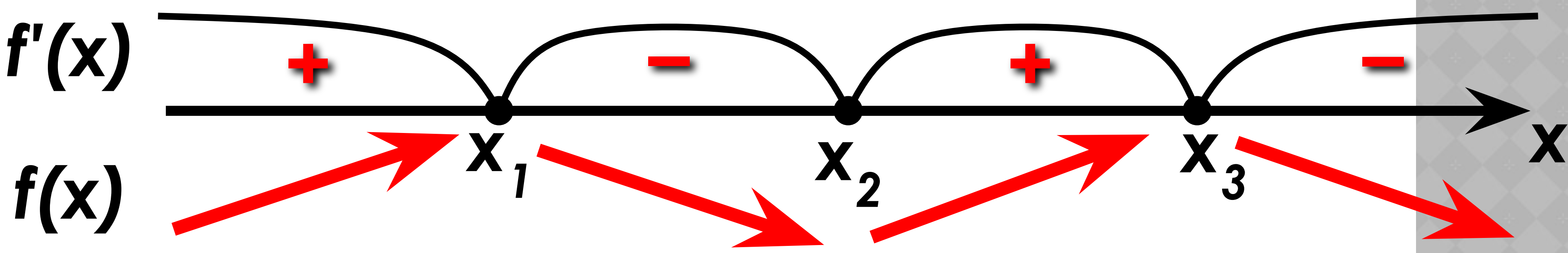

**$f(x_o)$ – максимум функции**

1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

4° Полученные данные изображаем на схеме:




5° а) Промежутки возрастания: $(-\infty; x_1]$; $[x_2; x_3]$.

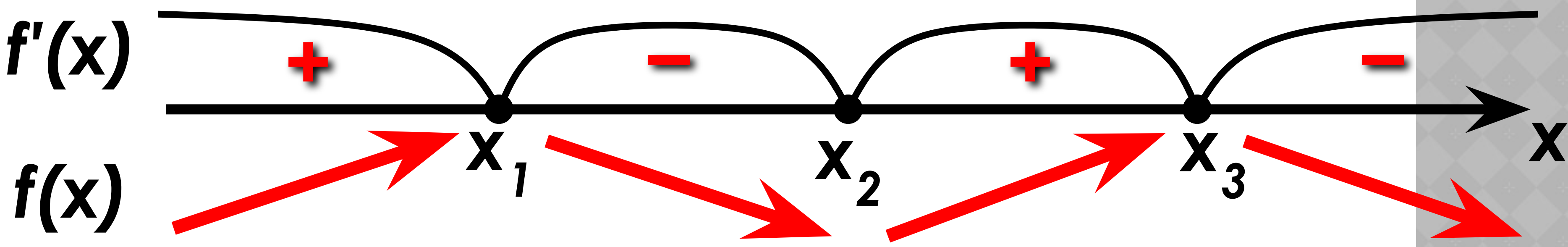
б) Промежутки убывания: $[x_1; x_2]$; $[x_3; +\infty)$.

1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

4° Полученные данные изображаем на схеме:



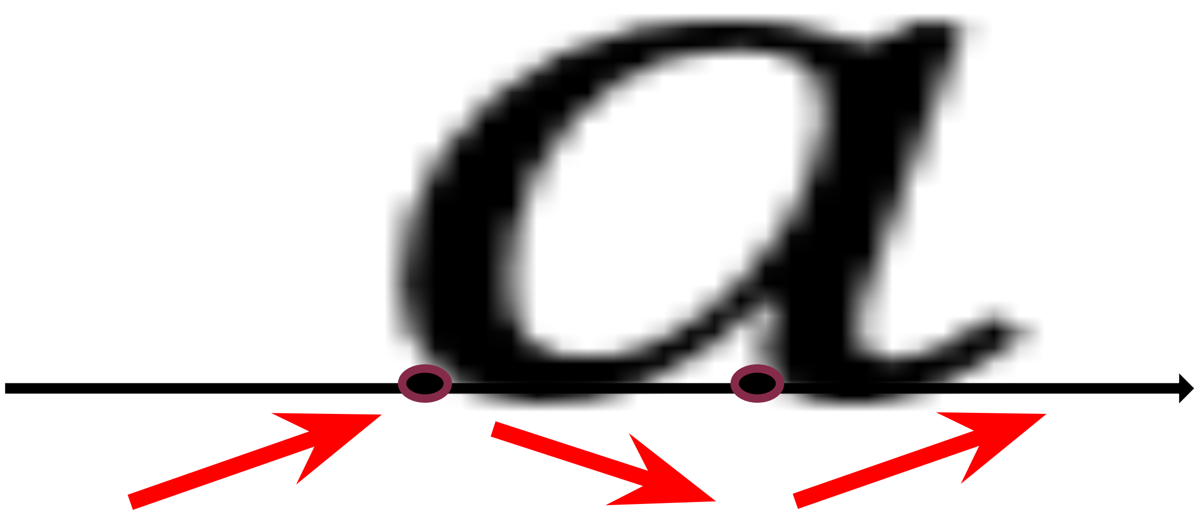

5° а) $x_1$; $x_3$ – точки максимума; $x_2$ – точка минимума.

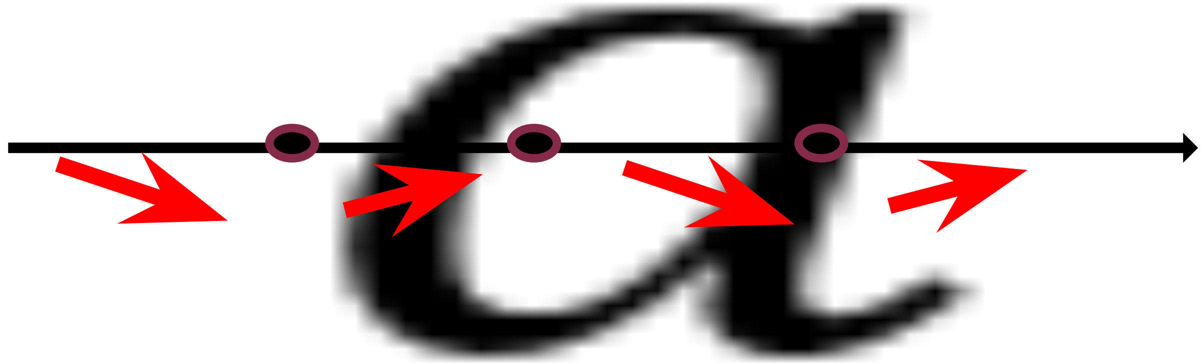
б) $f(x_1)$; $f(x_3)$ – максимумы функции;

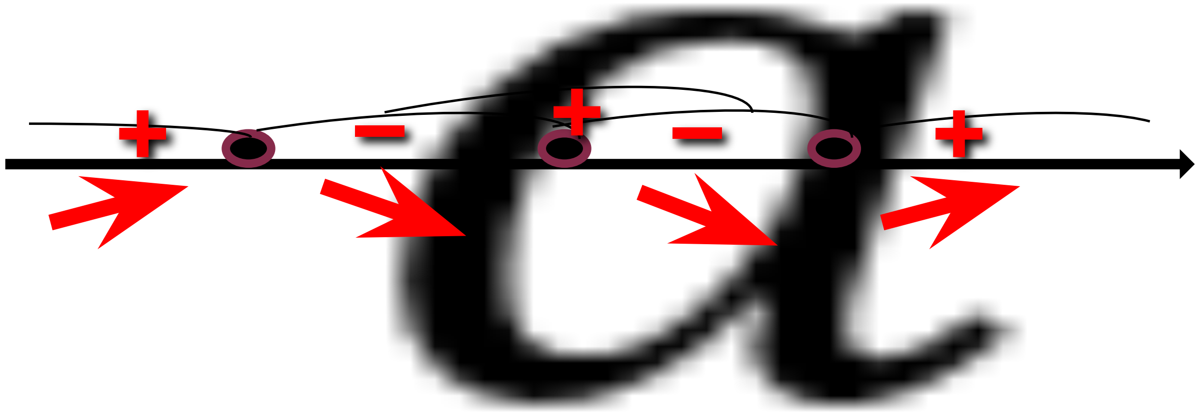
$f(x_2)$ – минимум функции.

# ПРИМЕРЫ

$(-\infty, +\infty).$




a


+
–
+
–
+
a