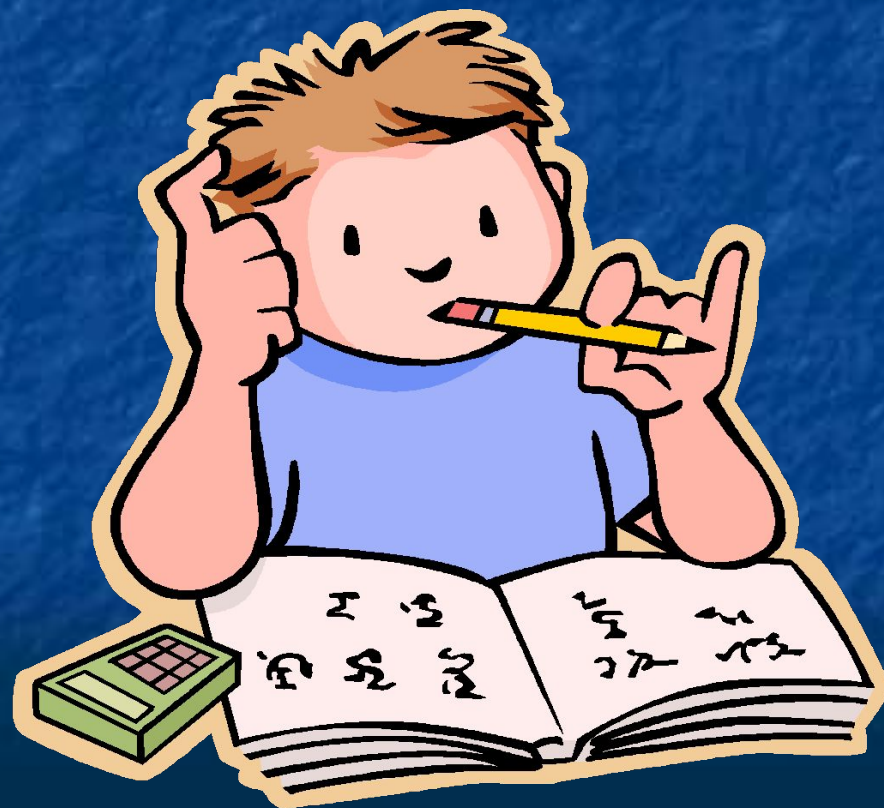
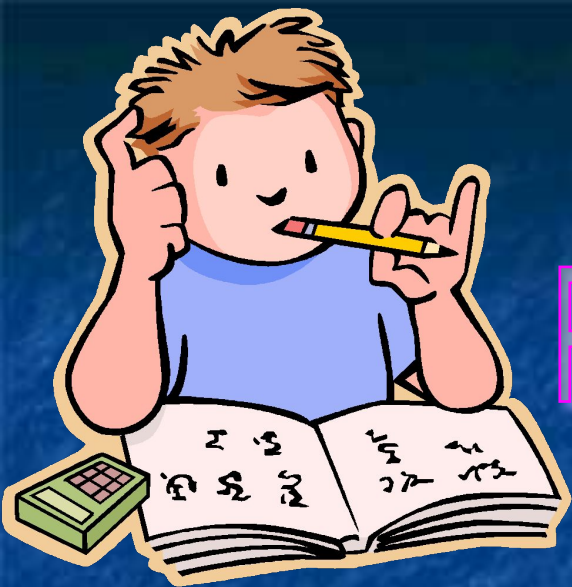


Решение тригонометрических уравнений





Расскажи мне - и я забуду.

Покажи мне - и я запомню.

Дай действовать самому - и я научусь.

$$1) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$2) \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3) \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Что называется $\arcsin a$?

$$a \in [-1, 1] \quad \arcsin a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a, \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Что называется $\arccos a$?

$$a \in [-1, 1] \quad \arccos a = x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a, \\ x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Чему равен $\arccos(-a)$?

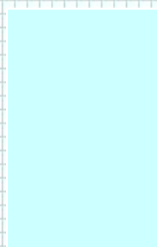
$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

Чему равен $\arcsin(-a)$?

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

Устная работа:

$$\arccos \frac{1}{2} =$$



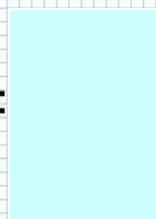
$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} =$$



$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} =$$



$$\arcsin \frac{1}{2} =$$



Найди ошибку.

1

$$\text{arcsin } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2

$$\text{arccos} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

3

$$\text{arcsin } 3 = \text{arcsin } 1 - 3 = \frac{\pi}{4} \cdot 3 = \frac{3\pi}{4}$$

4

$$\text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4}$$

5

$$\text{arcctg} \left(-\sqrt{3} \right) = \frac{5\pi}{6}$$



Назовите формулу нахождения корней уравнения вида $\sin x = a$?

$$\sin x = a$$

$$\begin{cases} x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ a \in [-1; 1], x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

**Назовите формулу нахождения
корней уравнения вида $\cos x = a$**

$$\cos x = a$$

$$\begin{cases} x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \\ a \in [-1; 1], x \in [0; \pi] \end{cases}$$

Установите соответствие:

1

$$\sin x = 0$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2

$$\cos x = -1$$

$$2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3

$$\sin x = 1$$

$$\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

4

$$\cos x = 1$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

5

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

6

$$\sin x = -1$$

$$\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

7

$$\cos x = 0$$

Установите съответствие:

- 1 $\sin x = 0$
- 2 $\cos x = -1$
- 3 $\sin x = 1$
- 4 $\cos x = 1$
- 5 $\operatorname{tg} x = 0$
- 6 $\sin x = -1$
- 7 $\cos x = 0$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

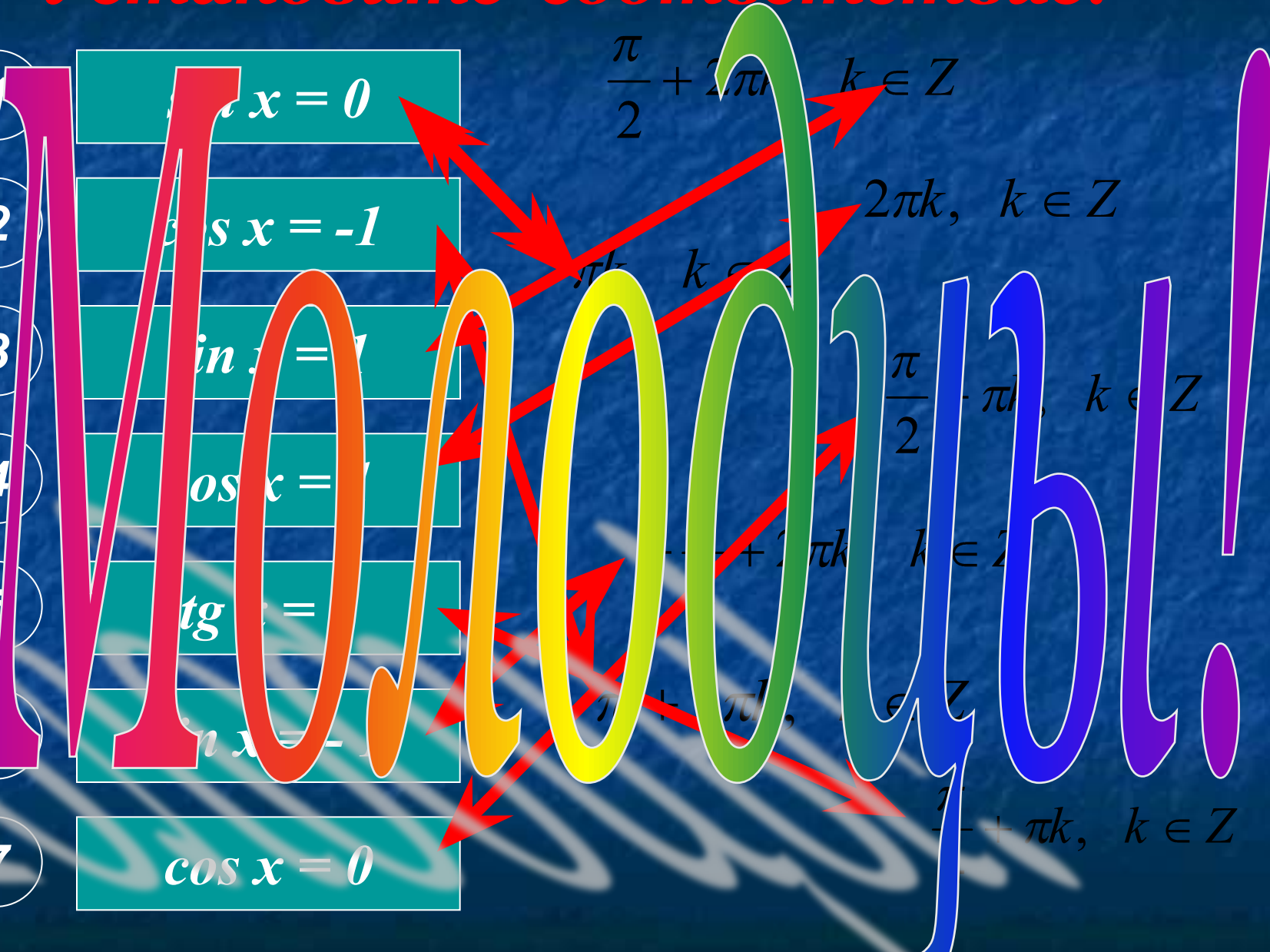
$$\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{2} - \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Экспресс-опрос

$$1. \sin x = \frac{1}{2}$$

$$2. \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3. \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$4. \operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$$

$$5. \sin x = 1,5$$

$$6. \cos x = -2$$

$$7. \operatorname{tg} x = 4$$

Слово «**тригонометрия**» впервые встречается в 1505 году в заглавии книги немецкого теолога и математика Питискуса. Происхождение этого слова греческое **τρίγωνον** – треугольник, **μετρῶ** – мера. Иными словами, тригонометрия – наука об измерении треугольников. Тригонометрия выросла из человеческой практики, в процессе решения конкретных практических задач в областях астрономии, мореплавания и в составлении географических карт.





Некоторые тригонометрические сведения были известны древним вавилонянам и египтянам, но основы этой науки заложены в Древней Греции.

Греческий астроном Гиппарх во II веке до н.э. составил таблицу числовых значений хорд в зависимости от величин стягиваемых ими дуг.



Евклид



Архимед



Аполлоний
Пергский

Фактически различные отношения отрезков треугольника и окружности (а по существу тригонометрические функции) встречаются уже в III в. до н.э. В работах великих математиков Древней Греции Евклида, Архимеда, Аполлония Пергского.



Евклид



Архимед



Аполлоний
Пергский

В римский период эти отношения уже достаточно систематично исследовались Менелаем (I в. н.э.), хотя и не приобрели специального названия. Современный синус угла α , например, изучался как полухорда, на которую опирается центральный угол величиной α , или как хорда удвоенной дуги.

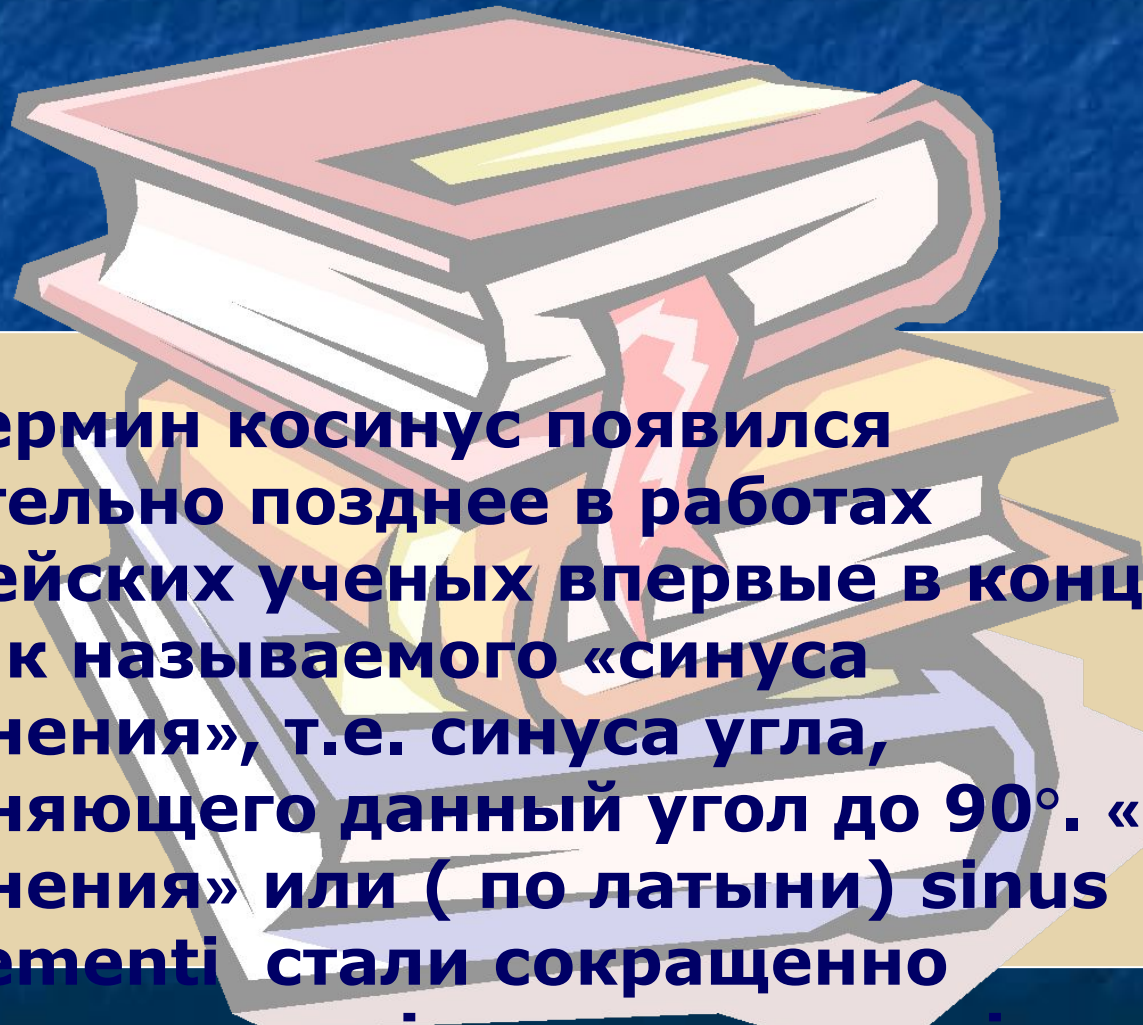


Следующий шаг в развитии тригонометрии был сделан индийцами в период с V по XII в.



Наряду с синусом индийцы ввели в тригонометрию косинус, точнее говоря, стали употреблять в своих вычислениях линию косинуса. Им были известны также соотношения $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$ и $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = r^2$, а также формулы для синуса суммы и разности двух углов.





Сам термин косинус появился значительно позднее в работах европейских ученых впервые в конце XVI в. из так называемого «синуса дополнения», т.е. синуса угла, дополняющего данный угол до 90° . «Синус дополнения» или (по латыни) *sinus complementi* стали сокращенно записывать как *sinus co* или *co-sinus*.





Тригонометрия отделяется от астрономии и становится самостоятельной наукой (XIII в.)



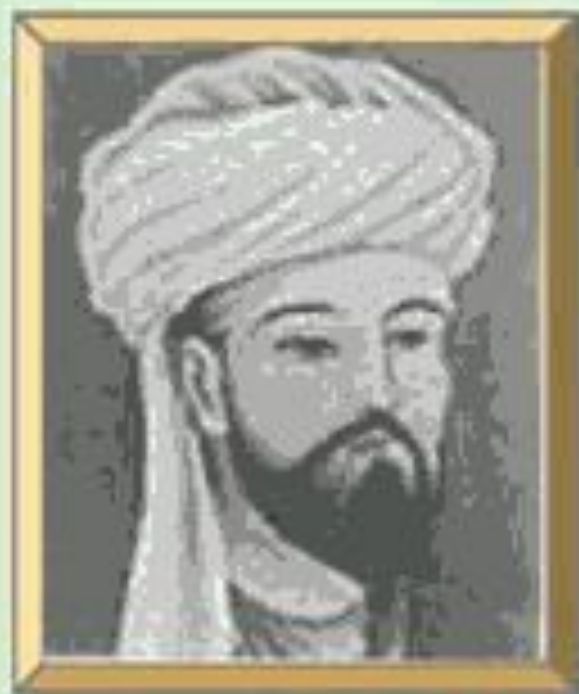
Насирэддин Туси

В трудах среднеазиатских ученых тригонометрия превратилась из науки, обслуживающей астрономию, в особую математическую дисциплину, представляющую самостоятельный интерес. Это отделение обычно связывают с именем азербайджанского математика Насирэддина Туси (1201-1274).





Дальнейшее развитие учение о тригонометрических величинах получило в IX – XV в.в. в странах Среднего и Ближнего Востока в трудах ряда математиков.



Насирэддин Туси

В «Трактате о полном четырехстороннике» впервые изложил тригонометрические сведения как самостоятельный отдел математики, а не придаток в астрономии.



Дальнейшее развитие учение о тригонометрических величинах получило в IX – XV в.в. в странах Среднего и Ближнего Востока в трудах ряда математиков.



Аль-Хорезми

Составил таблицы синусов и котангенсов.



Дальнейшее развитие учение о тригонометрических величинах получило в IX – XV в.в. в странах Среднего и Ближнего Востока в трудах ряда математиков.



Аль Каши

В первой половине XV века вычислил с большой точностью тригонометрические таблицы с шагом в 1° , которые на протяжении 250 лет оставались непревзойденными.



Региомонтан

Тангенсы возникли в связи с решением задач об определении длины тени. Тангенс (а также котангенс, секанс и косеканс) введен в X в. Арабским математиком **Абу-л-Вафой**, который составил первые таблицы для нахождения тангенсов и котангенсов. Однако эти открытия долгое время оставались неизвестными, европейским ученым, и тангенсы были заново открыты в XIV в.



Региомонтан

Сначала английским ученым **Т. Бравердином**, позднее немецким математиком, астрономом **Региомонтаном** в 1467 г. Название «тангенс», происходящее от *tanger* (касаться), появилось в 1583 г. *Tangens* переводится как «касающийся».

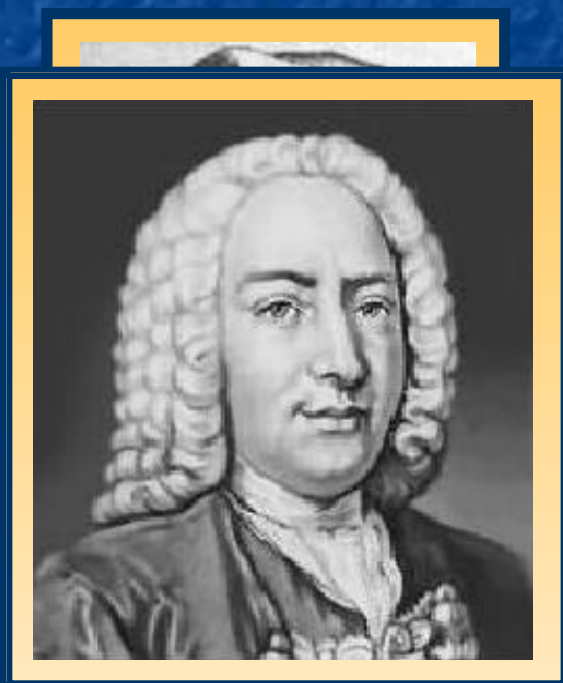


Позже тригонометрия
начала широко изучаться
в Европе.



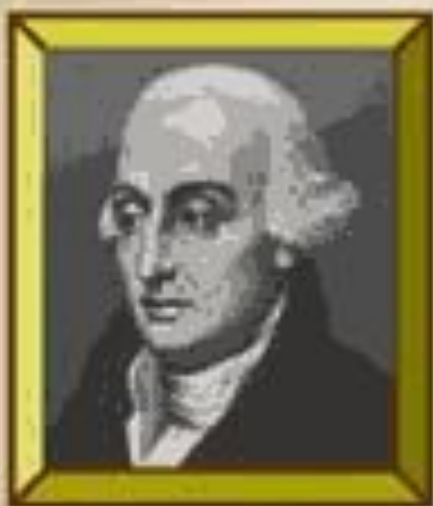
Его обширные таблицы синусов
через 1° с точностью до 7-ой цифры
и его изложенный
тригонометрический труд
«Пять книг о треугольниках всех
видов» имели большое значение для
дальнейшего развития тригонометрии
в XVI – XVII вв.

И. Региомонтан



**Швейцарский математик
Иоганн Бернулли
(1642-1727)
уже применял символы
Обратных тригонометрических
функций.**





Лагранж



Бернулли

Но общепринятыми эти символы стали лишь в конце XVIII столетия.

Приставка «арк» происходит от латинского *arcus* (дуга), что вполне согласуется со смыслом понятия: *arcsin x*, например, - это угол (а можно сказать, и дуга), синус которого равен x .



Лагранж



Бернулли

Современные обозначения \arcsin и \arctg появляются в 1772 году в работах венского математика Шерфера и известного французского учёного Ж.Л.Лагранжа. Хотя несколько ранее их уже рассматривал Д.Бернулли, который употреблял иную символику.

Франсуа Виет

- Франсуа Виет дополнил и систематизировал различные случаи решения плоских и сферических треугольников, открыл формулы для тригонометрических функций от кратных углов.



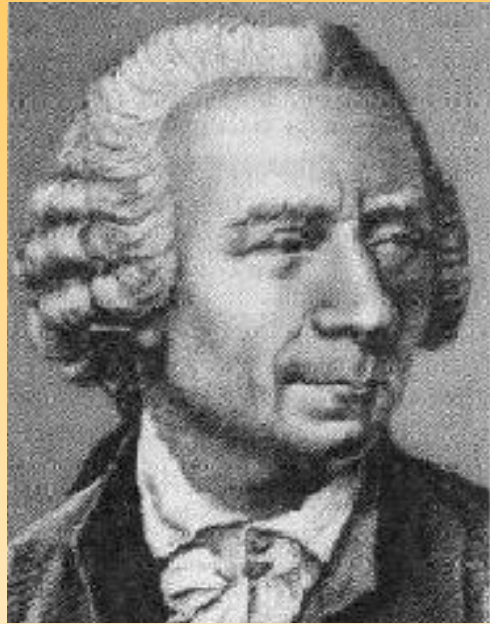


В XVII – XIX вв. тригонометрия становится одной из глав математического анализа. Она находит большое применение в механике, физике и технике, особенно при изучении колебательных движений и других периодических процессов.



Жан Фурье

Доказал, что всякое периодическое движение может быть представлено (с любой степенью точности) в виде суммы простых гармонических колебаний.



Окончательный вид
тригонометрия приобрела
в XVIII веке в трудах
Л. Эйлера.

Леонард Эйлер

10784.36
5 x 8 = 1
2.719372

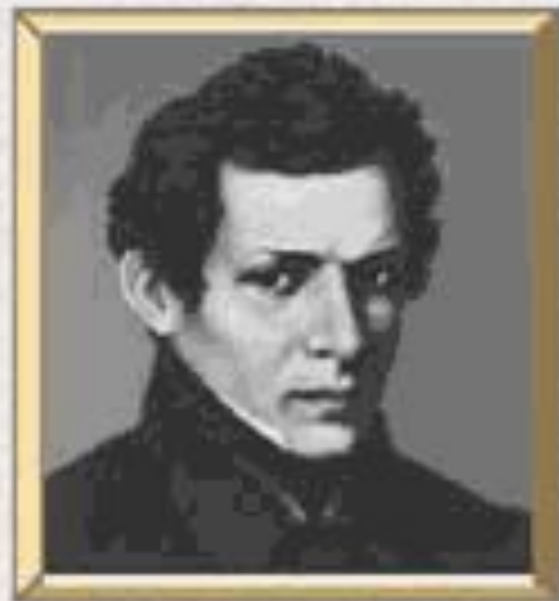
Разрабатывает учение
о тригонометрических функциях
любого аргумента.





Исаак НЬЮТОН

Содействовал
развитию
аналитической
теории
тригонометрических
функций.



Н.И.Лобачевский

В XIX веке продолжил
развитие теории
тригонометрических
функций.

$$3 \cos 2x - 5 \cos x = 1$$

$$3(\cos^2 x - \sin^2 x) - 5 \cos x = 1$$

$$3(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) - 5 \cos x - 1 = 0$$

$$6 \cos^2 x - 5 \cos x - 1 = 0$$

поскольку $\cos x = t$

$$6t^2 - 5t - 4 = 0$$

$$\cos x = \frac{4}{3}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

ответ: $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$$

$$-2 \sin \frac{3x+5x}{2} \cdot \sin \frac{3x-5x}{2} = \sin 4x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin(-x) = \sin 4x$$

$$\underline{2 \sin 4x \sin x} - \underline{\sin 4x} = 0$$

$$\sin 4x(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\sin 4x = 0$$

$$4x = \pi n$$

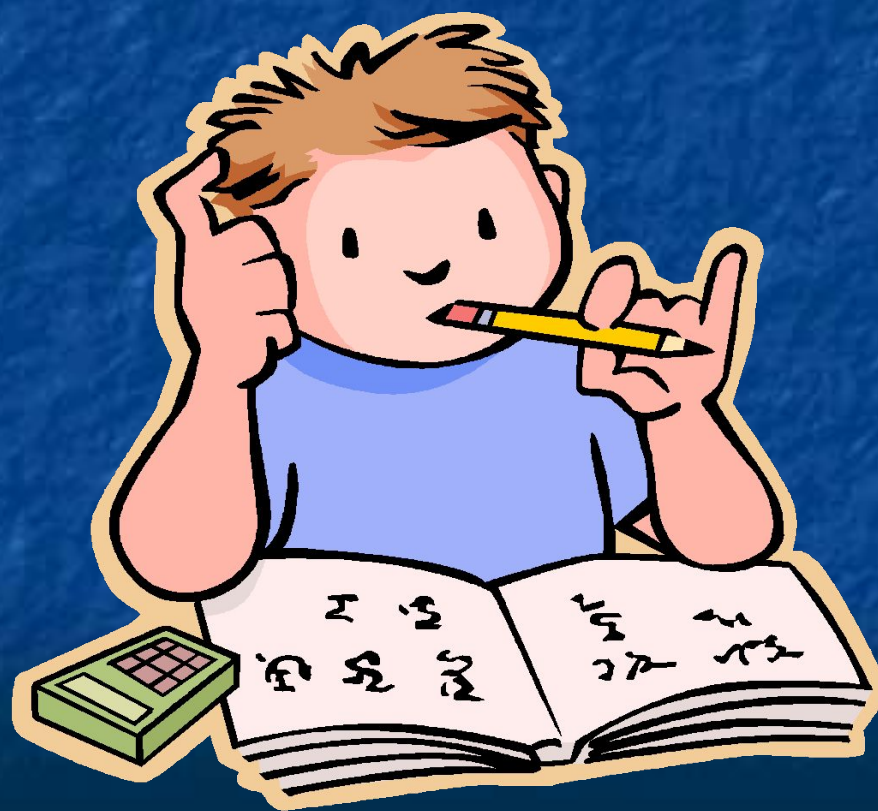
$$2 \sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Однородные тригонометрические уравнения





$$2 \sin x - \cos x = 0 \quad | : \cos x$$

$$2 \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3 \sin^2 x + \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x$$

$$3 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 4 = 0$$

пусть $\operatorname{tg} x = t$ $3t^2 + t - 4 = 0$

$$\operatorname{tg} x = 1 \qquad \operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}$$

$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n \qquad x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{4}{3}\right) + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Определите вид уравнения и укажите способ его решения:

а) $\sin x = 2 \cos x$;

б) $\sin x + \cos x = 0$;

в) $4 \cos 3x + 5 \sin 3x = 0$;

г) $1 + 7 \cos^2 x + 3 \sin^2 x = 0$;

д) $\sin 3x - \cos 3x = 0$;

е) $\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

