

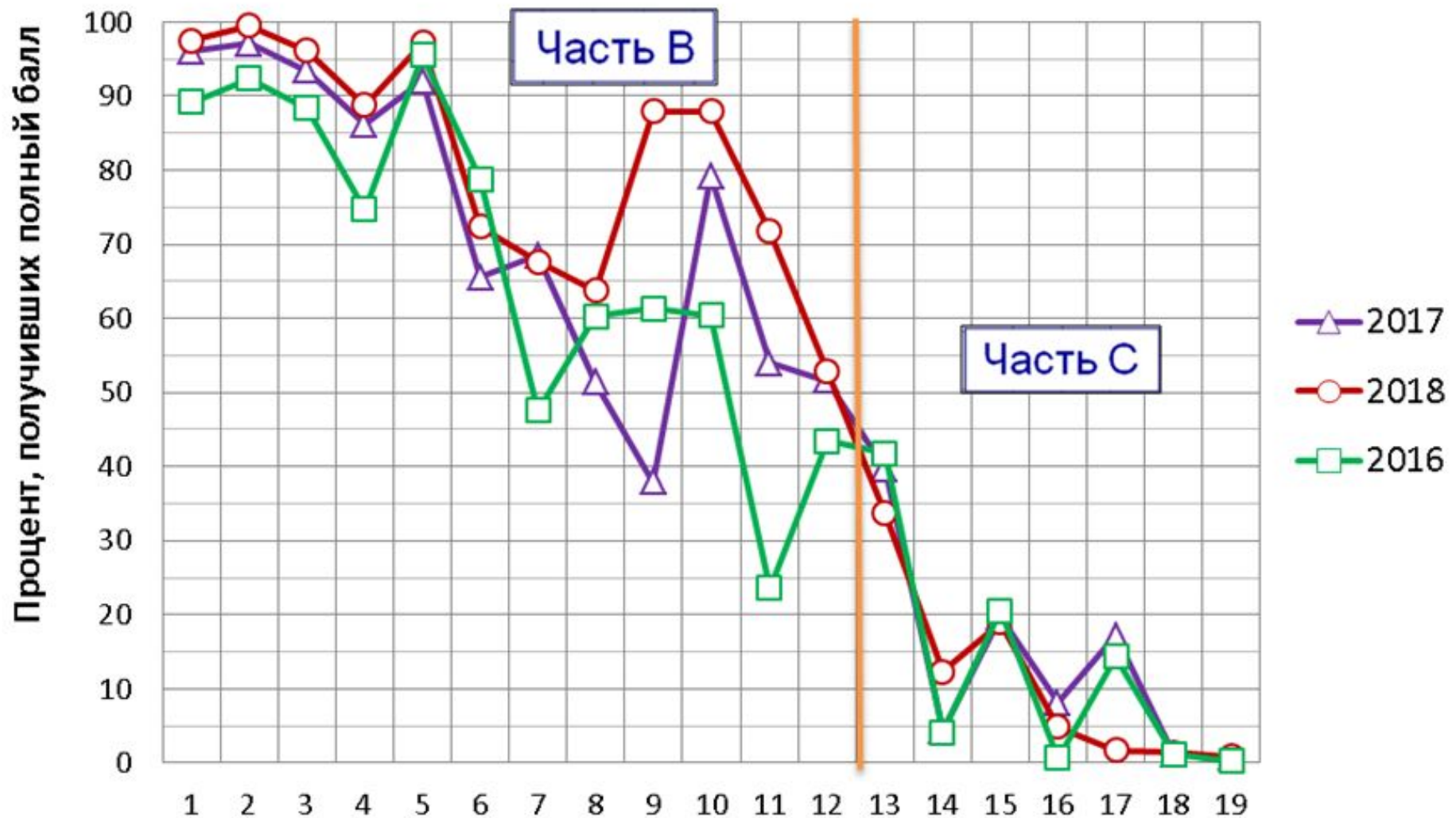
КРУГЛЫЕ ТЕЛА В ЗАДАЧАХ ЕГЭ профильного уровня



**Прокофьев Александр Александрович,
Зав.каф. «Высшей математики – 1», НИУ МИЭТ,
учитель математики ГБОУ г. Москвы «Школа №1298»**

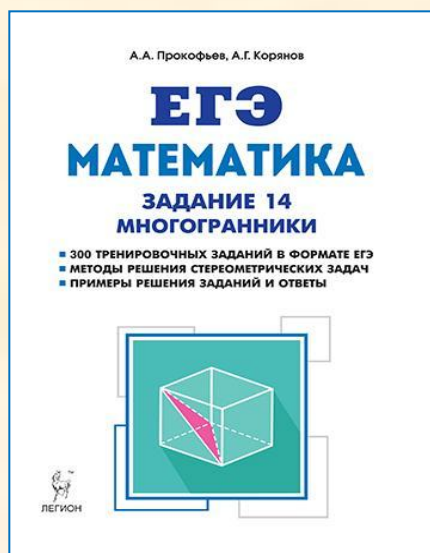
Сравнение процентов решаемости заданий в ЕГЭ 2016-2018 гг.

Сравнение итоговых результатов экзаменов по математике
профильного уровня в 2016-2018 гг.



Элементы содержания, проверяемые заданием 8 и 14 экзаменационной работы

	<i>Тела и поверхности вращения</i>
5.4.1	Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка
5.4.2	Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка
5.4.3	Шар и сфера, их сечения
5.5.6	Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы
5.5.7	Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара
5.6.2	Формула расстояния между двумя точками, уравнение сферы



Что можно ожидать в качестве задания 8 на экзамене?

Тип задания по кодификатору требований

Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов).

Характеристика задания

Несложное задание по стереометрии на применение основных формул, связанных с вы-

числением площадей поверхностей или объёмов многогранников (пирамид и призм) или тел вращения (цилиндров, конусов, шаров), в том числе вписанных или описанных около других многогранников или тел вращения.

Комментарий

Для решения задачи достаточно знать формулы площадей поверхности и объёмов пирамиды, призмы, цилиндра, конуса и шара.



О сколько нам открытий
чудных
Готовят ...



Цилиндр

С прямыми круговыми цилиндрами, которые изучаются в школьном курсе стереометрии, связаны, в сущности, только три формулы (формула объёма цилиндра и задачи, связанные с ней, будут рассмотрены отдельно):

$S_{\text{бок}} = 2\pi rh$ — формула площади боковой поверхности цилиндра;

$S_{\text{осн}} = \pi r^2$ — формула площади основания цилиндра;

$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$ — формула площади полной поверхности цилиндра.

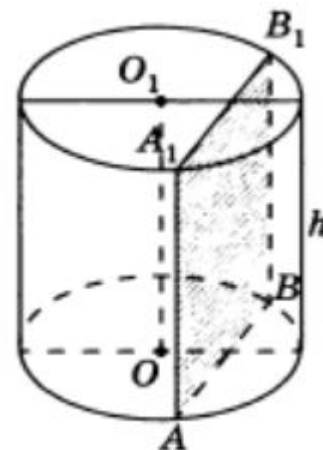
Здесь r — радиус основания цилиндра, а h — его высота и образующая, $S_{\text{бок}}$, $S_{\text{полн}}$ и $S_{\text{осн}}$ — соответственно площади боковой поверхности, полной поверхности и основания цилиндра.

$V = \pi r^2 h$ — формула объёма цилиндра

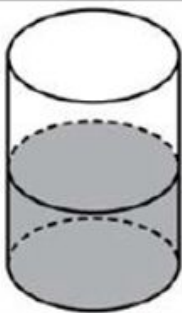
● Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось, называется **осевым сечением цилиндра**. Так как поворот про-

При этом все осевые сечения цилиндра — равные между собой прямоугольники.

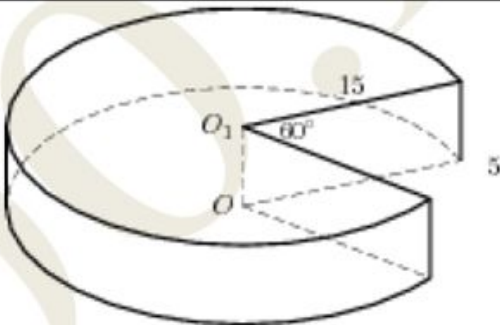
Так как все образующие цилиндра равны и параллельны друг другу, то любое сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, есть прямоугольник, высота которого равна образующей цилиндра.



Цилиндр

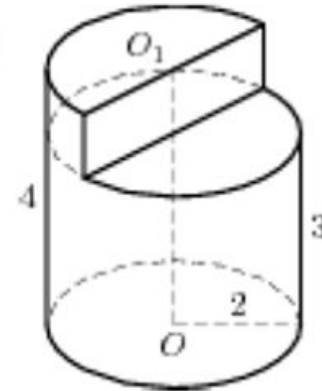
В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см . В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см . Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3 .		1500
В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см . На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.		4
Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .		12
В цилиндрический сосуд, в котором находится 6 литров воды, опущена деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся в 1,5 раза. Чему равен объем детали? Ответ выразите в литрах.		3
Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая в полтора раза шире. Найдите отношение объема второй кружки к объему первой.		1,125

Цилиндр

Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.	6
Длина окружности основания цилиндра равна 3. Площадь боковой поверхности равна 6. Найдите высоту цилиндра.	2
Площадь боковой поверхности цилиндра равна 72π , а диаметр основания — 9. Найдите высоту цилиндра.	8
Площадь боковой поверхности цилиндра равна 2π , а высота — 1. Найдите диаметр основания.	2
Площадь осевого сечения цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .	4
Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .	 937,5

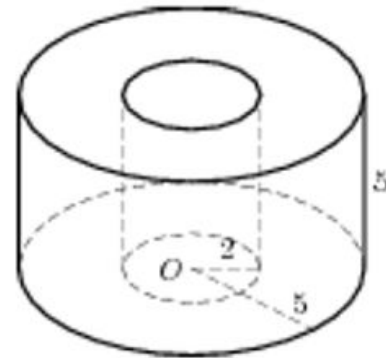
Цилиндр

Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .



14

Найдите объем V части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .



105

Конус

В школьном курсе геометрии рассматриваются только прямые круговые конусы. Пусть h — высота конуса, r — радиус окружности основания, l — образующая конуса. Тогда имеют место следующие формулы:

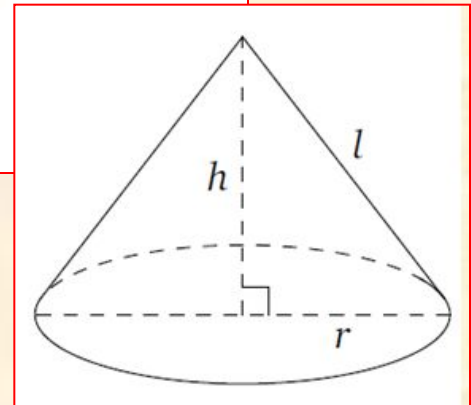
$S_{\text{бок}} = \pi r l$ — формула площади боковой поверхности конуса;

$S_{\text{осн}} = \pi r^2$ — формула площади основания конуса;

$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$ — формула площади полной поверхности конуса;

$l^2 = r^2 + h^2$ — формула, связывающая высоту, образующую и радиус основания конуса.

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ — формула объёма конуса



Теорема 28. Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.

$$S_{\text{полн}} = \pi \cdot (R + r) \cdot l + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot r^2.$$

$$V_{\text{ус.кон}} = \frac{1}{3} \pi \cdot h \cdot (R^2 + r \cdot R + r^2).$$



Конус

Определение. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется осевым сечением конуса.

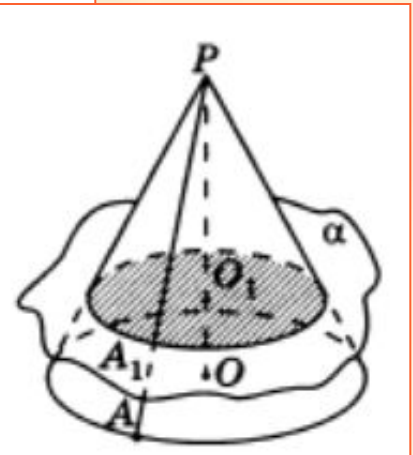
Задача

Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей – 10. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.

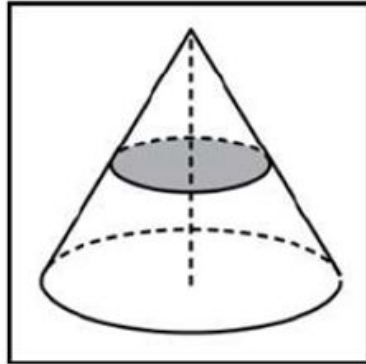
48

Теорема 27. Если конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, то:

- 1) все образующие и высота конуса делятся этой плоскостью на пропорциональные части;
- 2) в сечении получается круг, подобный основанию;
- 3) площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.



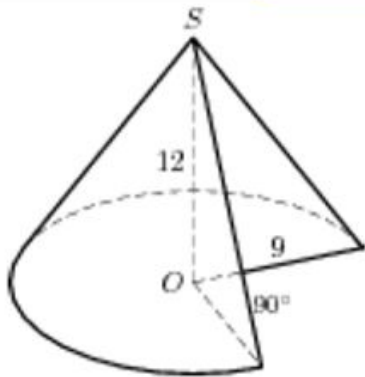
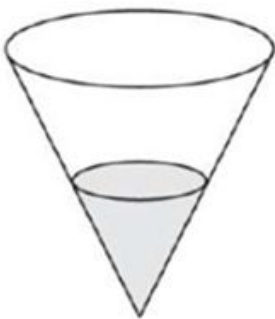
Конус

Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.		2
Найдите объем V конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 30° . В ответе укажите V/π .	1	
Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высоту уменьшить в 3 раза?	3	
Во сколько раз увеличится объем конуса, если его радиус основания увеличить в 1,5 раза?	2,25	
Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите его объем, деленный на π	128	
Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Вычислите объем конуса, деленный на π .	9	

Конус

Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника ABC вокруг катета, равного 6. Найдите его объем, деленный на π .	72
Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4 и высотой 6. Найдите его объем, деленный на π	16
Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.	3
Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующую увеличить в 3 раза?	3
Во сколько раз уменьшится площадь боковой поверхности конуса, если радиус его основания уменьшить в 1,5 раза?	1,5
Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания. Ответ дайте в градусах.	60
Площадь полной поверхности конуса равна 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. Найдите площадь полной поверхности отсеченного конуса.	3
Радиус основания конуса равен 3, высота равна 4. Найдите площадь полной поверхности конуса, деленную на π	24

Конус

Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите V/π .		243
Высота конуса равна 4, а длина образующей — 5. Найдите диаметр основания конуса.		6
В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 70 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?		490
Площадь основания конуса равна 16π , высота — 6. Найдите площадь осевого сечения конуса.		24
Площадь основания конуса равна 18. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки 3 и 6, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.		2

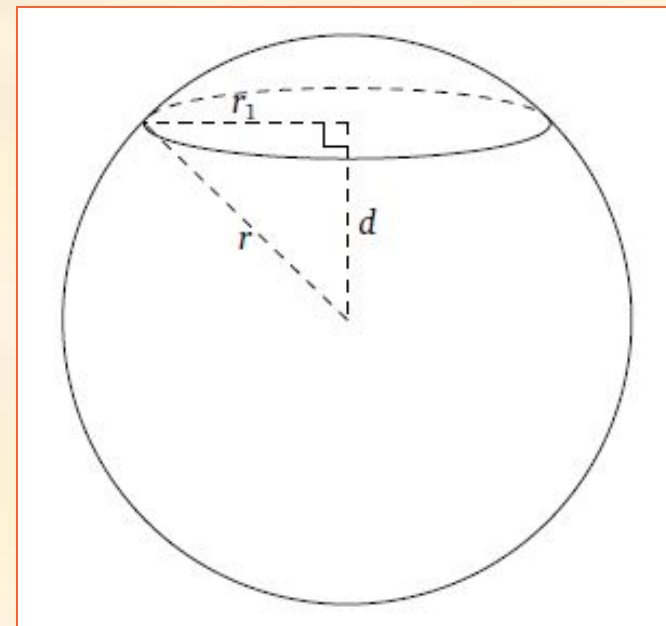
Шар

Теорема 29 (о пересечении шара и сферы с плоскостью).

1) Если расстояние от центра шара до данной плоскости меньше радиуса шара, то пересечением шара с плоскостью является круг. Центром этого круга является основание перпендикуляра, проведенного из центра шара на плоскость, или сам центр шара, если плоскость проходит через этот центр. Пересечением сферы с плоскостью является окружность указанного круга. Радиус r сечения в этом случае равен $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, где R — радиус шара, а d — расстояние от центра шара до плоскости сечения.

2) Если расстояние от центра шара до данной плоскости равно радиусу шара, то плоскость имеет с шаром и ограничивающей его сферой только одну общую точку.

3) Если расстояние от центра шара до данной плоскости больше радиуса, то плоскость не имеет с шаром общих точек.



Задача

Задача

4. Шар пересечён плоскостью так, что радиус сечения в пять раз меньше радиуса шара. Найдите радиус шара, если площадь сечения равна 4π .

5. Шар пересечён двумя параллельными плоскостями, расположенными по одну сторону от его центра. Радиус первого сечения равен 12, радиус второго сечения равен 9. Расстояние от центра шара до плоскости первого сечения равно 9. Найдите расстояние между плоскостями сечений.

Шар

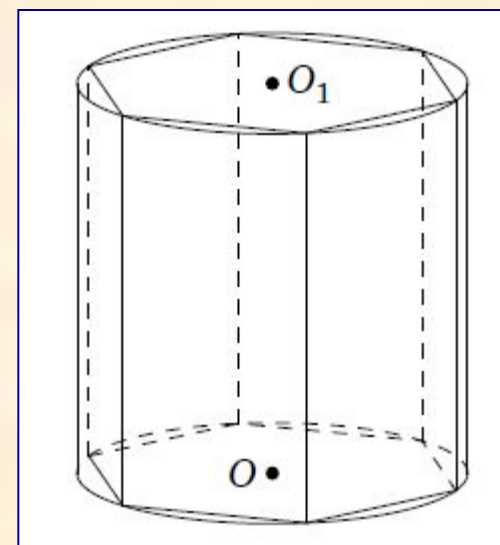
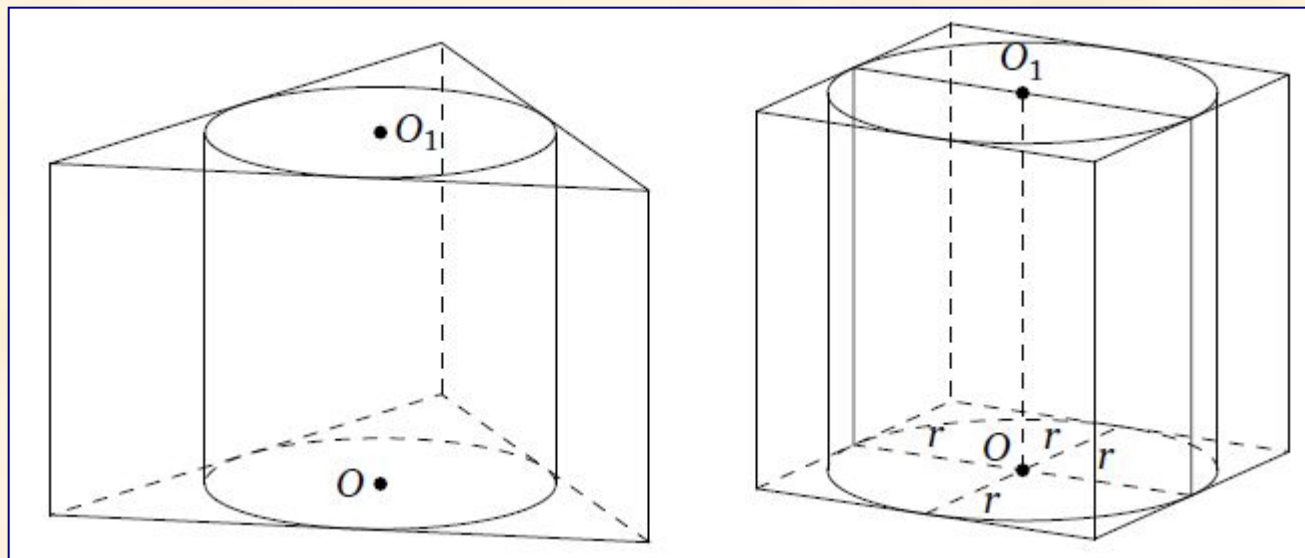
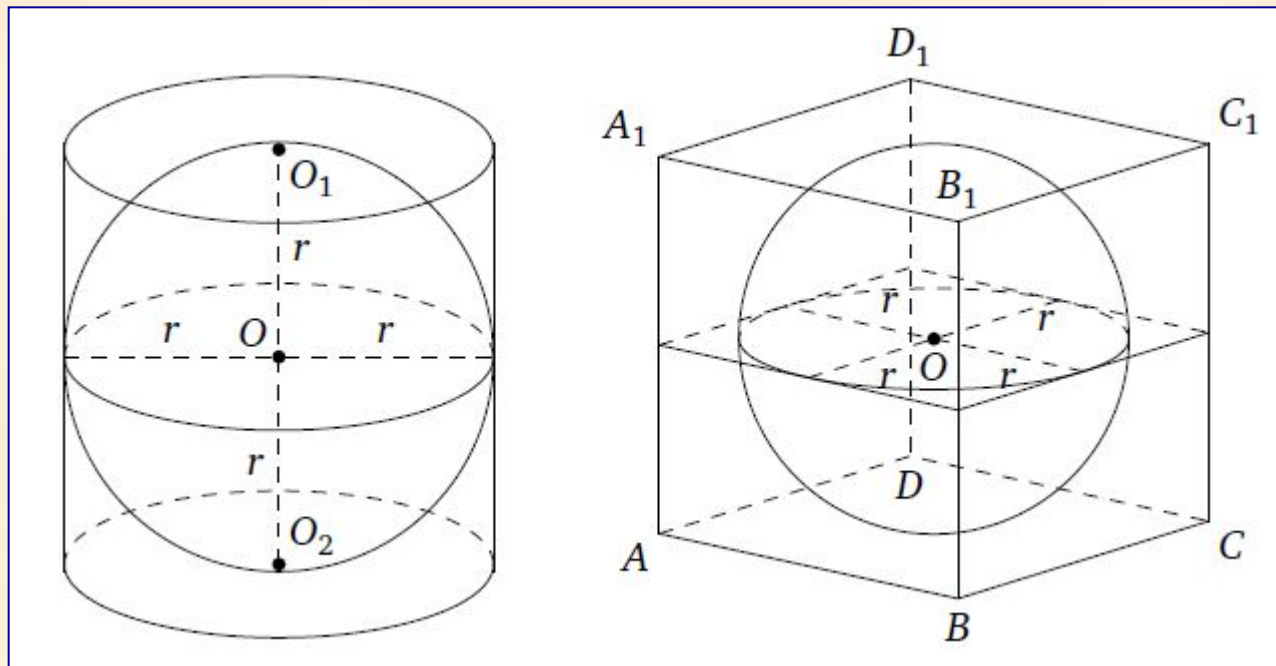
Формул, связанных со сферой и шаром, не так много:

$S = 4\pi r^2$ — формула площади S поверхности сферы радиуса r ;

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ — формула объёма V шара радиуса r .

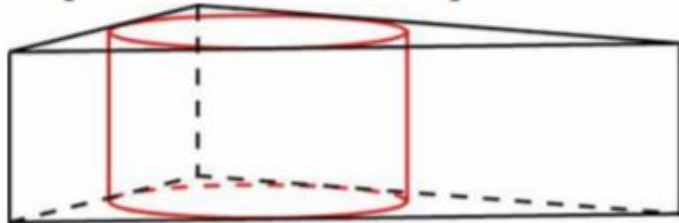
Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 2 раза?	4
Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в три раза?	27
Радиусы трех шаров равны 6, 8 и 10. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов.	12
Объем одного шара в 27 раз больше объема второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?	9
Радиусы двух шаров равны 6, 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.	10
Объем шара равен 288π . Найдите площадь его поверхности, деленную на π .	144
Площадь поверхности шара равна 12. Найдите площадь большого круга шара.	3

Комбинации тел вращения и многогранников

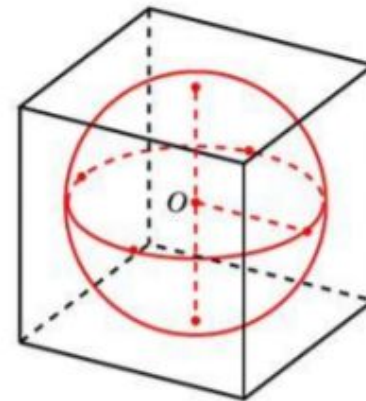


Комбинации тел вращения и многогранников

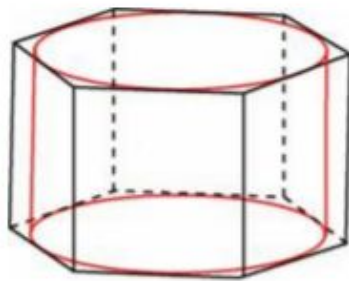
№ 27065 Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.



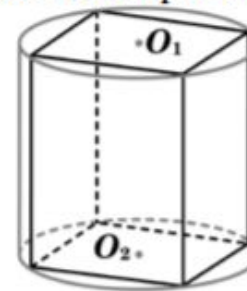
№ 27043 Прямоугольный параллелепипед описан около сферы радиуса 1. Найдите его объем.



№ 27066 Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.

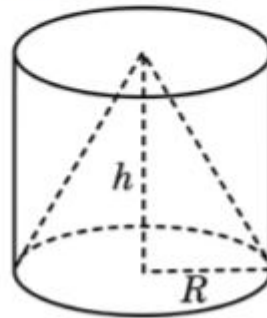


№ 27050 В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 2. Боковые ребра призмы равны $\frac{2}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.



Комбинации тел вращения и многогранников

№ 27051 Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 25.



4. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $13\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

5. В шар вписан куб. Найдите радиус шара, если ребро куба равно $10\sqrt{3}$.

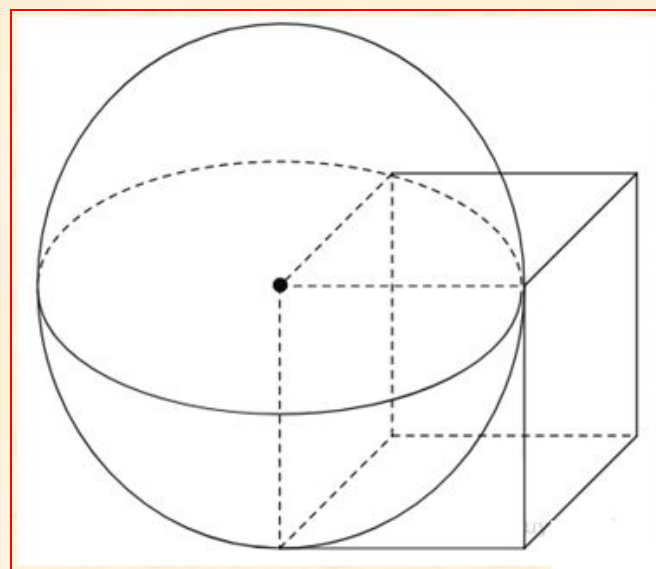
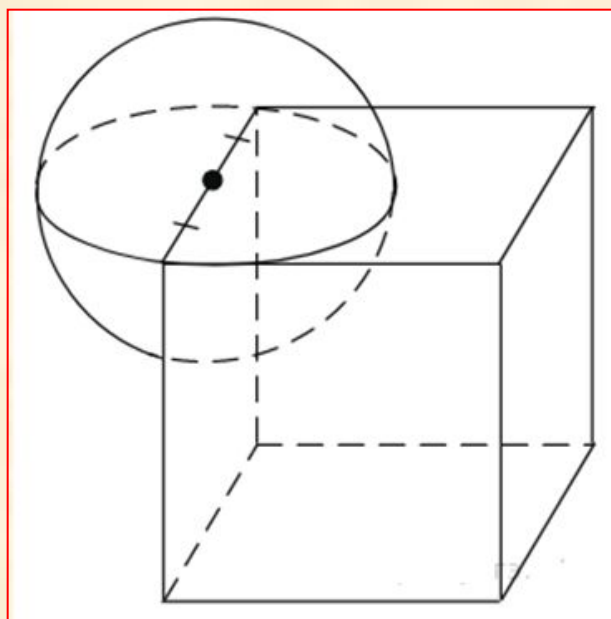


Два конуса имеют общую высоту; вершины их лежат на противоположных концах этой высоты. Образующая одного конуса равна L и составляет с высотой угол α . Образующая другого конуса составляет с высотой угол β . Найти объём общей части обоих конусов.

Комбинации тел вращения и многогранников

Вершина A куба $ABCA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1,6 является центром сферы, проходящей через точку A_1 . Найдите площадь S части сферы, содержащейся внутри куба. В ответе запишите величину S/π .

Ответ: 1,28.



Середина ребра куба со стороной 1,9 является центром шара радиуса 0,95. Найдите площадь S части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответе запишите S/π .

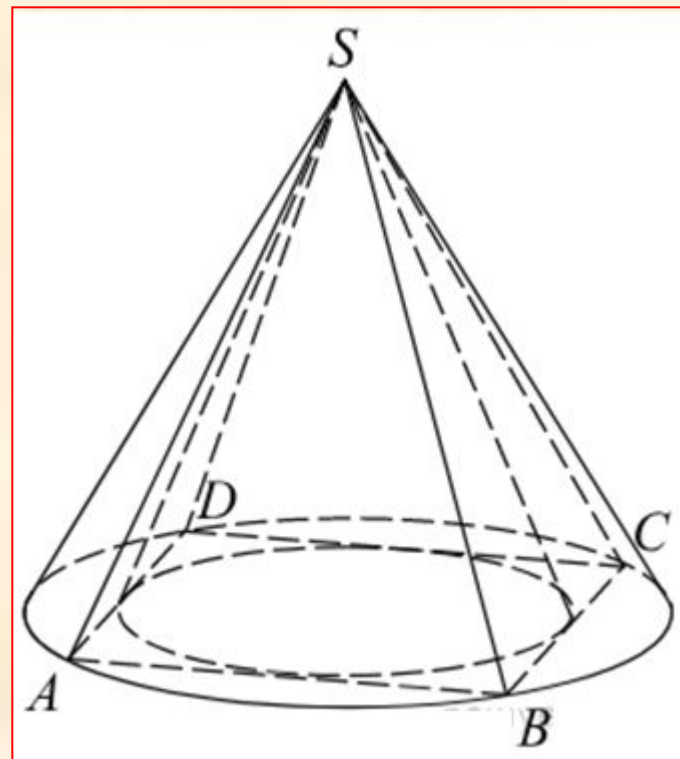
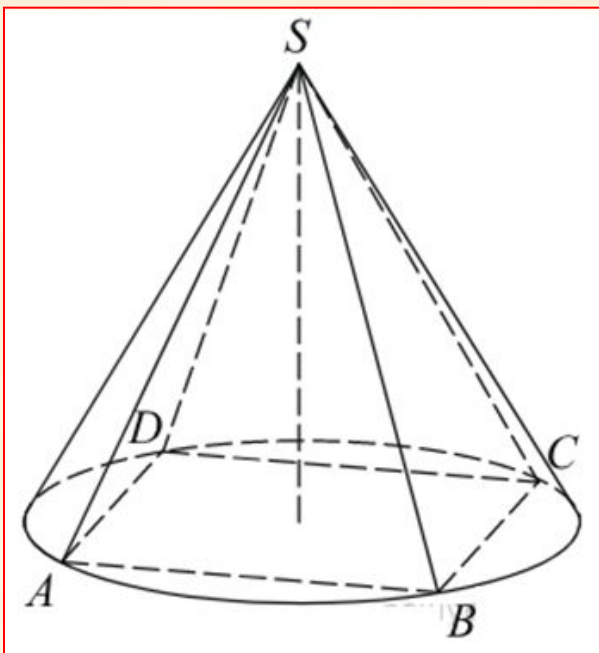
Ответ: 0,9025.

Комбинации тел вращения и многогранников

Задание 8 № [27124](#)

Во сколько раз объем конуса, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, больше объема конуса, вписанного в эту пирамиду?

Ответ: 2.



Задание 8 № [27123](#)

Конус описан около правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания 4 и высотой 6. Найдите его объем, деленный на π .

Ответ: 16.

Что можно ожидать в качестве задания 14 на экзамене?

Задание 14

Тип задания по кодификатору требований

Стереометрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов).

Характеристика задания

Задание на вычисление отрезков, площадей, углов, связанных с многогранниками и телами вращения.

Комментарий

Традиционная задача по стереометрии, связанная с вычислением длин, площадей (в том числе площадей сечений многогранников и тел вращения), углов (между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, между двумя плоскостями), связанных с призмой, пирамидой, цилиндром, конусом или шаром.



О сколько нам открытий
чудных
Готовят ...



Характеристика задания 14 ЕГЭ профильный уровень

Спецификация КИМ

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на базовом уровне, в минутах	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на профильном уровне, в минутах
14	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2, 4.3, 5.2, 5.3	5.2–5.6	П	2	40	20 минут



- 4.2. Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы.
- 5.2. Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.
- 5.3. Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения.

Критерии проверки задания №14

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б, возможно с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Особенности первого пункта задания 14

Возможны две ситуации в условии, описывающем геометрическую конфигурацию до формулировки пункта а.

Условие до пункта а задания:

- **не содержит числовых данных** (в этом случае свойство, которое нужно доказать в пункте а, является общим и выполняется для всех конфигураций описанных в условии);
- **содержит числовые данные** (в этом случае доказываемое свойство обычно является частным и выполняется только для приведенного в условии набора числовых данных и доказательство основывается на вычислениях, то есть сводится к проверке указанного свойства).

Об учебниках по геометрии и теоремах в них (что должен знать эксперт)

Геометрия. 10 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич.

Геометрия. 10—11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.].

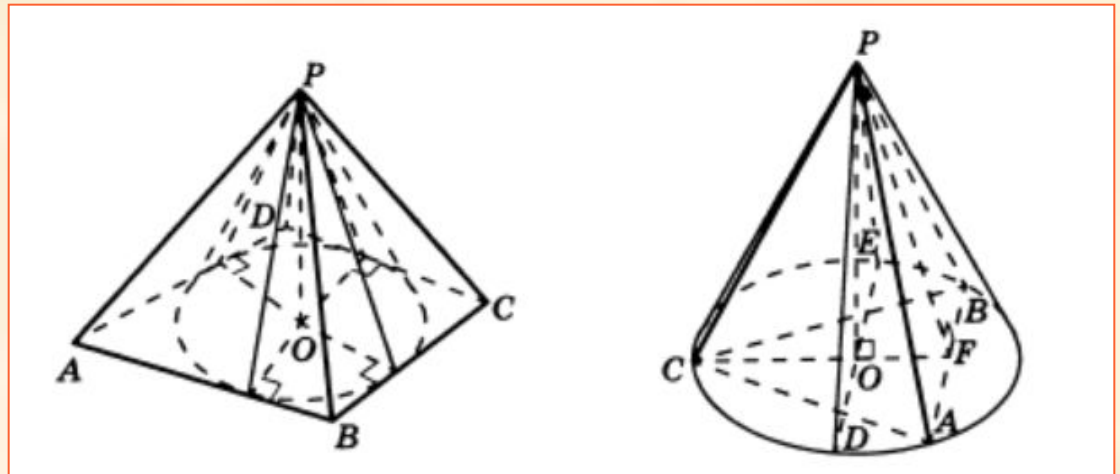


Теоремы и определения из учебников

Определение. Касательной плоскостью к конусу называется плоскость, проходящая через образующую конуса перпендикулярно осевому сечению, проведенному через эту образующую.

Определение. Пирамида называется вписанной в конус, если у них вершина общая, а основание пирамиды вписано в основание конуса. В этом случае конус называется описанным около пирамиды.

Определение. Пирамида называется описанной около конуса, если у них вершина общая, а основание пирамиды описано около основания конуса. В этом случае конус называют вписанным в пирамиду.



Теоремы и определения из учебников

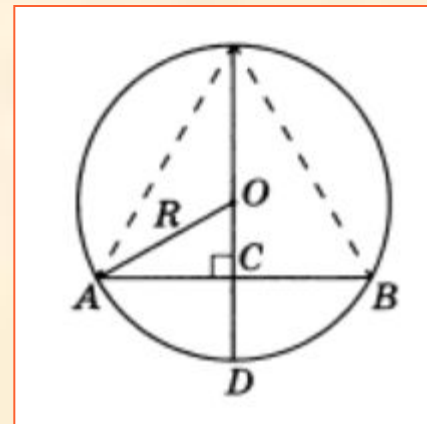
Определение. Шар называется вписанным в цилиндр, если основания и каждая образующая цилиндра касаются шара.

Определение. Шар называется описанным около цилиндра, если основания цилиндра служат сечениями шара.

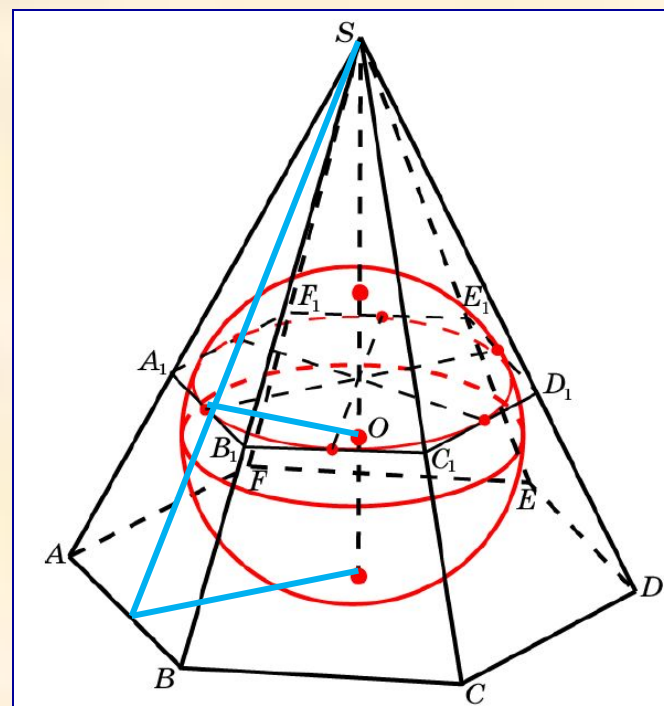
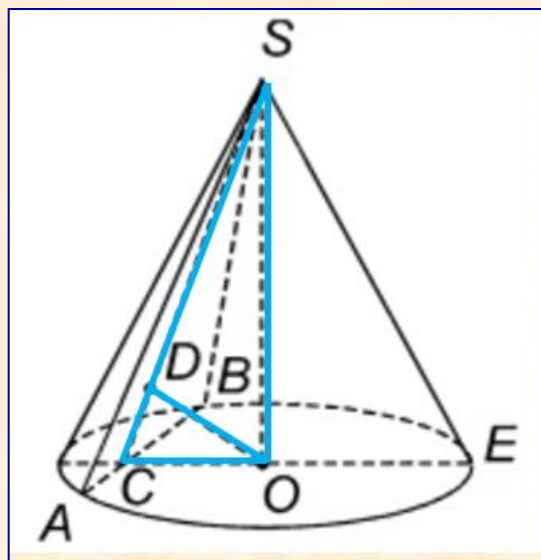
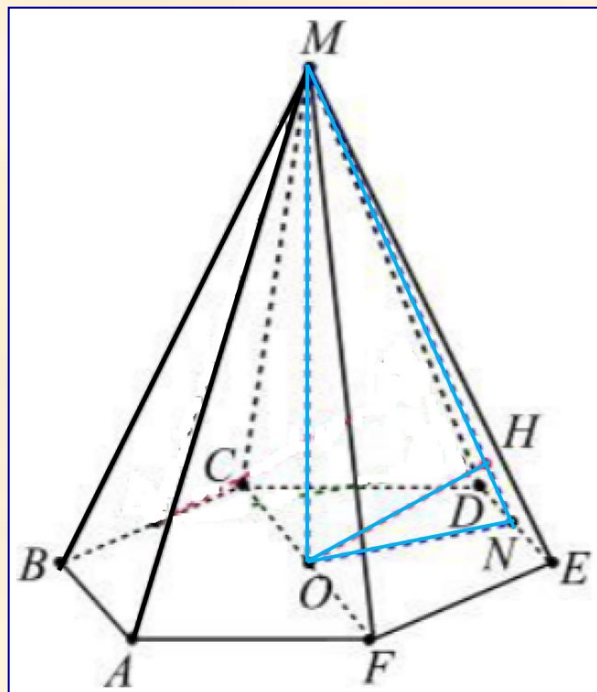
Определение. Шар называется описанным около конуса, если основание конуса — сечение шара, а вершина конуса принадлежит поверхности шара.

Конус при этом называют вписанным в шар.

Центр шара, описанного около конуса, совпадает с центром круга, описанного около осевого сечения конуса, а радиус шара равен радиусу этого круга.



Общая опорная задача



Части шара (отсутствует в проверяемых на ЕГЭ темах)



$$S_{\text{сегм.поверх}} = 2\pi R h,$$

где h — высота сферического сегмента.

$$S_{\text{шар.пояса}} = 2\pi R h,$$

где h — высота шарового пояса.

$$S_{\text{шар. сект}} = \pi R (2h + \sqrt{2Rh - h^2}).$$



$$V_{\text{шар. сегм}} = \pi \cdot h^2 \cdot \left(R - \frac{h}{3} \right).$$

$$V = \frac{\pi H}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2).$$

$$V_{\text{шар. сект}} = \frac{2}{3} \pi \cdot R^2 \cdot h.$$

Отметим, что объем шарового слоя с радиусами оснований r_1 и r_2 и высотой H вычисляется по формуле

$$V = \frac{\pi H}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2).$$

ЕГЭ 2018 (основной экзамен)

14

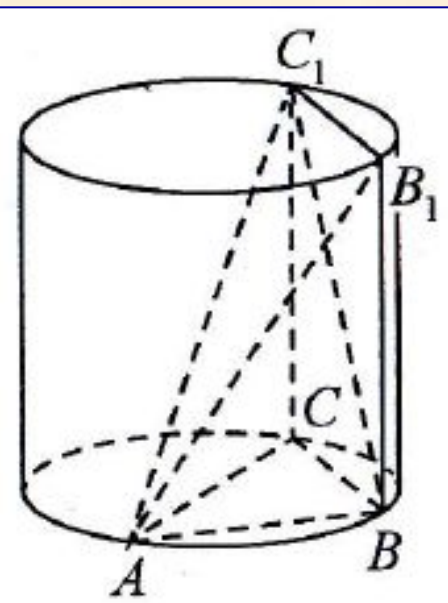
В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 45^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $CC_1 = 2\sqrt{6}$.

- а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 60° .
б) Найдите расстояние от точки B до прямой AC_1 .

а) Пусть BB_1 — образующая цилиндра. Тогда BB_1C_1C — прямоугольник, поэтому угол между прямыми AC_1 и BC равен углу AC_1B_1 .

Угол ABC опирается на диаметр основания цилиндра, поэтому он прямой. Значит, прямая B_1C_1 , параллельная прямой BC , перпендикулярна прямым AB и BB_1 . Таким образом, прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости ABB_1 , а значит, угол AB_1C_1 прямой.

В прямоугольном треугольнике AB_1C_1 :



$$B_1C_1 = BC = AB = 2\sqrt{3}, \quad AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{AB^2 + CC_1^2} = 6.$$

ЕГЭ 2018 (основной экзамен)

Значит, $\angle AC_1B_1 = 60^\circ$.

б) Прямая AB перпендикулярна прямым BC и BB_1 . Таким образом, прямая AB перпендикулярна плоскости BB_1C . Следовательно, треугольник ABC_1 прямоугольный, поэтому искомое расстояние равно его высоте h , проведённой к гипотенузе. Получаем:

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^2} = 6; \quad AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC_1^2} = 4\sqrt{3}; \quad h = \frac{AB \cdot BC_1}{AC_1} = 3.$$

Ответ: б) 3.



Цилиндр (пример задания)

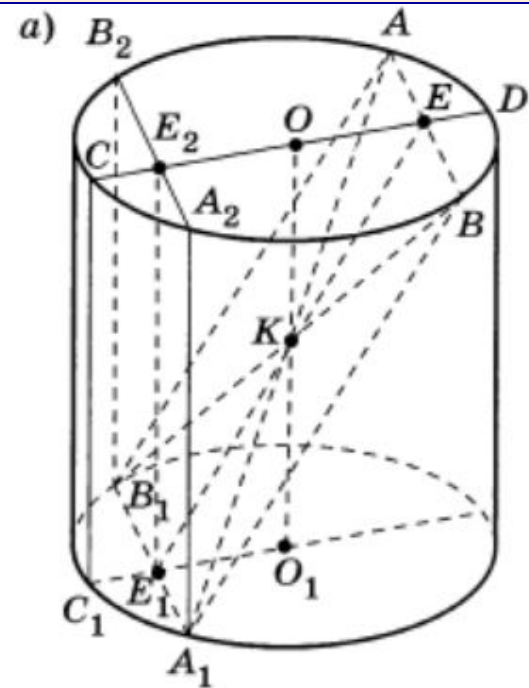
Точки O и O_1 — центры верхнего и нижнего оснований цилиндра, точка K — середина отрезка OO_1 . На окружности верхнего основания взяты точки A и B , не лежащие на диаметре, и на окружности нижнего основания — точки A_1 и B_1 , симметричные точкам A и B соответственно относительно точки K .

а) Докажите, что прямые AB_1 и BA_1 параллельны.

б) Найдите площадь четырёхугольника ABA_1B_1 , если радиус основания равен 5, $AB = 6$, а высота цилиндра равна 8.

Решение. а) Рассмотрим треугольники ABK и A_1B_1K (см. рисунок а). Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними ($AK = KA_1$, $BK = KB_1$, так как точки A и B симметричны точкам A_1 и B_1 соответственно, углы AKB и B_1KA_1 равны как вертикальные). Тогда $AB = A_1B_1$ и $AB \parallel A_1B_1$ ($\angle KAB = \angle KA_1B_1$). Следовательно, четырёхугольник ABA_1B_1 — параллелограмм и $AB_1 \parallel BA_1$.

б) Пусть точка E — середина хорды AB . Проведём через точку E диаметр CD ($CD \perp AB$, поскольку проходит через её середину). Прямая AB перпендикулярна плоскости осевого сечения цилиндра, содержащего отрезок CD ($AB \perp CC_1$, где CC_1 — образующая цилиндра, и $AB \perp CD$). По признаку перпендикулярности плоскостей плоскость па-



параллелограмма ABA_1B_1 , содержащая отрезок AB , перпендикулярна плоскости осевого сечения цилиндра C_1CD , прямая E_1E — линия пересечения этих плоскостей ($E_1E = C_1CD \cap ABA_1$). Тогда $AB \perp EE_1$. Так как точки E и E_1 — середины отрезков AB и A_1B_1 , то прямая E_1E параллельна сторонам A_1B и B_1A параллелограмма ABA_1B_1 . Значит, $AB \perp A_1B$ и параллелограмм ABA_1B_1 — прямоугольник.

Площадь прямоугольника ABA_1B_1 равна $E_1E \cdot AB$ ($E_1E = B_1A = BA_1$). Найдём отрезок E_1E .

По теореме о пересекающихся хордах $CE \cdot ED = AE \cdot EB$, где $CD = 10$, $AE = EB = 3$. Пусть $ED = x$. Тогда

$$\begin{aligned}(10 - x) \cdot x &= 3 \cdot 3, \\ x^2 - 10x + 9 &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда $x = 1$ или $x = 9$. Поскольку отрезок CE больше радиуса окружности, то $CE = 9$, $ED = 1$.

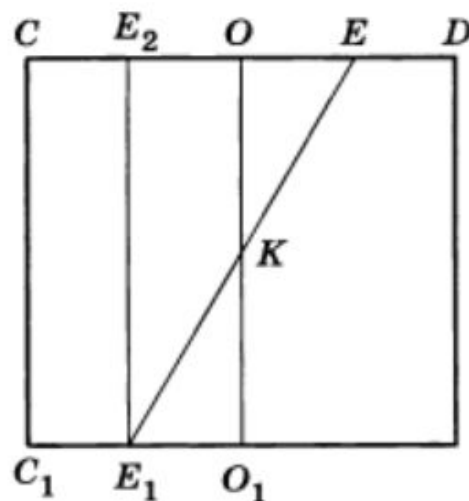
Так как $AB = A_1B_1 = 6$, то в нижнем основании $C_1E_1 = 1$. Проведём $E_1E_2 \parallel C_1C$ (см. рисунок б). Тогда $E_1E_2 = C_1C = 8$, $C_1E_1 = CE_2 = 1$. По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника E_1E_2E получаем

$$E_1E = \sqrt{E_1E_2^2 + E_2E^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

Значит, площадь параллелограмма ABA_1B_1 равна $E_1E \cdot AB = 8\sqrt{2} \cdot 6 = 48\sqrt{2}$.

Ответ. $48\sqrt{2}$.

б)



Цилиндр (примеры заданий (ЕГЭ 2014))

В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

$$\text{б) } 64 + 32\sqrt{3}$$

Отрезок AB — диаметр верхнего основания цилиндра, CD — диаметр нижнего, причём отрезки AB и CD не лежат на параллельных прямых.

а) Докажите, что у тетраэдра $ABCD$ скрещивающиеся рёбра попарно равны.

б) Найдите объём этого тетраэдра, если $AC = 6$, $AD = 8$, а радиус цилиндра равен 3

$$\text{б) } \frac{64}{3}$$

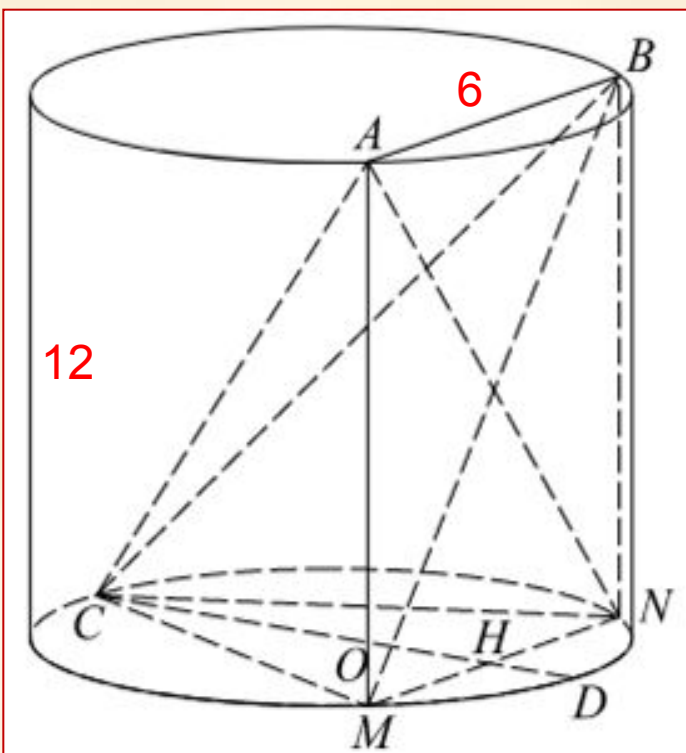
(ЕГЭ, 2014) Высота цилиндра равна 3. Равнобедренный треугольник ABC с боковой стороной 10 углом $\angle A = 120^\circ$ расположен так, что его вершина A лежит на окружности нижнего основания цилиндра, а вершины B и C — на окружности верхнего основания. Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью основания цилиндра.

$$\arcsin \frac{3}{5}$$

В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 12 и радиусом основания 6 проведена хорда AB , равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD , перпендикулярный AB . Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD , лежат с одной стороны от сечения.

- Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.
- Найдите объём пирамиды $CABNM$.

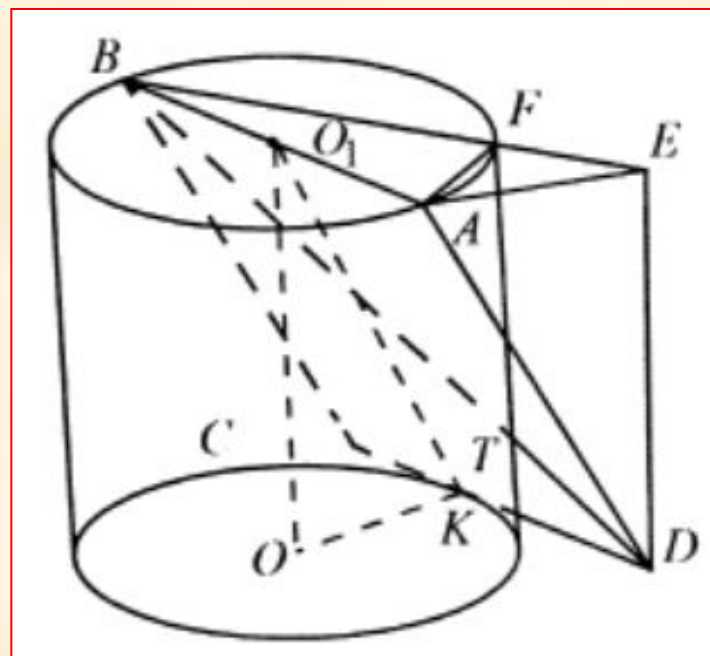
Тренировочная работа 2016



Ответ: б) $144 + 72\sqrt{3}$.

б) Найдите длину той части отрезка BD , которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $3\sqrt{2}$

а) Пусть сторона CD квадрата касается окружности нижнего основания в точке K , O_1 — центр верхнего основания, а O — центр нижнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок OK перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трёх перпендикулярах отрезок O_1K перпендикулярен CD . Поэтому K — середина CD . Тогда упомянутый угол наклона — угол OKO_1 и



Цилиндр

$\cos \angle OKO_1 = \frac{OK}{O_1K} = \frac{r}{O_1K}$, где r — радиус цилиндра. При этом

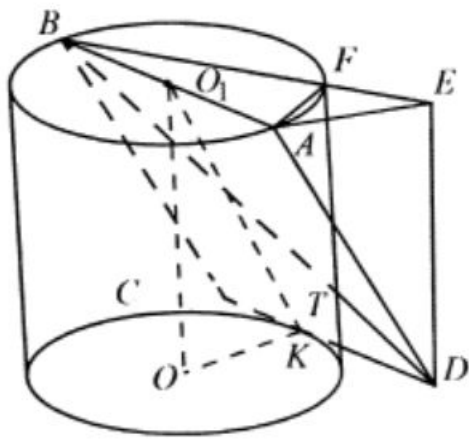
$O_1K = AD = AB = 2r$, поэтому $\cos \angle OKO_1 = \frac{1}{2}$ и $\angle OKO_1 = 60^\circ$

б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T ; E и F проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания. Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку

DE . Значит, $\frac{DT}{TB} = \frac{EF}{FB}$. Поскольку $\angle AFB = 90^\circ$ как угол, опирающийся на

диаметр, имеем $\frac{EF}{FB} = \frac{EF}{FA} \cdot \frac{FA}{FB} = \operatorname{tg} \angle EAF \cdot \operatorname{tg} \angle ABF = \operatorname{tg}^2 \angle ABF = \left(\frac{EA}{AB} \right)^2 = \frac{1}{4}$

Поэтому и $\frac{DT}{TB} = \frac{1}{4}$, т. е. $BT = \frac{4}{5}BD = \frac{4}{5}AD\sqrt{2} = \frac{4}{5}DE \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{3}}{5}$



Ответ: $\frac{16\sqrt{3}}{5}$.

Конус (примеры заданий ЕГЭ 2014)

(ЕГЭ, 2014) Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 3. Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP .

$$9\sqrt{14}$$

(Санкт-Петербург, пробный ЕГЭ, 2014) Отрезок AC — диаметр основания конуса, отрезок AP — образующая этого конуса и $AP = AC$. Хорда основания BC составляет с прямой AC угол 60° . Через AP проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой BC . Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

$$\frac{\sqrt{15}}{5}$$

(ЕГЭ, 2013) Радиус основания конуса равен 8, а его высота равна 15. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 14. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

$$\frac{15}{4}$$

Конус (пример задания)

В конус вписана треугольная пирамида $PABC$ так, что её вершина P совпадает с вершиной конуса, а вершины треугольника ABC лежат на окружности основания конуса. Отрезок BC пересекает диаметр основания конуса, проходящий через точку A , и делит его точкой пересечения пополам.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

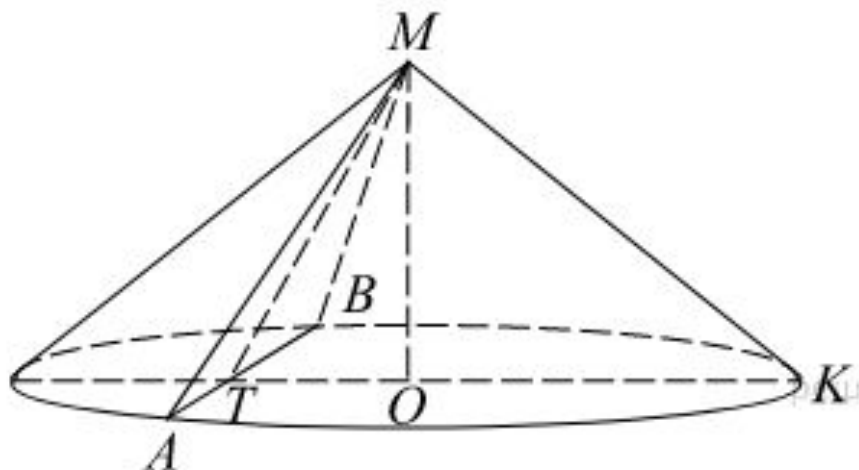
б) Найдите объём пирамиды $PABC$, если радиус основания конуса равен 5, $AC = 6$, а расстояние от центра основания конуса до боковых рёбер пирамиды $PABC$ равно $\frac{60}{13}$.

Ответ: б) 96

Дан прямой круговой конус с вершиной M . Осевое сечение конуса – треугольник с углом 120° при вершине M . Образующая конуса равна $2\sqrt{3}$. Через точку M проведено сечение конуса, перпендикулярное одной из образующих.

- а) Докажите, что полученный в сечении треугольник тупоугольный.
б) Найдите площадь сечения.

Тренировочная работа 2016



- б) Площадь треугольника MBA равна

$$S_{MBA} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2 = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $4\sqrt{2}$.

В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.

а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.

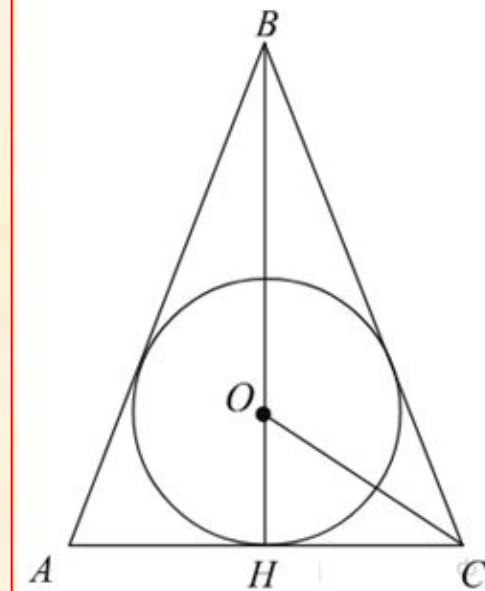
б) Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

Тренировочная работа 2014

Решение. а) Осевым сечением является равнобедренный треугольник боковые стороны которого являются образующими конуса, а основанием — его диаметр, и вписанная в треугольник окружность, радиус которой равен радиусу шара (см. рис.).

б) Пусть O — центр вписанной окружности, отрезок CO — биссектриса угла ACB и пусть угол $HCO = \alpha$. Имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OH}{HC} = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg} \widehat{HCB} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$



Тогда $BH = HC \operatorname{tg} \widehat{HCB} = 4$, $BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Для площадей поверхностей конуса и шара имеем: $S_{\text{кон}} = \pi R^2 + \pi Rl = 9\pi + 15\pi = 24\pi$, $S_{\text{ш}} = 4\pi r^2 = 4\pi(1,5)^2 = 9\pi$. Тем самым, искомое отношение равно $\frac{24}{9}$ или 8:3.

Ответ: б) 8:3.

На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A , B и C так, что $AB = BC$. Медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса.

а) Точка N — середина отрезка AC . Докажите, что угол MNB прямой.

б) Найдите угол между прямыми AM и SB , если $AS = 2$, $AC = \sqrt{6}$.

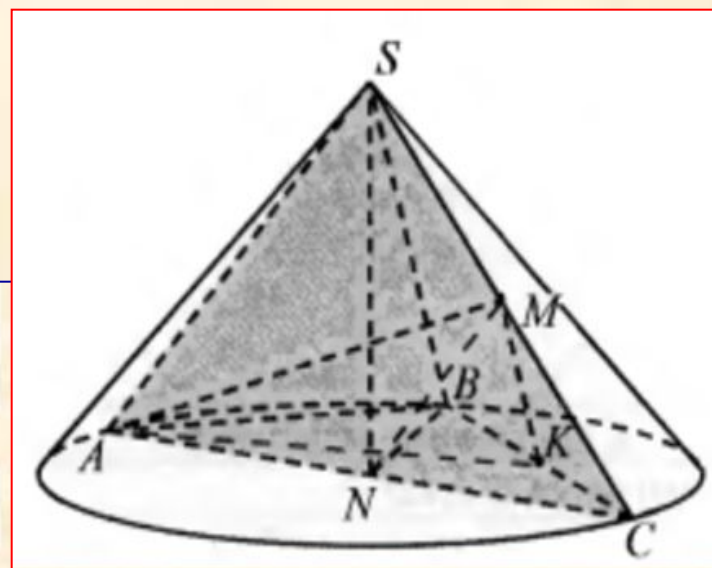


Москва
Издательство МЦНМО
2019

Решение.

а) Поскольку медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса, плоскость ACS содержит высоту конуса. Значит, AC — диаметр основания конуса и SN — его высота.

Медиана BN треугольника ABC перпендикулярна прямой AC . Также отрезок BN перпендикулярен высоте конуса SN как радиус основания. Следовательно, прямая BN перпендикулярна плоскости ACS , а значит, угол MNB прямой.



б) Пусть K — середина отрезка BC , $AS = 2$, $AC = \sqrt{6}$. Тогда искомый угол будет равен углу AMK , поскольку средняя линия MK треугольника BCS параллельна прямой SB ; $MK = \frac{SB}{2} = 1$.

В треугольнике ACS медиана AM равна

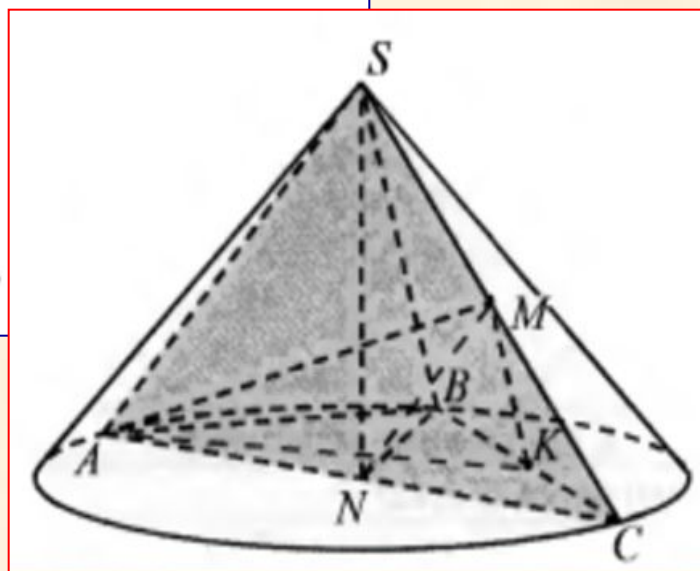
$$\frac{\sqrt{2AS^2 + 2AC^2 - SC^2}}{2} = \frac{\sqrt{AS^2 + 2AC^2}}{2} = 2.$$

В прямоугольном треугольнике ABC имеем

$$AB = \sqrt{3}, BK = \frac{\sqrt{3}}{2}; AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

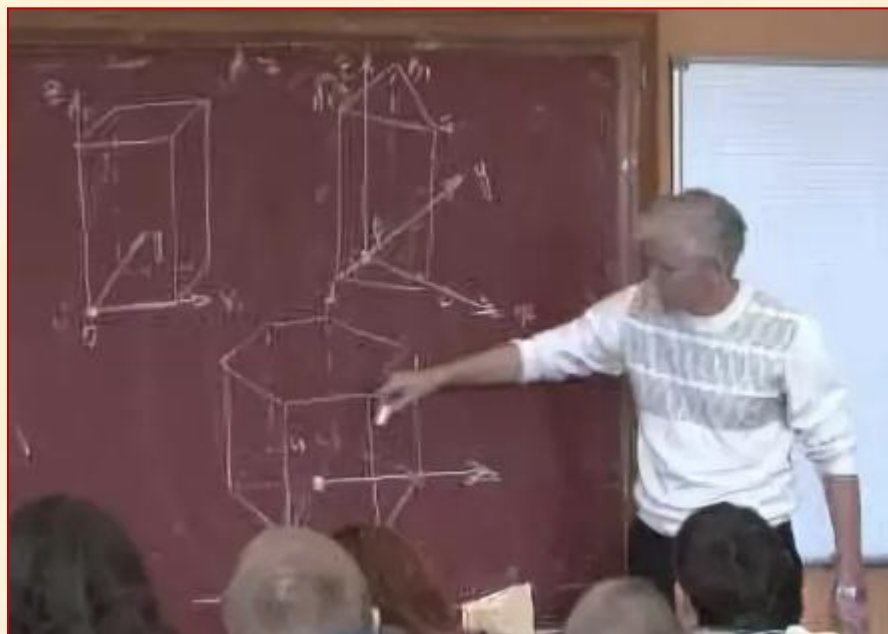
По теореме косинусов в треугольнике AMK имеем

$$\cos \angle AMK = \frac{AM^2 + MK^2 - AK^2}{2 \cdot AM \cdot MK} = \frac{5}{16}; \quad \angle AMK = \arccos \frac{5}{16}.$$

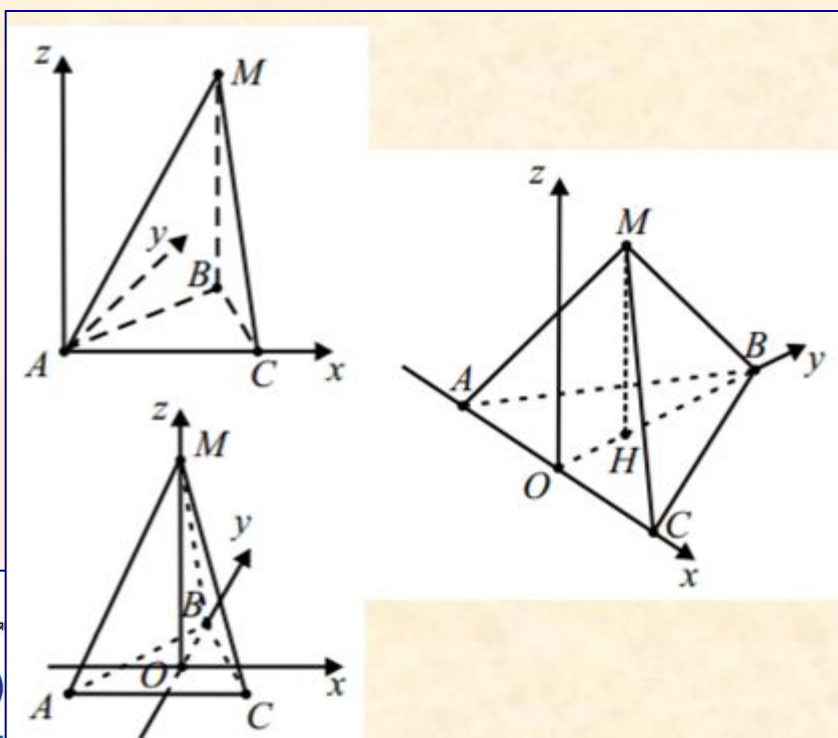


Ответ: $\arccos \frac{5}{16}$.

О введении системы координат в пространстве



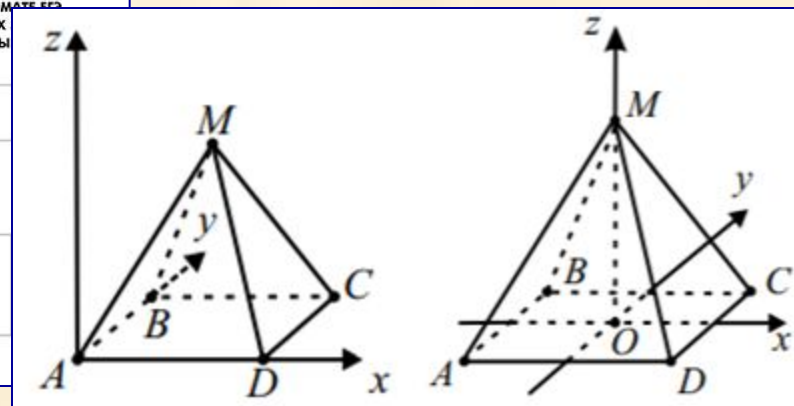
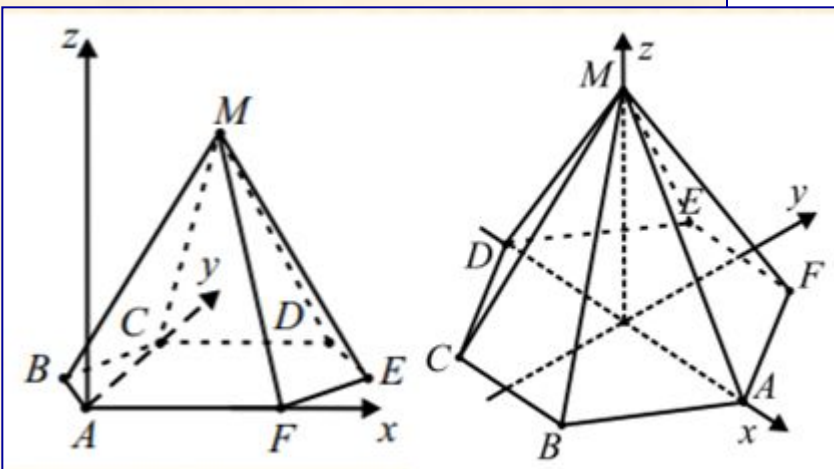
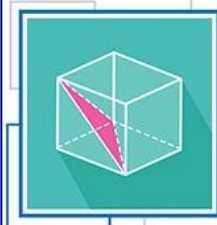
Прокофьев, А.Г. Коря



ЕГЭ МАТЕМАТИКА

ЗАДАНИЕ 14 МНОГОГРАННИКИ

ЕДИНОВЕЩНОННЫХ ЗАДАНИЙ В ФОРМАТЕ ЕГЭ
Ы РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ
ЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ И ОТВЕТЫ



Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 6. Плоскость β , параллельная плоскости α , касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 4. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α .

ЕГЭ 2013

Сечение шара плоскостью – круг. Рассмотрим сечение, проходящее через общий центр шаров и центры кругов. Пусть:

FD – радиус круга, полученного в сечении меньшего шара плоскостью α , тогда $S_{\alpha} = \pi \cdot FD^2$ – площадь сечения меньшего шара плоскостью α ;

AB – радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью β , тогда $S_{\beta} = \pi \cdot AB^2$ – площадь сечения большего шара плоскостью β ;

CF – радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью α .

Параллельные прямые AB и CF перпендикулярны прямой AF .

Из прямоугольных треугольников OCF и ODF получаем

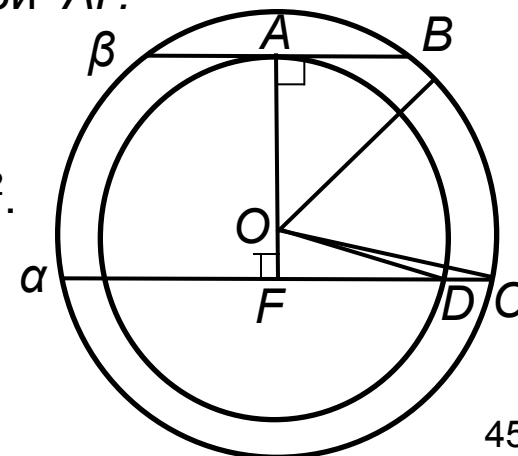
$$OF^2 = OC^2 - CF^2 = OD^2 - FD^2, \text{ откуда}$$

$$CF^2 = OC^2 - OD^2 + FD^2 = OB^2 - OA^2 + FD^2 = AB^2 - FD^2.$$

Площадь сечения большего шара плоскостью α равна:

$$S = \pi \cdot CF^2 = \pi \cdot AB^2 + \pi \cdot FD^2 = 10.$$

Ответ: 10.

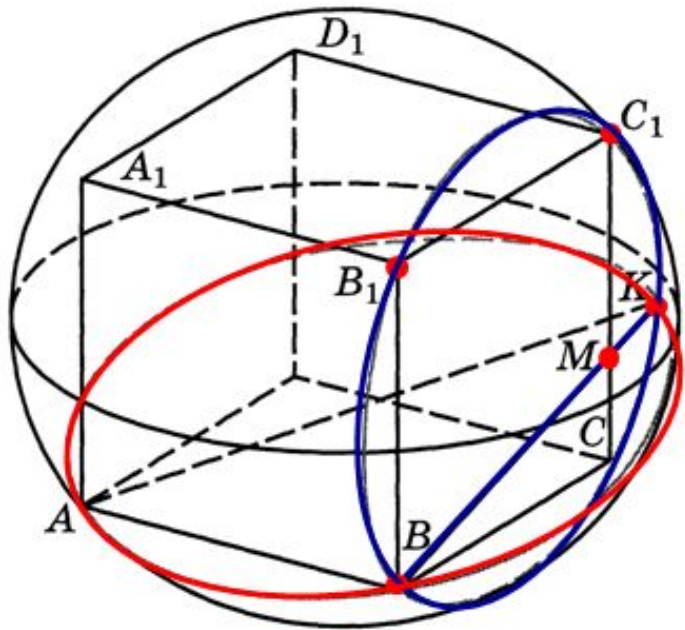


Сечение сферы плоскостью

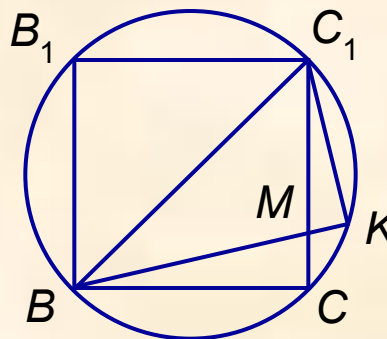
Вокруг куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 2 описана сфера. На ребре CC_1 взята точка M так, что плоскость, проходящая через точки A , B и M , образует угол 15° с плоскостью ABC .

- Постройте линию пересечения сферы и плоскости, проходящей через точки A , B и M .
- Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы.

а) Сечение сферы плоскостью является окружностью. Пусть теперь прямая BM вторично пересекает сферу в точке K – точка пересечения прямой BM с описанной окружностью квадрата $BCC_1 B_1$. Искомая линия – описанная окружность прямоугольного треугольника ABK .



Выносной чертеж



$$\text{б) } BK = BC_1 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{6}.$$

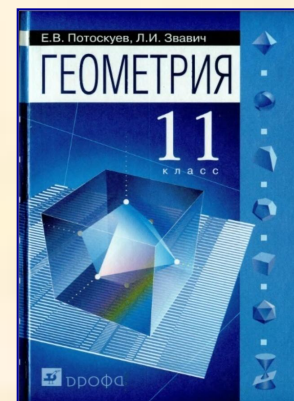
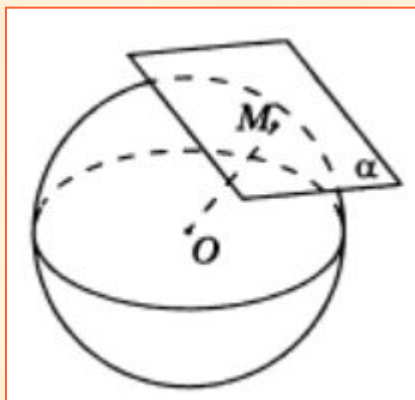
$$AK = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{10}.$$

Ответ: $\pi\sqrt{10}$.

Касательная плоскость к сфере

Теорема 30. Если плоскость касается сферы, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Теорема 31. Если плоскость проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она касается сферы.



 Заметим, что если прямая a касается сферы в точке M , то эта прямая касается в точке M той окружности большого круга, которая является сечением сферы и диаметральной плоскости, проходящей через прямую a .

Справедливо и обратное: если прямая a касается окружности большого круга сферы в точке M , то эта прямая касается в точке M самой сферы.

Вписанный шар

Центр вписанной сферы является точкой пересечения биссекторов всех внутренних двугранных углов многогранника.

В треугольную и любую правильную n -угольную пирамиду также всегда можно вписать шар.

Шар называется *вписанным в конус, усеченный конус* или *цилиндр*, если поверхность шара касается плоскостей оснований этих фигур и всех образующих их боковых поверхностей.

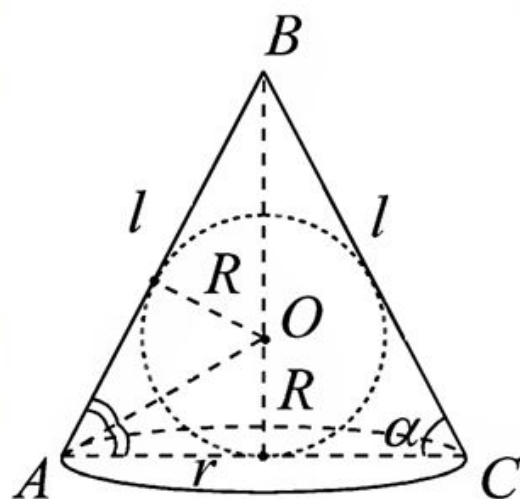


Рис. 35

Центр вписанного в конус шара совпадает с точкой пересечения высоты конуса с биссектрисой угла между любой образующей и плоскостью основания. В конус всегда можно вписать шар. Его радиус выражается формулой (см. рис. 35):

$$R = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{S_{ABC}}{r + l},$$

где r — радиус основания конуса, α — угол между образующей и плоскостью основания,

l — образующая конуса, S_{ABC} — площадь осевого сечения.

Шар, вписанный в многогранник

Определение. Шар называется вписанным в многогранник, если он касается всех граней многогранника.

$$V_{\text{многогр}} = \frac{1}{3} \cdot r \cdot S_{\text{полн.поверх.}}$$

Многогранник в таком случае называют описанным около шара.

Задача

Основанием пирамиды $PABC$ является треугольник ABC , в котором $AB = AC = 50$ и $BC = 80$. Грань BPC перпендикулярна основанию и $PB = PC$, PH — высота пирамиды.

- а) Докажите, что плоскости BPC и $АНР$ перпендикулярны.
б) Вычислите радиус шара, вписанного в пирамиду, если $PH = 7$.

Ответ: б) $\frac{40}{13}$

Для того, чтобы в призму можно было вписать сферу, необходимо и достаточно, чтобы в перпендикулярное сечение призмы можно было вписать окружность и чтобы высота призмы была равна диаметру этой окружности.

В правильную призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда ее высота равна диаметру окружности, вписанной в основание.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

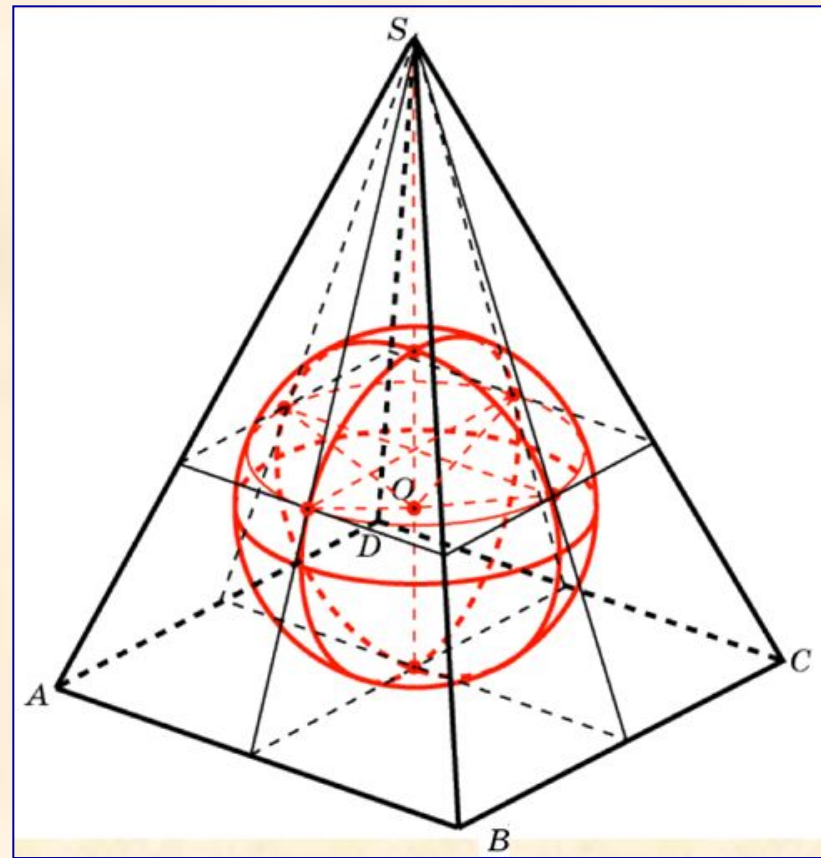
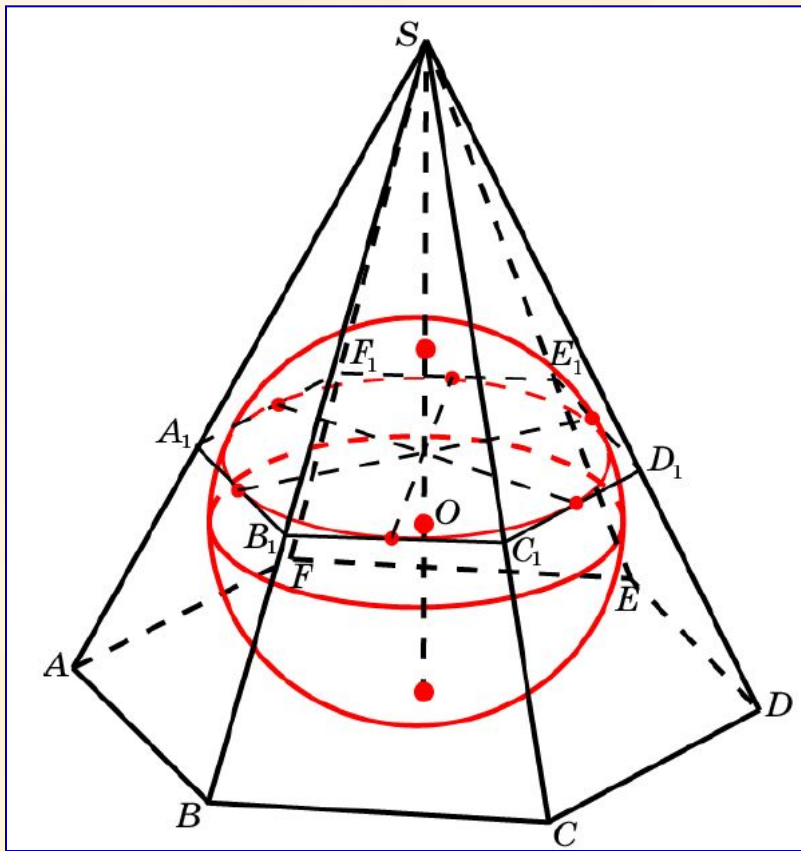
А.А. Прокофьев

Пособие по геометрии для
подготовительных курсов

(стереометрия)

Москва 2004

Сфера (шар), вписанная в пирамиду



Сфера (шар), вписанная в пирамиду

В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно $\sqrt{5}$, а высота равна 1, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

Пусть MH — высота правильной шестиугольной пирамиды $MABCDEF$ с вершиной M , тогда треугольник AMH прямоугольный, $MA = \sqrt{5}$, $MH = 1$, откуда $AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 2$.

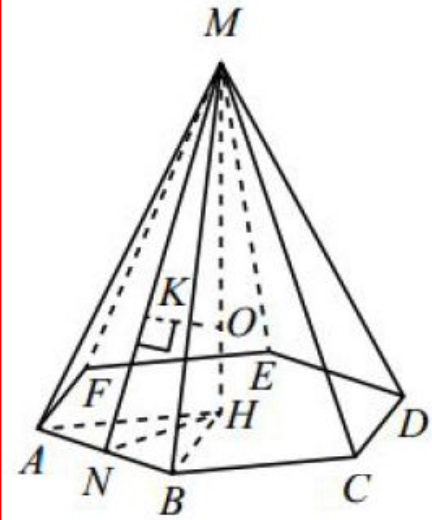
Треугольник ABH равносторонний, следовательно, $AB = AH = 2$.

В треугольнике AMB высота $MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 2$.

В правильном треугольнике AHB высота $HN = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Центр O сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, лежит на её высоте MH , точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN . Треугольники $МОК$ и MNH подобны, поэтому $MO:OK = MN:HN \Leftrightarrow (1-r) \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot r \Leftrightarrow r = 2\sqrt{3} - 3$, где r — радиус сферы.

Площадь сферы $S = 4\pi r^2 = 12(7 - 4\sqrt{3})\pi$.



Ответ: $12(7 - 4\sqrt{3})\pi$.

Сфера (шар), вписанная в пирамиду

В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

Пусть MH — высота правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с вершиной M . тогда треугольник AMH прямоугольный.

$$MA = 10, MH = 6, \text{ откуда } AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 8.$$

Треугольник ABH прямоугольный равнобедренный, следовательно, $AB = AH\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. В треугольнике AMB высота

$$MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 2\sqrt{17}.$$

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABH высота

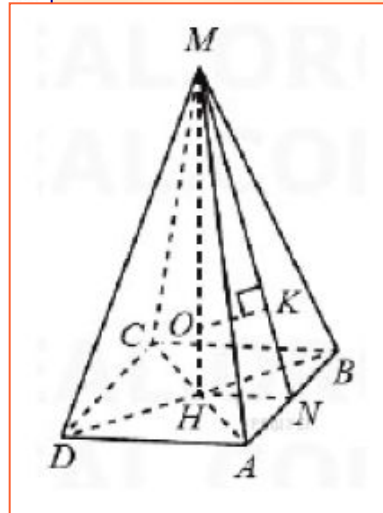
$$NH = \frac{AB}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Центр O сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, лежит на её высоте MH , точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN . Треугольники $МОК$ и MNH подобны, поэтому

$$MO:OK = MN:HN \Leftrightarrow (6 - r) \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{17} \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{4\sqrt{34}-16}{3},$$

где r — радиус сферы.

$$\text{Площадь сферы } S = 4\pi r^2 = \frac{128(25-4\sqrt{34})\pi}{9}.$$



Ответ: $\frac{128(25-4\sqrt{34})\pi}{9}.$

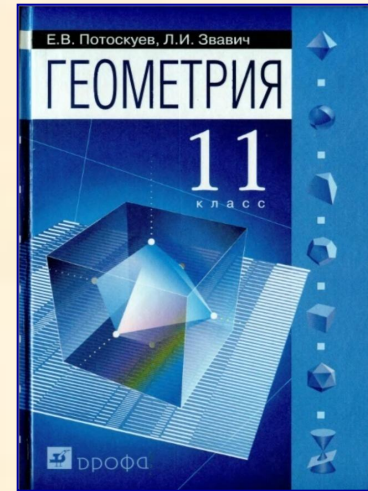
Сфера (шар), описанная около многогранника

Вообще, для того чтобы около многогранника можно было описать шар, необходимо, чтобы около любой его грани можно было описать круг. При этом центр описанного шара может лежать как внутри многогранника, так и вне его или на его поверхности (даже на ребре многогранника), и проектируется в центр описанного около любой грани круга. Кроме того, перпендикуляр, опущенный из центра описанного около многогранника шара на ребро многогранника, делит это ребро (как хорду шара) пополам.

Мы уже говорили о пирамидах, все ребра которых одинаково наклонены к основанию. Около таких пирамид всегда можно описать шар, центр которого лежит на луче, содержащем высоту пирамиды.

Высота h пирамиды, радиус R_k описанного около основания пирамиды круга и радиус R описанного около этой пирамиды шара связаны соотношением:

$$(R - h)^2 + R_k^2 = R^2.$$



Сфера (шар), описанная

Для того, чтобы около многогранника можно было описать сферу, достаточно, чтобы все плоскости, проходящие через середины ребер перпендикулярно им, имели одну общую точку.

Для пирамиды и призмы имеют место следующие утверждения:

а) *для того, чтобы около пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы около основания пирамиды можно было описать окружность;*

б) *для того, чтобы около призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямой и около ее основания можно было описать окружность.*

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.А. Прокофьев

*Пособие по геометрии для
подготовительных курсов*

(стереометрия)

Москва 2004

Около треугольной пирамиды, любой правильной призмы, цилиндра, конуса и усеченного конуса всегда можно описать шар.

Радиус сферы, описанной около цилиндра, выражается формулой

$$R = \sqrt{\frac{h^2}{4} + r^2}, \text{ где } h - \text{ высота цилиндра, } r - \text{ радиус его основания.}$$

1. Радиус основания цилиндра равен 5, высота цилиндра равна 8. Плоскость α , параллельная оси цилиндра, удалена от оси на расстояние, равное 4. Найдите:

- а) объём цилиндра;
- б) площадь боковой поверхности;
- в) площадь сечения цилиндра плоскостью α ;
- г) расстояние между осью цилиндра и диагональю прямоугольника сечения;
- д) угол между осью цилиндра и диагональю прямоугольника сечения.

2. Радиус основания конуса равен $2\sqrt{3}$, угол в осевом сечении равен 60° . Плоскость α проходит через вершину конуса и хорду AB основания, равную $2\sqrt{3}$. Найдите:

- а) объём конуса;
- б) площадь полной поверхности;
- в) площадь сечения конуса плоскостью α ;
- г) расстояние от центра основания конуса до плоскости α ;
- д) угол между плоскостями, проходящими через ось конуса и точки A и B соответственно;
- е) угол между образующей конуса, проходящей через точку B , и диаметром основания, проходящим через точку A .



3. Площадь сечения шара плоскостью α , удалённой от центра на расстояние, равное 12, равна 81π . Найдите:

- а) объём шара;
- б) площадь поверхности шара;
- в) отношение площади поверхности шара к площади полной поверхности вписанного в шар куба;
- г) объём конуса, основание которого — сечение шара плоскостью α , а вершина лежит на поверхности шара;
- д) боковую поверхность цилиндра, основания которого — сечения шара плоскостью α и параллельной ей плоскостью.



1. а) 200π ; б) 80π ; в) 48; г) 4; д) $\arctg \frac{4}{3}$. 2. а) 24π ; б) 36π ; в) $3\sqrt{15}$; г) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$; д) 60° ; е) $\arccos \frac{1}{4}$. 3. а) 4500π ; б) 900π ; в) $\frac{\pi}{2}$; г) 81π или 729π ; д) 432π .

9.1. Основания одного цилиндра вписаны в основания правильной призмы, а основания другого цилиндра описаны около оснований этой призмы.

а) Докажите, что отношение объёмов цилиндров одно и то же для любой заданной правильной призмы.

б) Найдите это отношение для правильной четырёхугольной призмы.

9.2. Вершины двух конусов совпадают с вершиной правильной пирамиды. Основание одного конуса вписано в основание пирамиды, а другого — описано около основания пирамиды.

а) Докажите, что отношение объёмов конусов одно и то же для любой заданной правильной n -угольной пирамиды.

б) Найдите это отношение для правильной треугольной пирамиды.

9.3. Высота конуса равна 6, а радиус основания равен 8.

а) Докажите, что наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, равна 50.

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до этой плоскости.

9.4. Высота конуса равна 4, а радиус основания равен $\sqrt{34}$.

а) Докажите, что наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, равна 25.

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до этой плоскости.



9.5. Проведены две параллельные плоскости по одну сторону от центра сферы на расстоянии 3 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении две окружности, длины которых равны 18π и 24π .

а) Точка H — ортогональная проекция произвольной точки меньшей окружности на плоскость большей. Докажите, что точка H делит проходящий через неё диаметр большей окружности в отношении $1:7$.

б) Найдите объём шара, ограниченного данной сферой.

9.6. Проведены две параллельные плоскости по разные стороны от центра шара на расстоянии 7 друг от друга. Эти плоскости дают в сечении два круга, площади которых равны 9π и 16π .

а) Точка H — ортогональная проекция произвольной точки окружности меньшего круга на плоскость большего. Докажите, что точка H делит проходящий через неё диаметр большей окружности в отношении $1:7$.

б) Найдите площадь поверхности шара.

9.7. Плоскость α проходит через диаметр AB сферы. Через произвольную точку M , лежащую на сфере, но не лежащую в плоскости α , проведена плоскость β , перпендикулярная прямой AB . Отрезок CD — общая хорда окружностей сечений сферы плоскостями α и β .

а) Докажите, что $\angle CMD = 90^\circ$.

б) Вершина конуса совпадает с точкой A , а окружность основания — с окружностью сечения сферы плоскостью β . Найдите объём конуса, если диаметр сферы равен 15, а $MB = 3\sqrt{5}$.



9.8. Плоскость α проходит через диаметр AB сферы. Через точку B проведена плоскость, касательная к сфере. На этой плоскости взята точка K , причём отрезок KB равен радиусу сферы. Луч AK пересекает сферу в точке M . Через точку M проведена плоскость β , перпендикулярная прямой AB . Отрезок CD — общая хорда окружностей сечений сферы плоскостями α и β .

а) Докажите, что CD — диаметр окружности сечения сферы плоскостью β .

б) Вершина конуса совпадает с точкой B , а окружность основания — с окружностью сечения сферы плоскостью β . Найдите объём конуса, если радиус сферы равен 5.

9.9. Одно основание цилиндра лежит в плоскости основания правильной треугольной пирамиды, а окружность второго вписана в сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину её высоты.

а) Докажите, что радиус основания цилиндра в шесть раз меньше высоты основания пирамиды.

б) Найдите отношение объёмов цилиндра и пирамиды.

9.10. Одно основание цилиндра лежит в плоскости основания правильной четырёхугольной пирамиды, а окружность второго вписана в сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку на её высоте, делящую эту высоту в отношении $1:2$, считая от вершины.

а) Докажите, что радиус основания цилиндра в шесть раз меньше стороны основания пирамиды.

б) Найдите отношение объёмов цилиндра и пирамиды.



9.11. На окружности основания конуса с вершиной P выбраны точки A и B , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как $1 : 2$.

а) Пусть MN — диаметр окружности основания, перпендикулярный хорде AB . Докажите, что объём одной из пирамид $PABN$ и $PABM$ вдвое больше объёма другой.

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP , если радиус основания конуса равен 6, а длина его образующей равна 7.

9.12. В окружность основания конуса с вершиной P вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$.

а) Докажите, что объём пирамиды $PABD$ вдвое больше объёма пирамиды $PDEF$.

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP , если радиус основания конуса равен 6, а длина его образующей равна 9.

9.13. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость α пересекает его основания по хордам длины 12 и 16.

а) Пусть M и N — середины этих хорд, P — точка пересечения прямой MN с осью цилиндра. Докажите, что расстояния от точки P до плоскостей основания цилиндра относятся как $3 : 4$.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.



9.14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость α пересекает его основания по хордам длины 24 и 10.

а) Пусть M и N — середины этих хорд, P — точка пересечения прямой MN с осью цилиндра. Докажите, что расстояния от точки P до плоскостей основания цилиндра относятся как 5 : 12.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.

9.15. Через точку P , лежащую на диаметре AB шара, проведена плоскость, перпендикулярная этому диаметру и пересекающая шар по кругу радиуса r .

а) Докажите, что $r^2 = AP \cdot PB$.

б) Найдите высоту конуса наибольшего возможного объёма, вписанного в шар радиуса R .

9.16. Основания цилиндра — сечения шара плоскостями, перпендикулярными его диаметру AB .

а) Докажите, что квадрат образующей цилиндра равен разности квадратов диаметров шара и основания цилиндра.

б) Найдите высоту цилиндра наибольшего возможного объёма, вписанного в шар радиуса R .

9.17. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $\arccos \frac{7}{8}$.

а) Докажите, что площадь полной поверхности конуса в пять раз больше площади его основания.

б) Найдите угол в развёртке боковой поверхности.



9.18. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $\arccos \frac{7}{9}$.

а) Докажите, что площадь полной поверхности конуса в четыре раза больше площади его основания.

б) Найдите угол в развёртке боковой поверхности.

9.19. Вокруг куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ описана сфера, т. е. все вершины куба лежат на сфере. На ребре CC_1 взята точка M , при этом плоскость ABM образует угол 15° с плоскостью ABC .

а) Докажите, что расстояние от центра сферы до плоскости ABM вдвое меньше радиуса окружности, описанной около грани куба.

б) Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы, если ребро куба равно 2.

9.20. Вокруг единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ описана сфера. На ребре $B_1 C_1$ взята точка M , при этом плоскость ABM образует угол 75° с плоскостью ABC .

а) Докажите, что расстояние от центра сферы до плоскости ABM вдвое меньше радиуса окружности, описанной около грани куба.

б) Найдите длину линии пересечения плоскости ABM и сферы.

9.1. $1:2$. 9.2. $1:4$. 9.3. $\frac{6\sqrt{7}}{5}$. 9.4. $\frac{12}{5}$. 9.5. 4500π . 9.6. 100π . 9.7. 144π .

9.8. $\frac{32\pi}{3}$. 9.9. $\pi\sqrt{3}:24$. 9.10. $\pi:18$. 9.11. $3\sqrt{66}$. 9.12. $18\sqrt{2}$. 9.13. 2 или 14.

9.14. $\frac{21}{17}$ или 3. 9.15. $\frac{4}{3}R$. 9.16. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. 9.17. 90° . 9.18. 120° . 9.19. $\pi\sqrt{10}$. 9.20. $\frac{\pi\sqrt{10}}{2}$.



Спасибо за внимание!

А.А. Прокофьев

Тел.: (499) 729-73-43

E-mail: aaprokof@yandex.ru

