Лекция 8. Производная, её геометрический и механический смысл. Уравнения касательной и нормали к кривой. Дифференцируемость функции в точке. Правила дифференцирования.

ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Задача о вычислении скорости

Пусть материальная точка совершает прямолинейное (вообще говоря, неравномерное) движение по закону $s = f(t)$, где t – время, s – путь за это время. Иными словами, расстояние пройденное точкой от некоторого начального положения за какое-то время описывается как функция времени, за которое пройдено это расстояние. Зафиксируем момент времени t_0 и t, за промежуток времени $\Delta t = t - t_0$, эта пройдет расстояние $\Delta S = f(t) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$

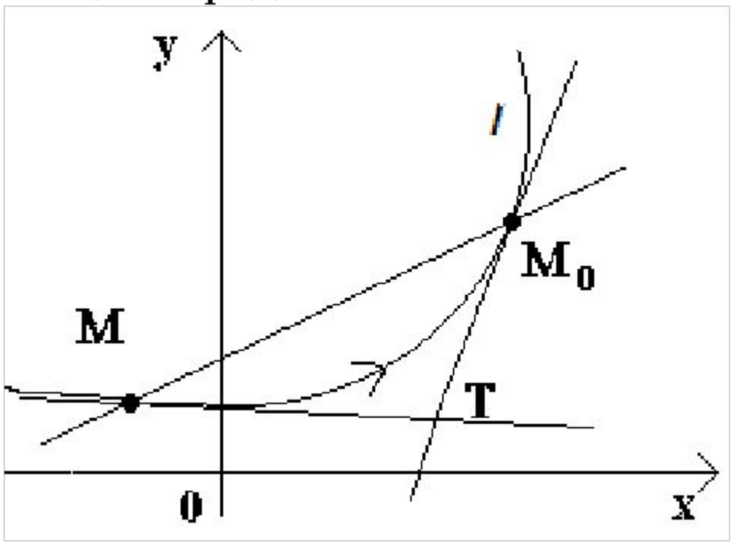
$v_{cp} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скорость движения точки на участке ΔS за время Δt

Будем уменьшать промежуток Δt, при этом средняя скорость будет меняться.

Df. Величина $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} (*)$ называется мгновенной скоростью движения точки в момент времени t_0.

Задача о проведении касательной.

Общее определение касательной:



$M_0 \in l$

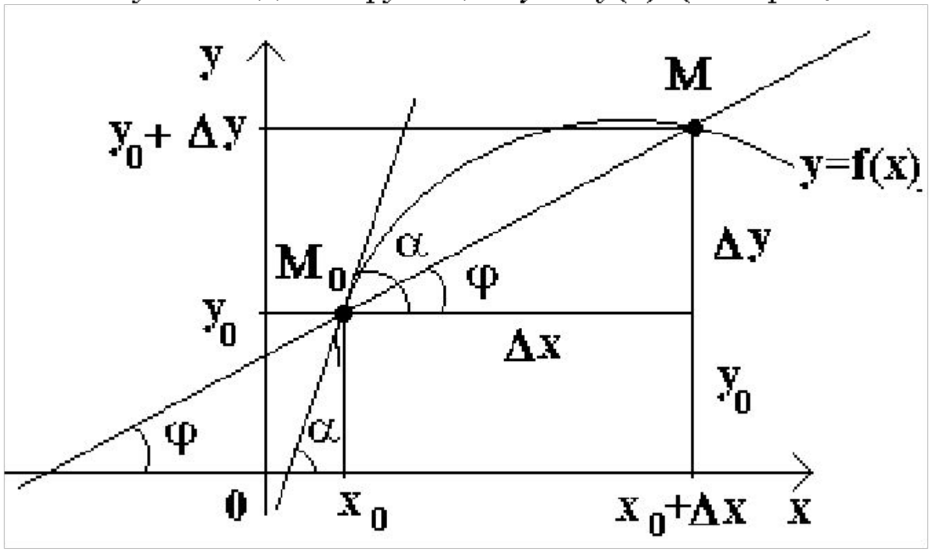
$M \in l$

M_0M

Df. Пусть задана некоторая кривая l на плоскости и точка M_0 на этой кривой. Рассмотрим другую точку этой кривой M. Рассмотрим секущую этой кривой M_0M. Будем устремлять M к точке M_0 по кривой. При этом секущая будет изменять свое положение. Если секущая M_0M при стремлении точки M по кривой к точке M_0 по кривой стремится занять некоторое предельное положение M_0T (независимо от того, с какой стороны кривой точка M приближается к M_0), то эта прямая M_0T называется касательной к кривой l в точке M_0. (Иными словами, касательная – предельное положение секущей)

Формулировка задачи о проведении касательной:

Пусть задана функция $y = f(x)$ (говорят, что задана кривая $y = f(x)$).



Известно, что в точке x_0 существует касательная к графику функции $y = f(x)$. Найти угловой коэффициент к этой касательной: $tg\alpha - ?$

Проводим секущую M_0M с углом φ

$$\Delta M_0MA: \quad \begin{array}{l} \Delta y = f(x) - f(x_0) \\ \Delta x = x - x_0 \end{array}$$

$M_0(x_0; y_0)$

$M(x; y)$

$tg\alpha - ?$

Из $\Delta M_0MA: tg\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$tg\alpha = \lim_{\varphi \to \alpha} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (**)$$

Решая разные, казалось бы, по своему характеру задачи, мы пришли к (*) и (**) совершенно одинаковой природы.

Понятие производной

Df 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на $(a;b), x \in (a;b)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то он называется производной данной функции в данной точке.

Обозначается: $f'(x_0) = y'(x_0) = y'\big|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{df(x_0)}{dx}$

$\frac{dy}{dx}$ «дэ игрек по дэ икс»

Замечание:

Рассмотрим $f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Он представляет собой предел $\Phi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} : x_0 \notin D(\Phi)$. Он представляет собой неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$

Df 2. Если каждой точке $x \in (a;b)$ поставить в соответствие производную функции f' в этой точке, то мы получим функцию, которая называется производной данной функции $f'(x)$. Производная функции в точке – это число.

Df 3. Если функция имеет производную в точке x_0, то она называется дифференцируемой в этой точке. Функция называется дифференцируемой на множестве, если она дифференцируема в каждой точке множества.

Процесс нахождения производной называется дифференцированием.

Возвращаясь к задаче о вычислении скорости, механический смысл производной: производная пути по времени: $s'(t_0)$ есть мгновенная скорость движения.

Возвращаясь к задаче о проведении касательной, получим геометрический смысл производной: $f'(x_0)$ - угловой коэффициент касательной графику функции $y = f(x)$ в соответствующей точке графика $(x_0, f(x_0))$

Пример.

Задача:

Найти производную функции $y = x^2$

а) в произвольной точке x

б) при $x = 4$

Решение:

а) Δx - приращение аргумента в этой точке;

Δy - приращение функции в этой точке

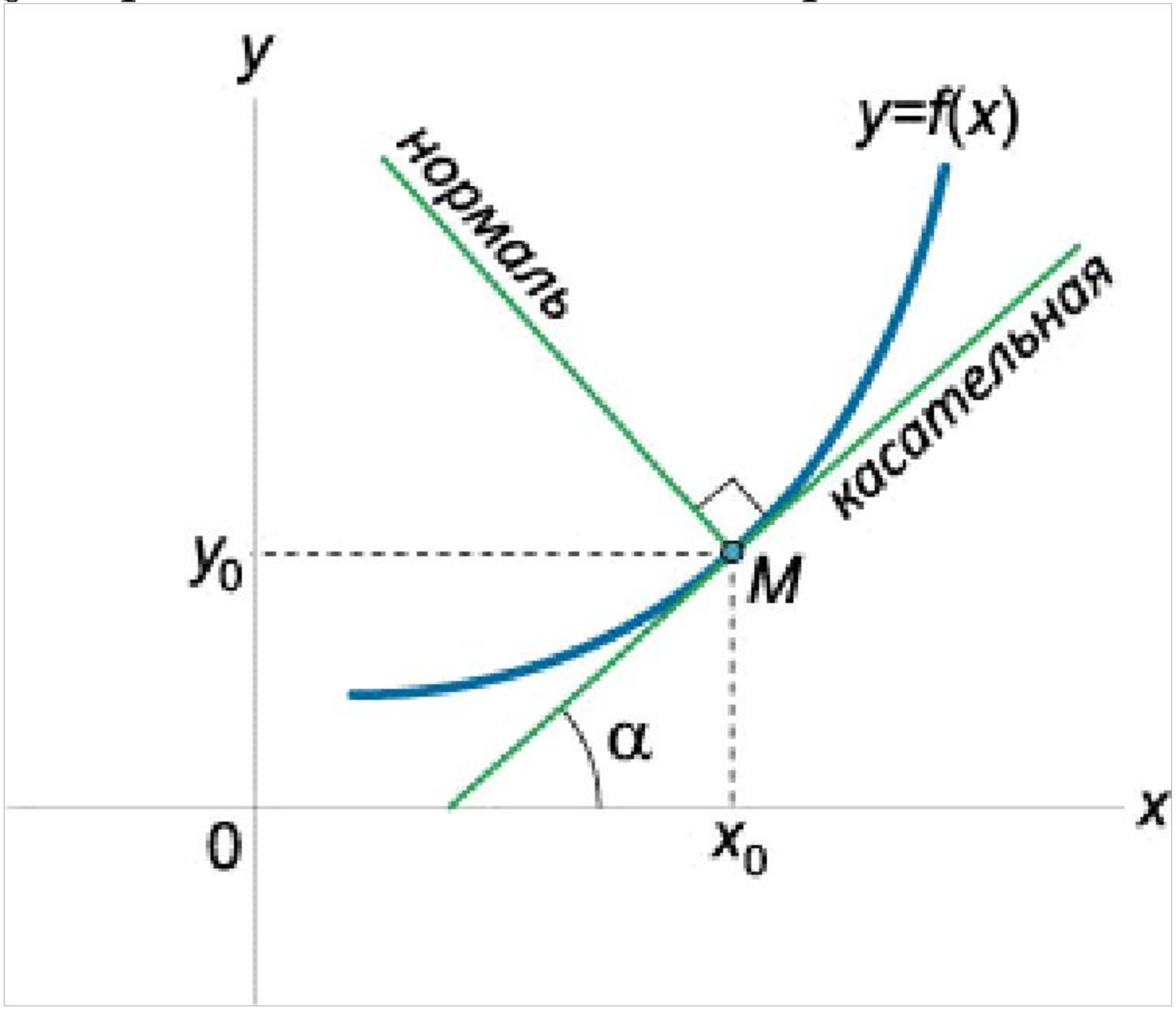
$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = \Delta x(2x+\Delta x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x$$

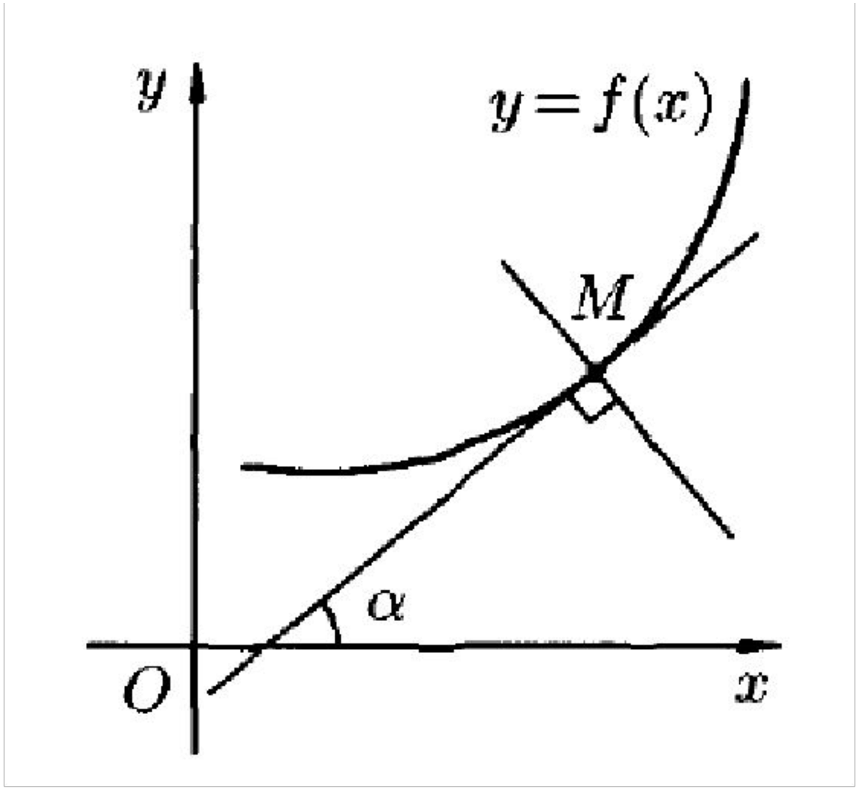
$(x^2)' = 2x$

б) $(x^2)'\big|_{x=4} = 2 \cdot 4 = 8$

§3. Уравнения касательной и нормали



Прямая, проходящая через точку $M_0 \in l$, перпендикулярной касательной к кривой l в этой точке называется нормалью к заданной кривой в данной точке. Пусть $y = f(x)$ – кривая и в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ существует касательная.



Как известно из аналитической геометрии, уравнение прямой, проходящей через $M_0(x_0; y_0)$ и угловым коэффициентом k имеет вид: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)(*)$. Как известно из предыдущего параграфа, $k = f'(x_0)$ и уравнение касательной будет $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Составим уравнение нормали. Угловой коэффициент нормали $k_1 = -\dfrac{1}{k} = -\dfrac{1}{f'(x_0)}, f'(x_0) \neq 0$

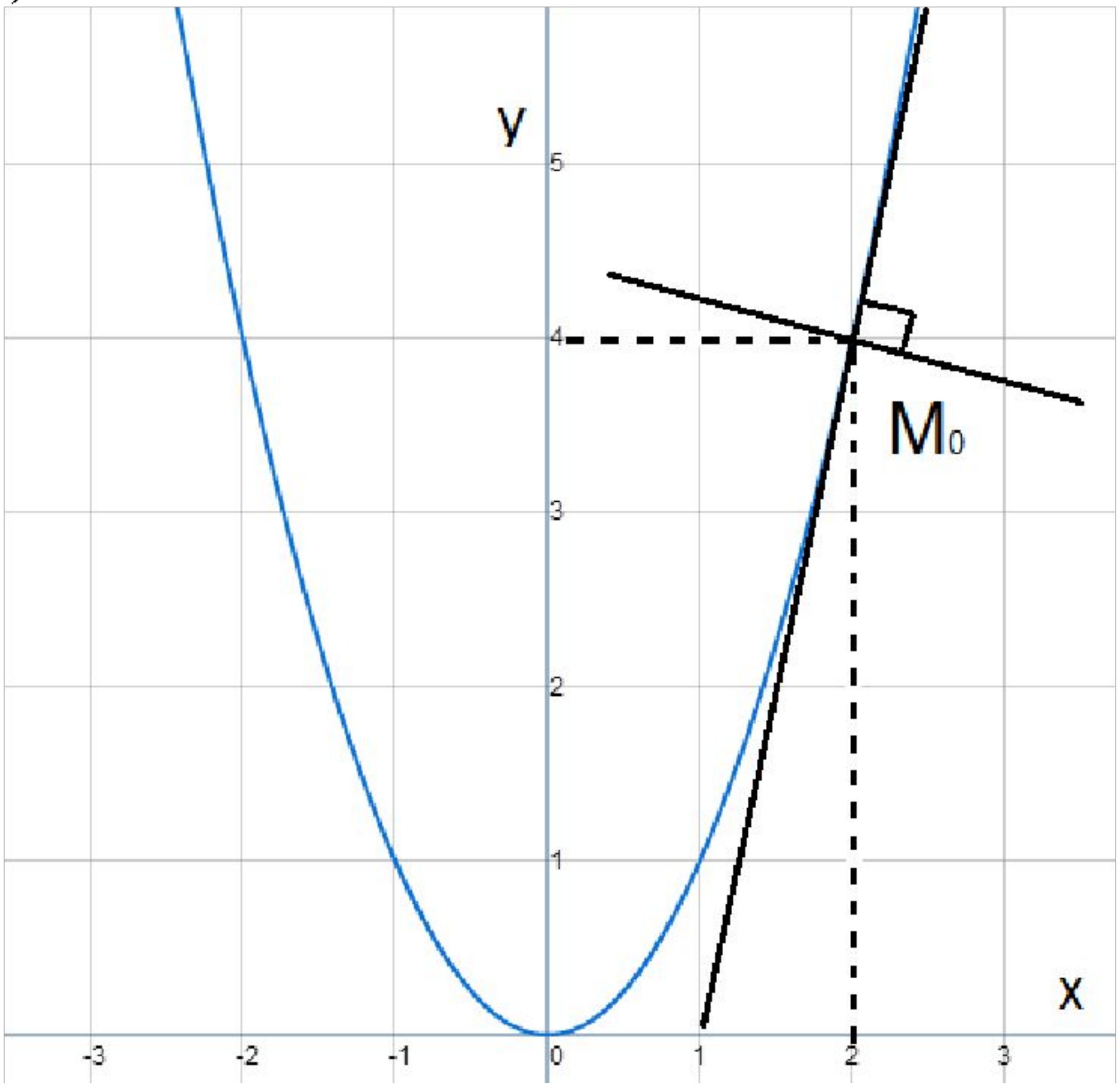
Подставляя k_1 в уравнение (*), получим искомое уравнение нормали:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Пример.

Задача:

Составить уравнение касательной и нормали к параболе $y = x^2$ в точке $M_0(2;4)$



$$y'\big|_{x=2} = 4 = k$$

$$y - 4 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 4$$

$4x - y - 4 = 0$ - уравнение касательной

$$k_1 = -\frac{1}{4}$$

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

$$4y - 16 = -x + 2$$

$x + 4y - 18 = 0$ - уравнение нормали.

Непрерывность функции, имеющей производную.

Th (о непрерывности дифференцируемой функции):

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство:

Пусть функция дифференцируема в точке x_0, т.е. $f'(x_0) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \overset{Th*}{\Rightarrow}$ эта функция представима в виде суммы:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x); \textit{где}\ \alpha(x) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$$

$$\Delta y = \Delta x\left(f'(x_0) + \alpha(\Delta x)\right)$$

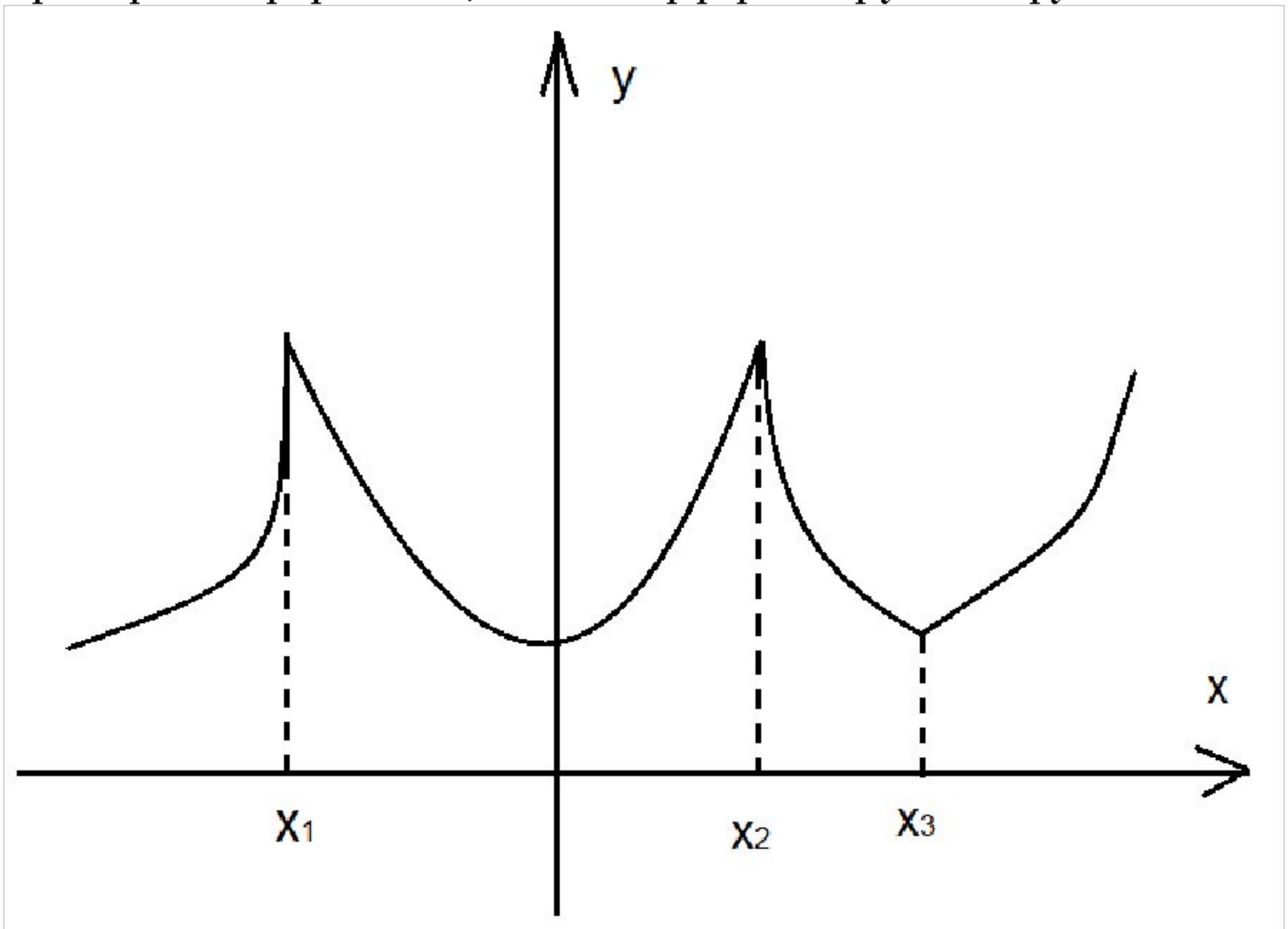
$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$ т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции и, стало быть, эта функция непрерывна.

Ч.т.д.

Замечание 1:

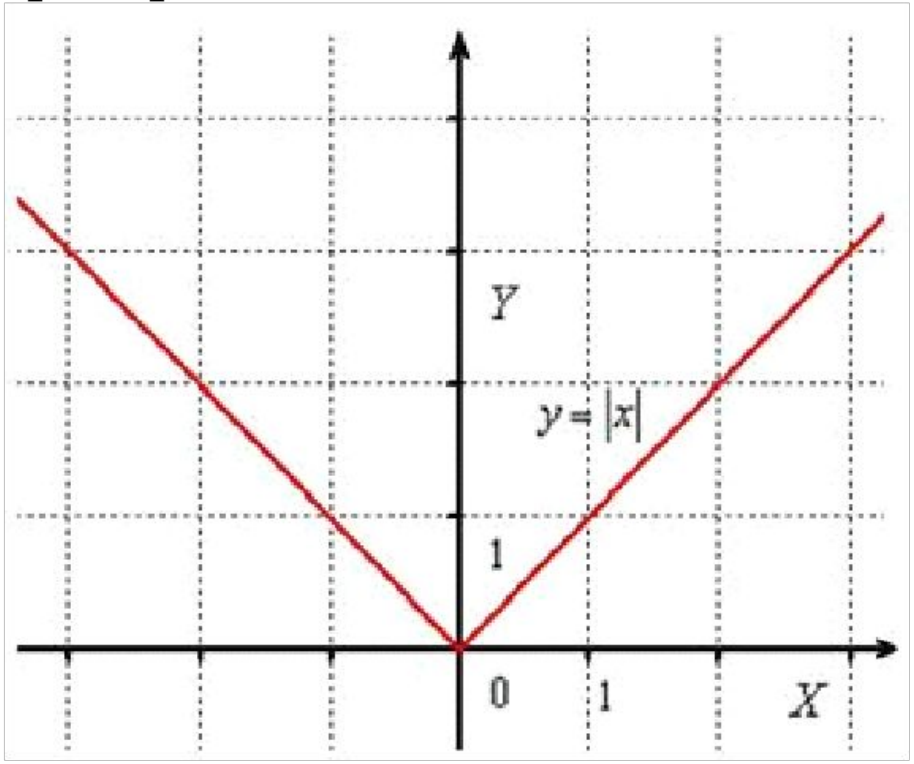
Обратное утверждение, вообще говоря, а именно из того, что функция непрерывна в точке не следует, что она дифференцируема в этой точке.

Примеры непрерывных, но не дифференцируемых функций:



В точках x_1, x_2, x_3 функция не дифференцируема. Производная не существует, поскольку в соответствующих точках графика нет касательной, а стало быть, нет речи об угловом коэффициенте.

Пример 2.



$y = |x|$

В точке $x_0 = 0$ функция не дифференцируема, будучи непрерывной. Во всех остальных точках она дифференцируема.

Замечание 2.

Существование производной $f'(x_0)$ тесно связано с существованием касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, а именно: если производная существует, то непременной существует и касательная, и потому существование касательной в точке графика всегда влечет отсутствие производной в соответствующей точке x_0.